LØSNINGSFORSLAG TIL OPPGAVESAMLING FOR FINALEUKEN I FYSIKK-OL

Redigert av Thomas Frågåt

UiO : Fysisk institutt
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Norsk fysikklærerforening
Norsk Fysisk Selskaps faggruppe for undervisning

Innholdsfortegnelse

Mekanikk

Oppgave 1

Den største endring i kinesisk energi må være når partikkel A stopper helt i støtet.
Da gir bevaring av bevegelsesmengde

$$mv_{A1} = Mv_{B2}$$

Samtidig skal vi ha bevaring av energi

$$\tfrac{1}{2}mv_{A1}^2 = \tfrac{1}{2}Mv_{B2}^2$$

Av dette finner vi at

$v_{A1} = v_{B2}$ og $m = M$

<u>En litt mer omstendelig løsning er:</u>
Endring av kinetisk energi for partikkel A er

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}mv_{A1}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{A2}^2$$

Bevaring av bevegelsesmengde:

$mv_{A1} = mv_{A2} + Mv_{B2}$ som gir

$$v_{B2} = \frac{mv_{A1} - mv_{A2}}{M}$$

For et elastisk støt har vi også at

$v_{A1} + v_{A2} = v_{B2}$ (partikkel B er i ro før støtet)

Da blir

$$v_{A2} = \frac{m-M}{m+M}v_{A1}$$

Og dermed

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}mv_{A1}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{A2}^2 = \tfrac{1}{2}mv_{A1}^2 - \tfrac{1}{2}m\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2 v_{A1}^2$$

Deriverer

$$\frac{d\Delta K}{dM} = 2mv_{A1}^2 \frac{m-M}{(m+M)^3}$$

Den deriverte er null når *m* = *M*. Altså mister partikkel A mest kinetisk energi når massene er like store.

Oppgave 2

Finner først tyngdepunktet (massesenteret, dvs avstanden fra opphengningspunktet)

$$x_T = \frac{ml + 2m4l}{m + 2m} = 3l$$

Alle punkter på stangen har samme vinkelfart, $\omega = \frac{v_T}{r}$

Energibevaring gir:

$\frac{1}{2}m(l\omega)^2 + \frac{1}{2}2m(4l\omega)^2 = mgl + 2mg4l$

Som gir $\omega = \sqrt{\frac{6g}{11l}}$

Tyngdepunktets fart blir da: $v_T = \omega \cdot 3l = 3\sqrt{\frac{6gl}{11}}$

Treghetsmomentet blir

$I = ml^2 + 2m(4l)^2 = 33ml^2$

Og spinnet:

$L = I\omega = 33ml^2\sqrt{\frac{6g}{11l}}$

Oppgave 3

Når farten er *v*, får vi i henholdsvis horisontal og vertikal retning:

$N\sin\alpha = m\frac{v^2}{r}$

og

$N\cos\alpha = mg$

Her er *N* normalkraften, og det er bare de to kreftene normalkraften og tyngden som virker på bilen. Radien i svingen er *r*.

Av disse to ligningene får vi at $\tan\alpha = \frac{v^2}{gr}$

Når farten blir større, må vi altså ha friksjon for at bilen ikke skal skli. Nå får vi:

$N\sin\alpha + R\cos\alpha = m\frac{(2v)^2}{r}$

og

$N\cos\alpha - R\sin\alpha = mg$

Vi setter inn uttrykket for *v* og får

$N\sin\alpha + \mu N\cos\alpha = m\frac{4gr\tan\alpha}{r}$

$N\cos\alpha - \mu N\sin\alpha = mg$

Vi dividerer de to ligningene:

$\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = \frac{4gr\tan\alpha}{gr}$

Av dette:

$$\mu = \frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha} = \frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha}$$

Oppgave 4

Når den lille klossen er i bunnen av den halvsirkelformede bane, har den farten *v*, og kassen får farten *V*. Bevaring av bevegelsesmengde gir:

$$3mV = mv \Rightarrow V = \frac{v}{3}$$

Energibevaring gir: $mgr = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}3mV^2 = \tfrac{2}{3}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3gr}{2}}$

Vi ser nå på den lille klossen fra kassen (som er i bevegelse):

Klossen har da farten: $v' = v + V = \tfrac{4}{3}v$

Kraften (*S*) fra kassen på klossen i bunnpunktet blir da gitt av: $S - mg = m\frac{v'^2}{r} = \frac{m}{r}\left(\tfrac{4}{3}v\right)^2$

Altså: $S = \tfrac{11}{3}mg$ og normalkraften fra bordet på kassen blir: $N = S + 3mg = \tfrac{20}{3}mg$

Oppgave 5

Tettheten kan skrives: $\rho = \rho_0 - kr$ der $k = \frac{\rho_0 - \rho_s}{R}$

Av $dm = \rho dV$ der $dV = 4\pi r^2 dr$ får vi massen til planeten:

$$M = \int_0^R (\rho_0 - kr)4\pi r^2 dr = \int_0^R (\rho_0 - \frac{\rho_0 - \rho_s}{R}r)4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3 - \frac{4\pi(\rho_0 - \rho_s)}{4R}R^4$$

Altså: $M = \pi R^3(\frac{\rho_0}{3} + \rho_s)$

Dermed får vi at tyngdeakselerasjonen på overflaten blir:

$$mg = \gamma\frac{mM}{R^2} \Rightarrow g = \gamma\pi R(\frac{\rho_0}{3} + \rho_s)$$

Oppgave 6

Spinnbevaring (både ballen og stangen):

$$lmv + I\omega = lmv_0 \Rightarrow \omega = \frac{3m}{lM}(v_0 - v) = 10{,}31\ \text{rad/s}$$

Tyngdepunktet til stangen vil heve seg en høyde *h*.

Energibevaring gir da:

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 = Mgh$$

Litt trigonometri gir:

$$\cos\theta = \frac{\frac{l}{2} - h}{\frac{l}{2}} \Rightarrow h = \tfrac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

Da blir: $\tfrac{1}{2} I\omega^2 = Mg\,\tfrac{l}{2}(1-\cos\theta)$

$$\cos\theta = 1 - \frac{I\omega^2}{Mgl} = 1 - \frac{\tfrac{1}{3}Ml^2\omega^2}{Mgl} = 1 - \frac{l\omega^2}{3g}$$

Som innsatt tall gir $\theta = 74^0$

Oppgave 7

Kule B har en vertikal akselerasjon som er *g* (vi ser bort fra luftmotstanden). Men det er ikke lett å beregne tiden pendelkula er i bevegelse. Men det vil være en kraft fra tråden på kula som vi ha en vertikal komponent. Derfor vil den vertikale akselerasjonen være mindre enn *g*, og kule A vil bruke lengst tid.

Oppgave 8

Stavens masse er *m* og kulas masse er *m*/4.

Spinn før støtet:

$$L_1 = \tfrac{l}{2} m_{kule} v = \tfrac{l}{8} mv$$

Spinn etter støtet:

$$L_2 = I\omega$$

Finner treghetsmomentet: $I = I_{stav} + I_{kule} = \dfrac{ml^2}{12} + m\left(\tfrac{l}{2}\right)^2 + \dfrac{m}{4}\left(\tfrac{l}{2}\right)^2$ (husk parallellakseteoremet)

Da blir $I = \tfrac{19}{48} ml^2$

Spinnet er bevart og vi får:

$$\tfrac{l}{8} mv = I\omega = \tfrac{19}{48} ml^2 \cdot \omega$$

Og vinkelfarten blir:

$$\omega = \frac{6v}{19l}$$

Oppgave 9

Vi får

$$m_1 g - S_1 = m_1 a$$

$$m_2 - S_2 = -m_2 a$$

Videre er $\tau = I\alpha$ og for trinsen er $I = \tfrac{1}{2} MR^2$

Siden snora ikke glir mot trinsen er $\alpha = \frac{a}{R}$

Det gir $S_1R - S_2R = I\alpha = \frac{MR^2a}{R}$

Altså: $S_1 - S_2 = \frac{1}{2}Ma$

Tre likninger som kan løses, og vi får

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}$$

Oppgave 10

Avstanden fra jorda til Lagrangepunktet er d og avstanden fra sola til Lagrangepunktet er $r = r_j - d$.

Hvis vi legger et legeme med massen *m* i Lagrangepunktet er tyngdekraften fra jorda

$F_j = \frac{GM_jm}{d^2}$ og fra sola $F_s = \frac{GM_sm}{r^2}$

Summen av disse må være lik sentripetalkraften:

$$F_s - F_j = mr\omega^2$$

Vinkelfarta må være den samme som for jorda hvis legemet skal beholde sin posisjon relativt til jorda. Det vil si at vi har

$\frac{GM_s}{r_j^2} = r_j\omega^2$ (tyngdekraften fra sola på jorda må være lik sentripetalkrafta som holder jorda i sirkelbanen). Vi har da likningen

$$\frac{GM_sm}{(r_j - d)^2} - \frac{GM_jm}{d^2} = (r_j - d)\frac{GM_sm}{r_j^3}$$

Vi bruker $y = \frac{d}{r_j}$ og at $r_j - d = r_j(1 - y)$

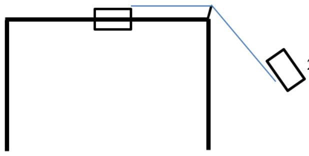
Da får vi (etter litt regning):

$$3y^3(1 - y + \frac{y^2}{3}) = \frac{M_j}{M_s}(1 - y)^2$$

y << 1 og dermed blir

$3y^3 = \frac{M_j}{M_s}$ og $d = yr_j = r_j \cdot \sqrt[3]{\frac{M_j}{3M_s}}$

Oppgave 11



Snordraget (*S*) er det samme for begge klossene. Horisontalkomponenten av snordraget på kloss 2 er mindre enn snordraget på kloss 1, og dermed vil kloss 1 ha størst akselerasjon horisontalt og treffe kanten først.

Oppgave 12

Kula har treghetsmoment $I = \alpha m r^2$ der $\alpha = \frac{2}{5}$.

Kinetisk energi blir: $E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\alpha m r^2 \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2(1+\alpha)$

Potensiell energi: $E_{pot} = mgR(1-\cos\theta)$ der θ er vinkelen mellom vertikalen og linjen fra sentrum av sylinderen og ut til kula.

Av dette får vi at $v^2 = \dfrac{2gR}{1+\alpha}(1-\cos\theta)$

Når kula forlater sylinderflaten er normalkraften fra sylinderflaten på kula null og dermed er:

$$mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R} = \frac{m}{R}\frac{2gR}{(1+\alpha)}(1-\cos\theta)$$

Da får vi med $\alpha = \frac{2}{5}$ at $\cos\theta = \dfrac{10}{17}$ som gir $\theta = 54^\circ$

Oppgave 13

Vi kaller vinkelen mellom stangen til kulen med massen 2*m* og vertikalen for *α*.
Kulene har størst fart i likevektspunktet.

$$2mgl\sin\alpha = mgl\cos\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26{,}6^0$$

Energibetraktninger gir da:

$$mgl = \tfrac{1}{2}(3m)v^2 + mg(l - l\sin\alpha) + 2mg(l - l\cos\alpha)$$

Innsatt $\alpha = 26{,}6^0$ og $l = 1{,}0\,\mathrm{m}$, får vi: $v = 1{,}2\,\mathrm{m/s}$

Oppgave 14

Bevaring av bevegelsesmengde: $m_p v_p = m_e v_e$

Total kinetisk energi: $E_{tot} = \frac{1}{2} m_e v_e^2 + \frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} m_p v_p^2 (1 + \frac{m_p}{m_e})$

Dermed blir

$$\frac{E_p}{E_{tot}} = \frac{1}{1+1836} = 5{,}4 \cdot 10^{-4} = 0{,}054\%$$

Kommentar: Vi hadde tenkt at denne oppgaven skulle regnes klassisk slik som vist over. Men som noen av finaledeltakerne helt riktig bemerket, får elektronet større fart enn lyset hvis vi regner klassisk. Relativistisk regning gir at protonet får 0,096 % av den kinetiske energien, altså nesten dobbelt så mye som den klassiske regningen gir, og da får også elektronet mindre fart enn lyset!

Oppgave 15

De to midterste kulene (B og C) støter mot hverandre og støtet er elastisk. Vi antar at selve støtprosessen er så rask at de andre kulene ikke rekker å bevege seg noe på denne tida. Da vil B få farten *v* mot venstre og C farten *v* mot høyre. A fortsetter mot høyre og D fortsetter mot venstre med farten *v*.

Etter en halv omdreining vil A og D ha rotert inn mot midten og støte sammen. Dette støtet er akkurat som det første, og kulene får samme fart, men i motsatt retning etter støtet. Ser vi nå på det øverste legemet har begge kulene (A og B) farten *v* mot høyre, og det stopper derfor å rotere, og massesenteret beveger seg med hastigheten *v* mot høyre. Tilsvarende vil det nederste legeme (C og D) bevege seg mot venstre uten rotasjon. Bevegelsen er altså akkurat lik den som var før de støtte sammen første gangen.

Oppgave 16

a) Spinnsatsen anvendes omkring opphengningspunktet (dreieaksen) A.

$$\tau = I\alpha$$

hvor *I* er treghetsmomentet om aksen A, og α er vinkelakselerasjonen. Kraftmomentet τ om dette punktet finner vi ut fra geometrien. Da følger:

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{mg\frac{l}{2}\sin\theta}{\frac{1}{3}ml^2} = \frac{3g\sin\theta}{2l}$$

b) Vi bruker nå energibevaring, og potensiell energi går over til kinetisk energi i form av rotasjonsenergi:

$$mg\tfrac{l}{2}\cos\theta = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3}ml^2\right)\omega^2$$

Og dermed er:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\cos\theta}{l}}$$

c) I laveste stilling vil vinkelakselerasjonen være lik null. Når vinkelakselerasjonen er null, er det ikke noe kraftmoment som virker omkring massesenteret, og kraften fra opphengningspunktet på stanga må være vertikal . Kraften langs stanga tilsvarer den vi har for en partikkel med masse *m* i enden av en snor med lengde *l*/2 som roterer i en sirkelbevegelse. Kraften *F* som virker fra stanga i opphengningspunktet blir da:

$$F = m\omega^2 \frac{l}{2} + mg = m\frac{3g\cos\theta}{l}\frac{l}{2} + mg = \frac{5mg}{2}$$

Oppgave 17

Effekten blir $P(v) = F \cdot v = k(u-v)^2 v$

$$\frac{dP(v)}{dv} = -2k(u-v)\cdot v + k(u-v)^2$$

som gir maksimalverdi for $v = \frac{u}{3}$

Dermed blir $P_{maks} = \frac{4}{27} k \cdot u^3$

Oppgave 18

Beregner de totale treghetsmomentene $I_{før}$ og I_{etter} (antar at plankens lengde er svært mye større enn bredden):

$$I_{før} = I_{planke} + 2\, I_{barn}^{før}$$

$$I_{før} = \frac{m_{planke}\ l^2}{12} + 2\, m_{barn}\ r_{barn}^2$$

$$I_{før} = \frac{10\ kg\ \cdot\ (2,6\ m)^2}{12} + 2\ \cdot 25\ kg\ \cdot (1,3\ m)^2$$

$I_{før} = 90\ kgm^2$

$$I_{etter} = I_{planke} + 2\, I_{barn}^{etter}$$

$$I_{etter} = \frac{10\ kg\ \cdot\ (2,6\ m)^2}{12} + 2\ \cdot 25\ kg\ \cdot (0,7\ m)^2$$

$I_{etter} = 30\ kgm^2$

Ingen ytre kraftmomenter betyr at spinnet bevares når barna flytter seg.

$$L_{før} = L_{etter}$$

$$I_{før}\,\omega_{før} = I_{etter}\omega_{etter}$$

$$\omega_{etter} = \frac{I_{før}\ \ \omega_{før}}{I_{etter}}$$

$$\omega_{etter} = \frac{90\ kgm^2 \cdot (\frac{20 \cdot 2\pi}{60\ s})}{30\ kgm^2}$$

Dermed får vi: $\omega_{etter} = \ 6{,}4\ s^{-1}$

Oppgave 19

Vi kaller normalkraften på en av kulene F_N, ringen har radien r, og ϑ angir posisjonen målt fra toppen.

Da får vi :

$$F_N + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{r}$$

$$F_N = m\frac{v^2}{r} - mg\cos\theta$$

og vertikalkomponenten blir:

$$F_{Ny} = F_N\cos\theta$$

Vi får da en vertikal kraft som virker oppover F_u på ringen fra de to kulene ($0 < \vartheta < \pi/2$).

$$F_u = 2F_{Ny}$$

$$F_u = 2m\cos\theta\left(\frac{v^2}{r} - g\cos\theta\right)$$

Videre gir energibevaring:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgr\,(1-\cos\theta)$$

$$\frac{v^2}{r} = 2g\,(1-\cos\theta)$$

som innsatt gir:

$$F_u = 2m\cos\theta\,(2g\,(1-\cos\theta) - g\cos\theta)$$

$$F_u = 2mg\left(2\cos\theta - 3\cos^2\theta\right)$$

Grensen for at ringen skal holde seg på underlaget hele tiden er at

$F_u \leq Mg$

Vi finner $F_{u(maks)}$ ved å derivere.

$$\frac{d}{d\theta}F_u = 2mg(2-6\cos\theta)(-\sin\theta)$$

Den deriverte blir lik null for $\cos\theta = \frac{1}{3}$, og:

$$F_{u(maks)} = \frac{2}{3}mg$$

Og betingelsen blir dermed:

$$\frac{m}{M} \leq \frac{3}{2}$$

Oppgave 20

Ved ekvator på planeten får vi at: $G - N = m\frac{v^2}{r}$

Altså: $\gamma\frac{mM}{r^2} - \frac{3}{4}mg_{jord} = m\frac{4\pi^2 r^2}{rT^2}$

Setter inn verdier og får:

T = 2,8 h

Oppgave 21

Kraften vi trenger er tyngden av vannvolumet tilsvarende klossens volum over vann.

Massen av fortrengt vann er lik massen av klossen.

$\frac{V_v}{V} = \frac{\rho}{\rho_v} = \frac{600\text{kg/m}^3}{1000\text{kg/m}^3} = 0{,}6$ og det betyr at 60 % av klossen er under vann og 40 % er over.

Da blir: $F = \rho_v V g = \rho_v \cdot 0{,}4\frac{m}{\rho}g = 6{,}5\text{N}$

Oppgave 22

Kraftstøtet er lik endring av bevegelsesmengde. Regner *x*- og *y*-retning hver for seg.

$$mv_x - 0 = R\Delta t$$

$$mv_y - mv_{y0} = (N - mg)\Delta t$$

der farten i *y*-retning rett før støtet er

$$v_{y0} = -\sqrt{2gh}$$

Videre er

$R = \mu N = \mu 2mg$

Det gir

$v_x = 2\mu g\Delta t$

$v_y = g\Delta t - \sqrt{2gh}$

$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{g\Delta t - \sqrt{2gh}}{2\mu g\Delta t}$

som gir

$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1}{1 - 2\mu\tan\theta}\right)$

Oppgave 23

Ingen ytre kraftmomenter virker på systemet gutt+karusell, og spinnet om karusellens rotasjonsakse må derfor være bevart. Spinnet var null før gutten begynte å gå, derfor må spinnet til hele systemet være null også mens han går langs kanten. Det betyr at karusellen må dreie *mot urviseren*. Vi betrakter gutten som et massepunkt i avstanden r = 2 m fra midten av karusellen. Da har han treghetsmomentet $I_{gutt} = mr^2$ og vinkelfarten $\omega_{gutt} = v/r$.

Vi beregner vinkelfarten til karusellen:

$$L_{gutt} = L_{karusell}$$

$$I_{gutt}\omega_{gutt} = I_{karusell}\omega_{karusell}$$

$$\omega_{karusell} = \frac{I_{gutt}\,\omega_{gutt}}{I_{karusell}}$$

$$\omega_{karusell} = \frac{m\,r^2\,\frac{v}{r}}{I_{karusell}}$$

$$\omega_{karusell} = \frac{40\,kg \cdot 2{,}0\,m \cdot\ 1{,}5\,{}^{m}/_{s}}{500\,kgm^2}$$

$$\omega_{karusell} = 0{,}24\ {}^{rad}/_{s}$$

Oppgave 24

a) Kulas tetthet finner vi av $\rho_k Vg = 0{,}7 \cdot V\rho_v g$ som gir $\rho_k = 0{,}7\,\mathrm{kg/dm^3}$

b) Vi kaller andelen av kulas volum som er under vannflaten for *x*. Da får vi:

$\rho_k Vg = xV\rho_v + (1-x)V\rho_{væske}$

Det gir x = 0,4

Oppgave 25

Vi starter med bevegelsen i *x*- og *y*-retning:

$$x = v \cdot \cos\theta \cdot \mathrm{t}$$

$$y = v \cdot \sin\theta \cdot t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

Dessuten er $r^2 = x^2 + y^2$

Oppgave 26

Snordraget *S* er den eneste kraften som gir kraftmoment på jo-jo'en, og kraftmomentet blir:

$$\tau = S \cdot r = I\alpha$$

$$S \cdot r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} m r \alpha$$

Newtons 2. lov for bevegelsen til massesenteret:

$$mg - S = ma$$

$$S = mg - ma$$

Setter de to uttrykkene for S lik hverandre, og setter inn sammenhengen mellom lineær akselerasjon og vinkelakselerasjon, *a* = ✔ *r*.

$$S = \frac{1}{2} m r \alpha = mg - ma$$

$$\frac{1}{2} r \left(\frac{a}{r} \right) = g - a$$

$$a = 2(g - a)$$

$$a = \frac{2g}{3}$$

Setter inn i uttrykket for snordraget:

$$S = mg - ma = mg - \frac{2mg}{3} = \frac{mg}{3}$$

Oppgave 27

Her får vi:

$$mg + S = ma = \frac{v^2}{r}$$

$S = 0$ og da blir $v = \sqrt{gr} \approx 2{,}2\,\mathrm{m/s}$

Oppgave 28

Kraften blir: $F = \lambda g(\frac{l}{4} - x)$

Og arbeidet: $W = \int_0^{\frac{l}{4}} F dx = \int_0^{\frac{l}{4}} \lambda g(\frac{l}{4} - x)dx = \lambda g \frac{l^2}{32}$

(Enklere hvis vi bare betrakter tyngdepunktets forflytning: $W = \lambda g \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{8} = \frac{\lambda g l^2}{32}$)

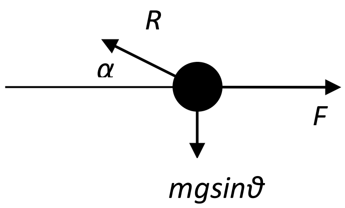
Oppgave 29

Normalt på skråplanet er: $N = mg\cos\theta$

Siden klossen akkurat skal til å gli, må friksjonen være maksimal, altså $R = \mu_s N$

Dermed har vi at $R = \mu_s mg\cos\theta$

Ser vi på kreftene parallelt med skråplanet, finner vi at:



$R\cos\alpha = F$ og at $R\sin\alpha = mg\sin\theta$

Altså:

$$F = mg\sin\theta \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = mg\sin\theta \cdot \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = mg\sin\theta\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1}$$

Dessuten er:

$$R = \frac{mg\sin\theta}{\sin\alpha} = \mu_s mg\cos\theta$$

Og herav:

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\mu_s\cos\theta}{\sin\theta}$$

Dermed får vi:

$$\underline{F = mg \cdot \sqrt{\mu_s^2\cos^2\theta - \sin^2\theta}}$$

Oppgave 30

Her blir:

$mg\sin\varphi - R = ma$ og $Rr = I\alpha = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \alpha$ (friksjonen *R* er den eneste kraften som gir moment om rotasjonsaksen)

Da blir:

$R = \frac{2}{5}ma$ og videre:

$mg\sin\varphi - \frac{2}{5}ma = ma$

Som gir:

$a = \frac{5}{7}g\sin\varphi$ og $R = \frac{2}{7}mg\sin\varphi$

Og til slutt:

$R = \mu mg\cos\varphi = \frac{2}{7}mg\sin\varphi$

Altså:

$\tan\varphi = \frac{7}{2}\mu$ som gir $\underline{\varphi = 60^o}$

Oppgave 31

Friksjonsarbeidet settes lik endring i potensiell energi:

$$W = \int_0^x \mu N dx = mg\cos\alpha \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kmg\cos\alpha \cdot x^2$$

Altså: $mg \cdot x\sin\alpha = \frac{1}{2}kmg \cdot \cos\alpha \cdot x^2 \Rightarrow x = \dfrac{2\tan\alpha}{k}$

Oppgave 32

Trepinnen vil begynne å svinge når oppdriftens moment om hengslingspunktet blir like stort som momentet fra gravitasjonskraften.

Gravitasjonskraftens moment blir: $M_1 = \dfrac{l}{2}mg\sin\alpha$

Oppdriftens moment virker i motsatt retning: $M_2 = 2mg\dfrac{x}{l}(l - \dfrac{x}{2})\sin\alpha$

Disse settes lik hverandre og gir: $x^2 - 2xl + \dfrac{l^2}{2} = 0$

Dermed blir: $x = l(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2})$

Oppgave 33

Bilen har gjennomsnittsfarten *v*/2 over en strekning på 1m.
Sjåføren har gjennomsnittsfarten *v* over en strekning på 2m.
Begge deler tar like lang tid.

Oppgave 34

Samlet treghetsmoment for barn og karusell =

$$I = \frac{1}{2}Mr^2 + mr^2 = r^2\left(\frac{M}{2} + m\right)$$

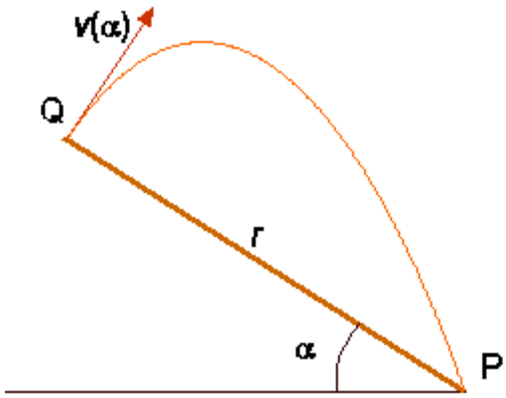
$$I\omega = mvr$$

$$\omega = \frac{mvr}{I}$$

Vi setter inn for *I* og får:

$$\omega = \frac{mvr}{r^2\left(\frac{M}{2} + m\right)} = \frac{mv}{r\left(\frac{M}{2} + m\right)} = \frac{30kg \cdot 3m/s}{1{,}2m(75kg + 30kg)} = 0{,}714\, s^{-1}$$

Oppgave 35



Kula følger sirkelbanen opp til et punkt *Q*, og derfra en parabelbane til *P*.
La $v(\alpha)$ være den farten som trengs i *Q* for at parabelbanen skal treffe *P*.
Vi legger origo i *Q* og *x*-aksen langs *QP* og får:

$$a_x = g\sin\alpha$$

$$a_y = g\cos\alpha$$

Veiloven i *y*-retningen gir:

$$0 = vt - \frac{1}{2}gt^2\cos\alpha \quad \Rightarrow$$

$$t = 0 \vee t = \frac{2v}{g\cos\alpha}$$

Veiloven i *x*-retningen gir da:

$$r = \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha = \frac{g\sin\alpha \cdot 4(v(\alpha))^2}{2g^2\cos^2(\alpha)}$$

$$v(\alpha) = \cos\alpha\sqrt{\frac{rg}{2\sin\alpha}}$$

Null snordrag idet sentripetalakselerasjonen er lik tyngdeakselerasjonens komponent langs QP:

$$\frac{v(\alpha)^2}{r} = g\sin\alpha$$

$$v(\alpha) = \sqrt{rg\sin\alpha}$$

Vi setter de to uttrykkene for $v(\alpha)$ lik hverandre og får

$$rg\sin\alpha_0 = rg\frac{\cos^2\alpha_0}{2\sin\alpha_0}$$
$$3\sin^2\alpha_0 = 1$$
$$\sin\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

α_0 er vinkelen der snordraget blir 0, og der parabelbanen begynner.

Vi finner startfarten *v* som trengs for at farten i høyden $r + r\sin\alpha_0$ skal bli $v(\alpha_0)$:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(r + r\sin\alpha_0) + \frac{1}{2}m\cdot v(\alpha_0)^2$$
$$v^2 = 2gr + 2gr\sin\alpha_0 + rg\sin\alpha_0$$
$$v^2 = rg(2 + \frac{3}{\sqrt{3}}) = rg(2+\sqrt{3})$$
$$v = \sqrt{rg(2+\sqrt{3})}$$

Oppgave 36

Vi gjør et overslag:
Gjennomsnittsfarten er $\bar{v} = 0{,}5$ m/s.

Det betyr at startfarten kan maksimalt være $v_o = 2\cdot\bar{v} = 1$m/s. (Sluttfarten er større enn null).

Akselerasjonen kan maksimalt være: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0{,}5$ m/s^2 .

Videre får vi: $\mu mg = ma$ og altså: $a = \mu g$ der vi setter *g* = 10 m/s^2.

Det vil si:

$\mu = \frac{0{,}5}{10} = 0{,}05$ som er en liten friksjonskoeffisient, og det er rimelig å anta at legemet har hjul!

Oppgave 37

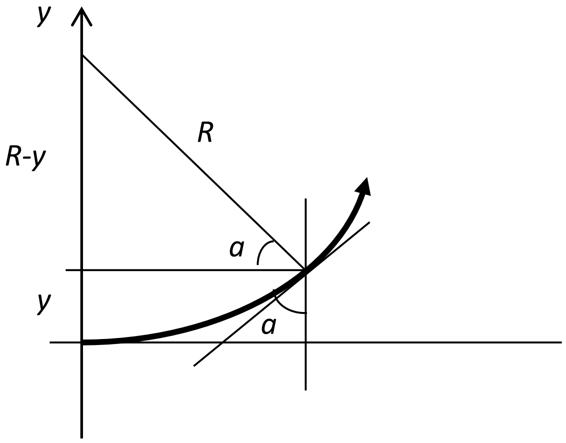
Snells brytningslov gir:

$$n_0\sin a_0 = n_1\sin a_1 = n_2\sin a_2 = n(y)\sin a$$

Det starter med $a_0 \approx 90^0$

Det vil si: $n(y)\sin a = n_0$

Av figuren ser vi at



$\sin a = \dfrac{R-y}{R}$ og dermed er $\underline{n(y) = \dfrac{n_0 R}{R-y}}$

Oppgave 38

Systemet vårt består av de to platene. Det virker ingen ytre kraftmoment på systemet under sammenkoblingen, og spinnet må dermed være bevart.

Totalt spinn før sammenkobling:

$$L_{tot} = I_1\omega_1 + I_2\omega_2$$

$$L_{tot} = \tfrac{1}{2} m_1 r^2 \cdot \omega_1 + \tfrac{1}{6} m_2 a^2 \cdot \omega_2$$

$\underline{L_{tot} = \ 8{,}4 \text{ kgm}^2/\text{s}}$

Totalt treghetsmoment etter sammenkoblingen:

$I_{tot} = I_1 + I_2$

$\underline{I_{tot} = 0{,}435 \text{ kgm}^2}$

Vinkelhastighet etter sammenkoblingen:

$\omega = L_{tot} / I_{tot} = \underline{19{,}3 \text{ rad/s}}$

Rotasjonskinetisk energi **før** sammenkobling:

$E_{kin\,(FØR)} = 1/2\ I_1\ \omega_1^2 + 1/2\ I_2\ \omega_2^2$

$\underline{E_{kin\,(FØR)} = 123 \text{ J}}$

Rotasjonskinetisk energi **etter** sammenkobling:

$E_{kin\,(ETTER)} = 1/2\ I_{tot}\ \omega^2$

$\underline{E_{kin\,(ETTER)} = 81 \text{ J}}$

Andel kinetisk energi som er tapt:

$$\frac{E_{kin(FØR)} - E_{kin(ETTER)}}{E_{kin(FØR)}} = 0{,}34$$

<u>Systemet taper altså 34 % av den kinetiske energien ved sammenkoblingen.</u>

Oppgave 39

Ved likevekt:

$$f_1 = kx_1 = F_1$$

der f_1 er kraften fra fjæra på den underste klossen og F_1 kraften fra fjæra på den øverste klossen. Hvis klossene er forskjøvet en avstand x mot høyre i figuren, uten at de har sklidd i forhold til hverandre, får vi:

$f = f_1 - kx = kx_1 - kx$ og

$F = F_1 + 3k = kx_1 + 3kx$

Newtons 2. lov: $f - F = 2ma$ som gir:

$$a = -\frac{2kx}{m}$$

For den underste klossen får vi: $kx_1 - kx - \mu N = ma$

Og for maksimalt utslag, A, blir:

$$kx_1 - kA - \mu mg = ma = m(-\frac{2kx}{m})$$

Altså: $\underline{A = \frac{\mu mg}{k} - x_1}$

Elektromagnetisme

Oppgave 1

Newtons 2. lov gir

$$mg\sin\alpha - ilB = ma$$

Ladningen på kondensatoren finner vi av

$$Q = CU = CBlv$$

Strømmen i kretsen er en funksjon av tiden, og vi får

$$i = \frac{dQ}{dt} = CBl\frac{dv}{dt} = CBla$$

Da blir

$$mg\sin\alpha - CBla \cdot lB = ma$$

Dette gir

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + CB^2l^2}$$

Oppgave 2

Elektronene beveger seg i en vannrett sirkel, og de får en kraft i *z*-retning på grunn av den radielle komponenten av magnetfeltet. Kraften blir:

$$F_z = qvB_r$$

For at elektronene skal gå i en vannrett sirkel må

$$F_z = qvB_r = mg$$

Og vi får

$qv\dfrac{B_0}{2z_m}r = mg$ som gir $r = \dfrac{2z_m \cdot mg}{qvB_0}$

Kraften i radiell retning får vi av:

$$F_r = qvB_z = m\frac{v^2}{r}$$

Finner *z* av

$qvB_0(1 - \dfrac{z}{z_m}) = m\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{mv^2qvB_0}{2z_m mg}$ som gir

$$z = z_m - \frac{v^2}{2g}$$

Oppgave 3

Den totale resistansen er $\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{R_N}$

Hvis R_1 er minst blir $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{R_N} > \frac{1}{R_1}$

Altså er $\frac{1}{R_{tot}} > \frac{1}{R_1} \Rightarrow R_{tot} < R_1$

Oppgave 4

B-feltet står normalt på farten. Det er bare *E*-feltet som gir endring av kinetisk energi.
Da har vi:

$$qEy_T = \tfrac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qEy_T}{m}} = \sqrt{\frac{2qER}{2m}}$$

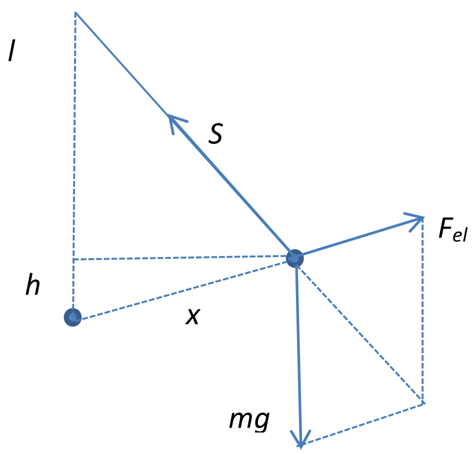
Kreftene i toppunktet:

$$qE - qvB = -m\frac{v^2}{R} = -\frac{m}{R}\frac{2qER}{2m} = -qE$$

Altså:

$$v = \frac{2E}{B}$$

Oppgave 5



På figuren er kreftene som virker på kule A i den nye posisjonen tegnet.

Her er $F_{el} = k\frac{qQ}{x^2}$

S er snorkraften og *mg* er tyngden. Vi kaller lengden av pendelsnoren *l*.

Den elektriske potensielle energien er gitt av $E_{el} = k\dfrac{qQ}{x}$ og potensiell energi i tyngdefeltet er *mgh*.

Av figuren ser vi at på grunn av formlike trekanter får vi:

$$\frac{l}{x} = \frac{mg}{F_{el}} \quad \text{og} \quad \frac{h}{x} = \frac{\frac{x}{2}}{l}$$

Da blir $x = \dfrac{kqQ}{2mgh}$ som gir $E_{el} = k\dfrac{qQ}{\dfrac{kqQ}{2mgh}} = 2mgh$

Dermed blir arbeidet $W = 2mgh + mgh = 3mgh$

Oppgave 6

Impedansen blir: $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{180^2 + (0{,}096 \cdot 2500)^2}\,\Omega = 300\,\Omega$

Og spenningen: $U_0 = ZI_0 = 120\,\text{V}$

Oppgave 7

Akselerasjonen i *x*-retning på grunn av det elektriske feltet er: $a = \dfrac{qE}{m}$

I *x*-retning: $x = vt\cos\alpha + \dfrac{qE}{2m}t^2$

I *y*-retning: $y = vt\sin\alpha - \dfrac{g}{2}t^2$

$y = 0$ gir:

$$t = \frac{2v\sin\alpha}{g}$$

Da får vi: $x = v\dfrac{2v\sin\alpha}{g}\cos\alpha + \dfrac{qE}{2m}\left(\dfrac{2v\sin\alpha}{g}\right)^2$

$$x = \frac{v^2}{g}\left(\sin 2\alpha + \frac{qE}{mg}(1 - \cos 2\alpha\right)$$

Deriverer og setter den deriverte lik null:

$$x' = \frac{v^2}{g}\left(2\cos 2\alpha + \frac{qE}{mg}2\sin 2\alpha\right) = 0$$

Som gir: $\cos 2\alpha + \dfrac{qE}{mg}\sin 2\alpha = 0$ og dermed $\tan 2\alpha = -\dfrac{mg}{qE}$

(Legg merke til at minustegnet viser at vinkelen 2*α* må være større enn 90^0 og dermed at $\alpha > 45^0$.

Oppgave 8

Symmetri gir:

$$R_{tot} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5R}{6} = \frac{5}{6}\Omega$$

Oppgave 9

Amperes lov gir bare bidrag på langs inne i spolen (symmetri).

$\int_a^b Bdl = BL$ og dermed blir $BL = \mu_0 I_{encl} = \mu_0 nLI$ og $B = \mu_0 nI$

Oppgave 10

Kule C har farten v_1 og kulene A og B v_2. Bevaring av bevegelsesmengde (positiv retning mot høyre på figuren):

$$-mv_1 + 2mv_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{2}$$

Farten v_1 må være størst midt mellom A og B. Etter det vil det være en netto kraft mot høyre.
Energibevaring gir:

$$k\frac{q^2}{3x} + k\frac{q^2}{x} = \tfrac{1}{2}mv_{1maks}^2 + \tfrac{1}{2}(2m)v_2^2 + 2k\frac{q^2}{2x}$$

Dette gir maksimal fart:

$$v_{1maks} = \frac{2q}{3}\sqrt{\frac{k}{mx}}$$

Oppgave 11

Vi får:

$$\frac{P_a}{P_e} = \frac{\varepsilon_1 I}{\varepsilon_1 I - \varepsilon_2 I} = 3$$

Alternativ løsning:
Strømmen i kretsen:

$$\varepsilon_1 - RI - \varepsilon_2 - r_2 I - r_1 I = 0$$

Det gir $I = 0{,}40\,\mathrm{A}$

Avgitt effekt: $P_a = \varepsilon_1 I = 4{,}8\,\mathrm{W}$

I motstandene er $P_e = (r_1 + r_2 + R)I^2 = 1{,}6\,\mathrm{W}$

Forholdet blir $\frac{P_a}{P_e} = 3$

Oppgave 12

Siden massen til positronene er mye mindre enn massen til protonene vil de akselerere mye raskere. Derfor kan vi regne protonene som i ro når vi ser på bevegelsen til positronene.

Potensiell energi er gitt av $E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r}$

Vi setter $\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} = k$ og får at den totale potensielle energien i startposisjonen er:

$E_{p1} = \frac{4k}{r} + \frac{2k}{r\sqrt{2}}$ (fire kanter og to diagonaler).

Når positronene er kommet uendelig langt unna er

$$E_{p2} = \frac{k}{r\sqrt{2}}$$

Det betyr at den kinetiske energien til ett positron er

$$E_{kin,pos} = \frac{1}{2}\left(E_{p1} - E_{p2}\right) = \frac{2k}{r} + \frac{k}{2r\sqrt{2}}$$

Protonene begynner så å bevege seg og hver av dem får til slutt kinetisk energi

$$E_{kin,prot} = \frac{k}{2r\sqrt{2}}$$

Forholdet blir da $\dfrac{\frac{2k}{r} + \frac{k}{2r\sqrt{2}}}{\frac{k}{2r\sqrt{2}}} = 4\sqrt{2} + 1$ (eller omtrent 6,7).

Oppgave 13

Effekten skal halveres. Siden $P = RI^2$ må da strømmen gjennom lampen bli $I_1 = \frac{I}{\sqrt{2}}$

og $Z = R \cdot \sqrt{2}$

Resistansen i lampen er: $R = \frac{U^2}{P} = 484\,\Omega$

Da blir:

$Z^2 = (2\pi f \cdot L)^2 + R^2$ som innsatt verdier gir $L = 1{,}54\ \mathrm{H}$

Oppgave 14

Strømmen gjennom 12 Ω: 9 V - 6 V = $12I_1$, altså I_1 = 0,25 A
Strømmen gjennom 18 Ω: 9 V = $18I_2$, altså I_2 = 0,5 A
Strømmen gjennom 9 V batteriet: I = 0,75 A

Oppgave 15

Maks strøm får vi ved resonans.

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L} = 44\mu F \qquad (2\pi f = \omega)$$

Ved resonans er *Z* = *R*.
Da er

$$I_{maks} = \frac{U}{R} = 0{,}30\,\text{A og } U_L = I\omega L = 136\,\text{V}$$

Oppgave 16

Siden rekken av motstander er uendelig lang, kan vi betrakte hele kretsen som bestående av to motstander i serie med en parallellkopling av *R* og R_T (resten av kretsen er også uendelig).
Da får vi:

$$R_T = 2R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_T}\right)^{-1}$$

$$R_T^2 - 2R_T - 2 = 0$$

Og vi får: $R_T = (1+\sqrt{3})\,\Omega$

Oppgave 17

q og *Q* har motsatte fortegn.

Ladningstettheten i området er $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

Ladningen innenfor radien *r*: $q = Q\dfrac{r^3}{R^3}$

Gauss lov gir:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{r^3}{R^3}$$

$$E = \frac{\rho \cdot r}{3\varepsilon_o}$$

Potensialforskjellen mellom sentrum og overflaten av det ladede området:

$\Delta U = \int_0^R E dr$ som gir

$\Delta U = \dfrac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}$

Da blir $K_0 = q \cdot \Delta U = \dfrac{qQ}{8\pi R\varepsilon_0}$

Oppgave 18

I avstand *r* gir Gauss lov:

$EA = \frac{Q}{\epsilon_0}$ som gir $Q = E4\pi r^2\epsilon_0$

Ladningen er jevnt fordelt: $\frac{Q}{V} = \frac{3\epsilon_0 Er^2}{R^3}$

I avstand *a*:

$$E_a = \frac{QV_a}{V\varepsilon_0 A_a} = \frac{Er^2 a}{R^3}$$

Oppgave 19

Den magnetiske kraften står hele tiden normalt på farten og gjør dermed ikke arbeid. Det er altså bare den elektriske kraften som gjør arbeid. Avstanden mellom partiklene er 2*x*. Da får vi at endring av kinetisk energi er lik arbeidet samtlige krefter gjør.

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 = \int_{-L/2}^{-x} F \cdot dx = \int_{-L/2}^{-x} \frac{kq^2}{4x^2}dx = \frac{kq^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{L}\right)$$

Farten blir: $v = \sqrt{\dfrac{kq^2}{2m}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{L}\right)}$

Oppgave 20

For *x* = *R*/2 får vi av Gauss lov:

$$E_1 \cdot 4\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{Q\left(\frac{R}{2}\right)^3}{\varepsilon_0 R^3} \quad \text{og} \quad E_2 \cdot 4\pi\left(\frac{3R}{2}\right)^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Da blir $E = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2} - \dfrac{Q}{9\pi\varepsilon_0 R^2} = \dfrac{Q}{72\pi\varepsilon_0 R^2}$

For *x* = *R* blir *E* = 0

Oppgave 21

a) Spenningen over kondensatoren: $U_C = X_C I$

Totale spenning: $U = ZI$

Som gir: $Z = \frac{UX_C}{U_C} = \underline{160\,\Omega}$

b) X_L finner vi av: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

Innsatt tall blir $\underline{X_L = 619\,\Omega}$ eller $\underline{X_L = 341\,\Omega}$ (altså to muligheter!!)

c) Den induktive reaktansen kan være større eller mindre enn den kapasitive, men absoluttverdien av differansen kan bli lik i begge tilfeller. Dermed to muligheter.

d) Finner $C = \frac{1}{\omega X_C} = 6{,}6$ μF og

$L = \frac{X_L}{\omega} = 1{,}1$ H

Dermed blir $\omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 371$ rad/s eller $f_{res} = \frac{\omega}{2\pi} = 59$ Hz

Oppgave 22

Opprinnelig kraft mellom de to kulene: $F = k\frac{q^2}{x^2}$

Ny kraft blir: $F_2 = k\frac{\frac{q}{2}\cdot\frac{3q}{4}}{x^2} = \frac{3F}{8}$

Oppgave 23

Strømtettheten er gitt av: $J = \frac{I}{\pi(3r)^2 - \pi r^2} = \frac{I}{8\pi r^2}$

Strømmen innenfor radien 2*r* blir da: $I' = \frac{I \cdot 3\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{3I}{8}$

I avstand 2*r* får vi av Ampéres lov:

$$B \cdot 2\pi \cdot 2r = \mu_0 \frac{3I}{8} \Rightarrow B = \frac{3\mu_0 I}{32\pi r}$$

Avstanden *x* finner vi da av: $B \cdot 2\pi x = \mu_0 I \Rightarrow x = \frac{16r}{3}$

Oppgave 24

I det øyeblikket staven begynner å gli er:

$F = IlB$ og $I = \frac{U_0}{R}$

Det gir: $a = \frac{F}{m} = \frac{lBU_0}{mR}$

Farten og indusert spenning øker, slik at strømmen avtar. Ladningen på kondensatoren avtar også, men får en minimumsverdi når spenningen over kondensatoren er lik den induserte spenningen. Da har staven fått sin maksimale fart.

Vi får spenningen: $v_{\max} lB = U = \frac{Q_{\min}}{C}$ og dermed $Q_{\min} = v_{\max} lBC$

Og videre: $IlB = ma$ som gir

$$-\frac{dQ}{dt} lB = m\frac{dv}{dt}$$

$$lB(Q_0 - Q_{\min}) = mv_{\max}$$

Her er $Q_0 = CU_0$ der U_0 er spenningen i startøyeblikket.

Altså blir: $v_{\max} = \frac{lBCU_0}{m + l^2B^2C}$

Oppgave 25

Ladningen i kuleskallet i avstand *r* fra kulesenteret:

$$Q = \int_a^r \frac{k}{r} 4\pi r^2 dr = 2\pi k(r^2 - a^2)$$

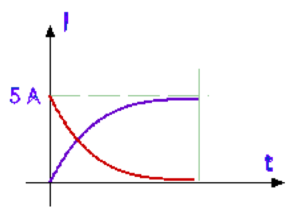
E-feltet skal være konstant i skallet, altså lik verdien ved innerveggen av skallet.
Med Gaussflate i avstand *r* blir:

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

Herav fåes at $k = \frac{q}{2\pi a^2}$

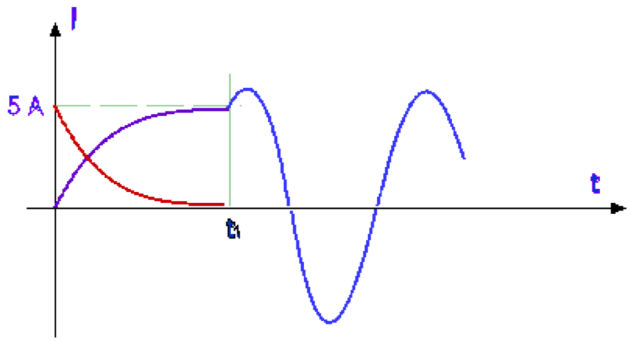
Oppgave 26

a) Kondensator: rød linje, Spole: Blå linje



b) $I_{\max} = \frac{U}{R} = \frac{20}{4} A = 5{,}0 A$

c) Spolestrømmen fortsetter å øke til energien i kondensatoren er overført til spolen.



Oppgave 27

Newton: $F = m\dfrac{dv}{dt}$

Her er også $F = IlB$ og $\varepsilon = vBl$

Vi får da $I = \dfrac{\varepsilon}{R} = \dfrac{vBl}{R}$ og $F = IlB = \dfrac{vB^2l^2}{R} = m\dfrac{dv}{dt}$

Staven glir en avstand *x* før den stopper, der $x = \int vdt$

Dermed får vi: $x = \int vdt = \int \dfrac{mR}{B^2l^2}dv$ som gir $\underline{x = \dfrac{mRv_0}{B^2l^2}}$

Termofysikk

Oppgave 1

Tilført varme når isen smelter: $Q = mL = 5{,}34 \cdot 10^4 \text{ J}$

Det er den samme varmen som avgis fra det kokende vannet.
Og da blir endringen i entropi for det kokende vannet (ved konstant temperatur):

$$\Delta S_1 = \frac{Q}{T} = \frac{-5{,}34 \cdot 10^4}{373} \text{ J/K} = -143 \text{ J/K}$$

For is-vann blandingen får vi

$$\Delta S_2 = \frac{Q}{T} = \frac{5{,}34 \cdot 10^4}{273} \text{ J/K} = 196 \text{ J/K}$$

Selve stangen er isolert og dermed blir det ingen entropiendring i den.
Den totale entropiendringen blir dermed:

$$\Delta S_{tot} = -143 \text{ J/K} + 196 \text{ J/K} = 53 \text{ J/K}$$

Oppgave 2

Ballongen sprekker når $V_1 = 1{,}1 \cdot V_0$. Trykket er da gitt av adiabatligningen der γ = 5/3 for helium:

$p_0 V_0^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma}$ Det vil si $p_1 = \left(\frac{1{,}1 \cdot V_0}{V_0}\right)^{\frac{5}{3}} \cdot p_0 = 0{,}85 \cdot p_0$

$$\frac{p_0}{p_1} = e^{\frac{-Mg}{RT_0} \cdot y}$$

altså er

$\ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right) = -\frac{Mg}{RT_0} \cdot y$ som gir $y = -\ln(0{,}85) \cdot \frac{RT_0}{Mg} = 1{,}3 \cdot 10^3 \text{ m}$

Oppgave 3

27 ^{0}C = 300 K

Temperaturen etter sammenpressingen: $\frac{V}{T_1} = \frac{\frac{V}{2}}{T_2}$ som gir $T_2 = \frac{1}{2} T_1 = 150 \text{ K}$

Etter adiabatisk ekspansjon: $T_2 \left(\frac{V}{2}\right)^{\gamma - 1} = T_3 V^{\gamma - 1}$ som gir $T_3 = 114 \text{ K}$ (-159 ^{0}C)

Og trykket finner vi av: $p_2\left(\frac{V}{2}\right)^{\gamma} = p_3V^{\gamma}$ som gir $p_3 = p_2(\frac{1}{2})^{\gamma} = 68\,\text{kPa}$

Oppgave 4

a) T= konstant, altså er $\Delta U = 0$
b) $Q = 0$, altså er $\Delta U = -300$ J
c) Ved konstant trykk er:

$$Q = nC_p\Delta T = n\frac{5}{2}R\cdot\Delta T$$

Dessuten er $W = p\Delta V = nR\cdot\Delta T = 300\,\text{J} \Rightarrow \text{nR} = \frac{300\,\text{J}}{\Delta T}$

Da blir $Q = \frac{5}{2}\cdot\frac{300\,\text{J}}{\Delta T}\cdot\Delta T = 750\,\text{J}$ og $\Delta U = 450$ J

Oppgave 5

Vi får:

$$Q_{1-2} = nC_V\Delta T_{1-2}$$
$$Q_{2-3} = 0$$
$$Q_{3-1} = -nC_p\Delta T_{3-1}$$

$C_V = \frac{3}{2}R$ og $C_p = \frac{5}{2}R$ $(C_p = C_V + R)$

Vi trenger *V_3 og T_3*

For den adiabatiske prosessen har vi $pV^{\gamma} = \text{konstant}$ og for enatomig idealgass er $\gamma = 5/3$.

$$\frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$\frac{32p_0}{p_0} = \left(\frac{V_3}{V_0}\right)^{\frac{5}{3}}$ som gir $V_3 = 8V_0$

Videre er $\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_3}{T_3}$ som gir $T_3 = 8T_0$

$$Q = n\frac{3}{2}R\cdot 31T_0 - n\frac{5}{2}R\cdot 7T_0$$

som kombinert med $\frac{p_0V_0}{T_0} = nR$ gir $Q = 29p_0V_0$

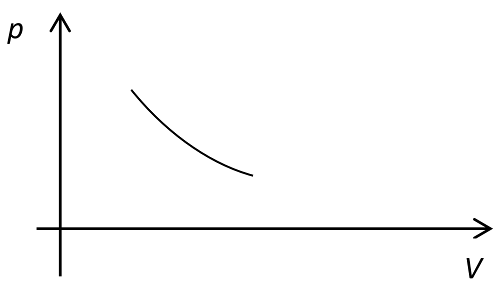
Oppgave 6

Oppvarming under konstant volum gir en temperaturøkning:
$Q = nC_V \Delta T$ som gir $\Delta T = 293$ K
Altså er $T_2 = 586$ K.
Volumet blir dobbelt så stort under konstant trykk prosessen:

$$\frac{p_2 V}{T_2} = \frac{p_2 2V}{T_3}$$

som gir $T_3 = 2T_2 = 1173$ K
Ved konstant volum prosessen er $\Delta U_1 = Q_1 = 1{,}52 \cdot 10^4$ J
Ved konstant trykk prosessen er $\Delta U_2 = Q_2 - W \quad (\text{der } W > 0)$
Vi får $Q_2 = nC_P \Delta T$ der $\Delta T = T_3 - T_2 = 586$ K
Altså er $Q_2 = 4{,}26 \cdot 10^4$ J
Videre er $W = p_2 \Delta V = p_2(2V - V) = p_2 V$
Det konstante trykket (p_2), finner vi av: $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$ som gir $p_2 = 2p_1$
$V = \frac{nRT_1}{p_1}$ og da blir $= 2p_1 \frac{nRT_1}{p_1} = 1{,}22 \cdot 10^4$ J
Det vil si: $\Delta U = 1{,}52 \cdot 10^4 \text{ J} + 4{,}26 \cdot 10^4 \text{ J} - 1{,}22 \cdot 10^4 \text{ J} = 4{,}57 \cdot 10^4$ J

Oppgave 7



For en adiabatisk ekspansjon er $Q = 0$ J.
Dermed blir:

$$\Delta U = -W = -nC_V \Delta T = -1{,}4 \text{ kJ}$$

For en reversibel adiabatisk prosess er $Q = 0$ J og dermed er $\Delta S = 0$ J/K

Oppgave 8

Entropiendringen for vannet vi heller:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = cm \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = cm \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Som innsatt tall gir $\Delta S = -1043$ J/K

Vannet i innsjøen endrer ikke temperatur, og entropiendringen blir følgelig:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{cm\Delta T}{T}$$

Som innsatt tall gir: Δ*S* = 1184 J/K
Total endring av entropi blir dermed:
<u>Δ*S* = 141 J/K</u>

Oppgave 9

Isen smelter, og smeltevannet varmes opp til 20 ^{0}C.
Vannet i innsjøen holder konstant temperatur.
Setter
T_0= 273 K
T_{slutt} = 293 K
Når isen smelter ved konstant temperatur får vi

$$\Delta S_1 = \frac{Q}{T_0} = \frac{m_{is} l}{T_0} = 1223 \text{J/K}$$

Og når smeltevannet varmes opp:

$$\Delta S_2 = \int_{T_0}^{T_{slutt}} \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_{slutt}} \frac{m_{is} c}{T} dT = m_{is} c \ln \frac{T_{slutt}}{T_0} = 297 \text{J/K}$$

Innsjøen endrer ikke temperatur, og entropiendringen blir:

$$\Delta S_3 = \frac{m_{is} l + c m_{is} \Delta T}{T_{slutt}} = -1427 \text{J/K}$$

Da blir

$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$ og innsatt verdier får vi da:

$$\Delta S = 93 \text{J/K}$$

Oppgave 10

Vi har:

$$Q = \Delta U + W$$

Arbeidet er arealet under grafen: $W = -1{,}8 \cdot 10^5 \,\text{J}$ (arbeid på gassen)

Endring av indre energi (bare avhengig av temperaturendringen):

$$\Delta U = nC_V \Delta T = \tfrac{3}{2} nR\Delta T$$

Vi finner endringen av temperaturen av tilstandsligningen:

$pV = nRT \Rightarrow \Delta T = \dfrac{1}{nR}(p_b V_b - p_a V_a) = -480\,\text{K}$ (temperaturen synker)

Da blir:

$\Delta U = \frac{3}{2} nR\Delta T = -6{,}0 \cdot 10^5 \text{ J}$

Altså: $Q = \Delta U + W = -7{,}8 \cdot 10^5 \text{ J}$

(Det går varme ut av systemet)

Oppgave 11

Vi har at $W = p\Delta V = 300\text{J}$

Videre finner vi at $T_2 = 2T_1$ og at $V_2 = 2V_1$

Da blir $p(V_2 - V_1) = W \Rightarrow V_1 = \dfrac{W}{p}$

Og av

$pV = nRT$ får vi at $T_1 = \dfrac{W}{nR}$

$Q = nC_p\Delta T = nC_p \cdot T_1 = n\dfrac{5R \cdot W}{2nR}$

Altså er Q = 750 J

Og dermed er $\Delta U = Q - W = 450\text{J}$

Oppgave 12

Sett: *k* = fjærkonstanten
p = gasstrykket ved temperaturen *T*
P = gasstrykket ved temperaturen 2*T*
A = stemplets areal
H = Stemplets høyde over bunnen ved temperaturen 2*T*

For å holde stemplet i høyden *h* over den første likevektstillingen, trengs en kraft lik *kh* som må være lik trykkrafta fra gassen. Dette gir:

$kh = pA$ når temperaturen er *T, og*

$kH = PA$ når temperaturen er 2*T*.

Tilstandslikningen for en ideal gass gir:

$$\frac{pAh}{T} = \frac{PAH}{2T}$$
$$\Downarrow$$
$$P = \frac{2ph}{H}$$

som vi setter inn ovenfor:

$$kH = \frac{2ph}{H}A \;\Rightarrow\; kH^2 = 2pAh \;\Rightarrow\; kH^2 = 2kh^2 \;\Rightarrow\; H = \sqrt{2}\,h$$

Oppgave 13

a) $dW = PdV$ og $PV = nRT$ gir etter integrasjon: $W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV$

Vi får:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V} dV + \int_{V}^{V_1} \frac{nRT_1}{V} dV = nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{T_1}{V} - \frac{T_2}{V} dV$$

$$W = nR(T_1 - T_2) \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nR(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}$$

b) $Q_{ab} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$ Inn

$Q_{bc} = C_V (T_1 - T_2)$ Ut

$Q_{cd} = RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$ Ut

$Q_{de} = C_V (T_1 - T_2)$ Inn

Oppgave 14

Vi finner temperaturen etter at vannet har blandet seg:

$m_1 c(T - T_C) = m_2 c(T_H - T)$ som gir T = 333 K

Endringen i entropi:

$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$ der $dQ = mc \cdot dT$, altså $\Delta S = \int_{T1}^{T2} \frac{mc \cdot dT}{T} = mc \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$

Her blir:

$$\Delta S = m_1 c \ln \frac{T}{T_C} + m_2 c \ln \frac{T}{T_H}$$

$$\underline{\Delta S = 47{,}4 \text{ J/K}}$$

Noen utvalgte internasjonale finaleoppgaver

IPhO 2016

Løsninger finnes her:
http://www.ipho2016.org/webcontent/exams/theory/T1-S_Solution_marking_scheme.pdf
http://www.ipho2016.org/webcontent/exams/theory/T2-S_Solution_marking_scheme.pdf
http://www.ipho2016.org/webcontent/exams/theory/T3-S_Solution_marking_scheme.pdf

IPhO 2015

http://www.ipho2015.in/questions-and-solutions/