

# Differensialligninger

©Halvor Aarnes 2006. Sist oppdatert 11.03.2010

## Innholdsfortegnelse

Innledning.....	2
Dynamiske modeller .....	17
Differensialligninger .....	24
Ekspensialfunksjon og eksponensiell vekst .....	25
Logistisk ligning og logistisk vekst.....	32
Sirkulær bevegelse .....	40
Lotka-Volterra ligningen.....	42
Kaos og Lorenz-ligningene .....	59
Rössler.....	63
Enkel kaotisk flyt .....	65
Nosé-Hoover oscillator .....	67
Rucklidge .....	69
Thomas labyrinthkaos .....	71
Hopf bifurkasjon .....	73
van der Pol.....	74
Hénon-Heiles.....	77
Chen og Ueta.....	78
Thomas .....	80
Boldrighini & Francheshini.....	81
Hadley sirkulasjon.....	84
Halvorsen .....	85
Rabinovich-Fabrikant.....	87
WINDMI .....	88
Moore-Spiegel.....	89
ACT.....	91
Dissipative avbildninger.....	93
Hénon-avbildning.....	93
Burgers avbildning .....	94
Lozi avbildning .....	95
Ingefærbrødmann avbildning .....	96
Predator-byttedyr.....	97
Sinai.....	98
Lorenz symplektisk 3D .....	99

Stabilitet og likevektspunkter .....	101
Boksmodeller .....	106
Ressurs-konsumentmodell .....	106
Epidemiologisk modell .....	107
Todimensjonale likevekter .....	116
Differensialligninger i 3 dimensjoner .....	128
Andre ordens reaksjon.....	132
Grafisk framstilling av løøsning av differensialligninger .....	135
3D-torus.....	145
Stabilitet og bifurkasjon .....	153
Ressurskonkurransen og alternative stabile stadier.....	153
Diffusjon.....	193
Fouriers varmelov .....	196
Vekstkurver med kaos .....	199
Differensialligninger med tidsforsinkelse .....	203
Stokastiske differensialligninger .....	214

## Innledning

**Gottfried Leibniz** (1646-1716),



**Isaac Newton** (1642-1727),



**Leonhard Euler** (1707-1782)



og **Johann Bernoulli** (1667-1748) var de første som på begynnelsen av 1700-tallet løste enkle differensialligninger.

**J.L Lagrange** (1736–1813)



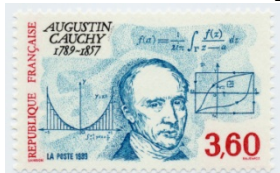
og **Pierre Simon Marquis de Laplace** (1749–1827)



videreutviklet på 1800-tallet løsningsmetodene for differensialligningene. Laplace er også kjent for studiene av himmellegemenes bevegelser, og Laplace differensialligning beskriver en harmonisk funksjon. Bidrag kom også fra Carl Friedrich Gauss (1777–1855).



Etter hvert ble man klar over at mange differensialligninger ikke kan løses med tradisjonelle metoder, og den franske matematikeren **Augustin-Louis Cauchy** (1789–1857) kunne i 1820 forutsi at under gitte forutsetninger hadde en differensialligning løsninger.



Lagrange var den første som innførte betegnelsen  $f'$  som **den deriverte** av funksjonen  $f$ .

Leibniz introduserte en **differenskvotient**:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Hvor  $\Delta$  er den greske bokstaven Delta som ble brukt til å uttrykke bittesmå forskjeller. Leibniz tenkte at når  $\Delta x$  ble uendelig liten og  $\Delta y$  tilsvarende liten så ble  $\Delta x$  og  $\Delta y$

uendelige små, **infinitesimale**, og disse infinitesimale betegnet han  $dx$  og  $dy$ . Deretter kunne man summere opp (integrere) alle de infinitesimale. Mengdene  $dx$  og  $dy$  kalte han **differensialer**,  $d$  i kalkulus (småstein) betyr en infinitesimal endring. Derved ble den deriverte en **differensialkvotient**  $dy/dx$ .

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

**Grenseverdien** betegnes  $\lim$  (limes).

Leibniz hadde derved skapt differensialkvotienten  $dy/dx$  som symbol for den deriverte. Leibniz mente at infinitesimale var uendelige små tall, men allikevel større enn 0. Etter hvert oppga man tanken om infinitesimale som egne uendelige små tall, men fremdeles kalles derivasjon og integrasjon for infinitesimalregning. Imidlertid førte Leibniz tenkemåte til en **geometrisk tolkning**: den deriverte er egentlig en **tangentlinje** til en kurve. Differenskvotienten blir en tangentlinje, og den deriverte sier noe om hvor bratt kurven stiger og i hvilken retning den går. Differensialligningen omhandler tangentlinjer, mens integralregningen tar for seg arealer under kurver. Den franske matematikeren **Pierre de Fermat** (1601-1665) fant at når tangentlinjene var horisontale dvs. ingen stigning på tangenten så hadde han maksimums- eller minimumspunkter på en grafisk figur. Har den deriverte en positiv verdi stiger kurven, har den deriverte en negativ verdi synker kurven, og er den deriverte lik 0 verken stiger eller synker kurven. I funksjonen som danner en sirkel vil tangentlinjen alltid stå normalt (vinkelrett) på radius i ethvert punkt på sirkelen. Disse tangentlinjene kunne brukes til å beregne endringer i hastighet i fysikken, eller generelt hvor rask hastighetsendring en funksjon har. Betegnelsen  $f'$  brukes på den **førstederiverte** og  $f''$  på den **andrederiverte**. Ofte skriver man  $y'$  i stedet for  $f'(x)$ , og  $y' = dy/dx$  hvor  $dx$  er differensialet til  $x$  Den andrederiverte skrives som  $y''$  eller  $y''(x)$

$$y''(x) = (y'(x))' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Leibniz notasjon for den deriverte:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x))$$

Lagranges notasjon for den deriverte bruker en apostrof. For den første og andrederiverte:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \quad f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} \quad f^n(x) = \frac{d^2f}{dx^n}$$

Den Newtonske notasjon bruker en prikk:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

Den nære sammenhengen mellom integrasjon og derivasjon. En del differensialligninger kan løses ved integrering, men i mange praktiske anvendelser er differensialligningene ikke analytisk løsbare og kan bare løses numerisk med en datamaskin.

Integrering er det samme som **antiderivasjon**, og beskrives av **Fundamentalteoremet i kalkulus**:

For en kontinuerlig funksjon  $f(x)$  fra  $x_0$  til  $x$ : Hvis

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx$$

Så er

$$F'(x) = f(x)$$

Fermat gjorde også studier innen optikk og sannsynlighetsregning. Svært kjent er Fermats stor (siste) sats (teorem) som sier at for  $n > 2$  har  $x^n + y^n = z^n$  ingen heltallsløsninger for  $x, y$  og  $z$  (når  $x, y$  og  $z \neq 0$ ). I marginen til den franske oversettelsen av *Arithmetica* skrevet av den greske matematikeren Diofantos (300 e.kr.) skrev Fermat at han har funnet løsningen på sitt teorem, men at det er for liten plass i marginen til å skrive det ned. Satsen ble løst i 1994 av Andrew Wiles. Fermats sats er en videreutvikling av Pythagoras  $x^2 + y^2 = z^2$ ; og for kuber blir den  $x^3 + y^3 = z^3$ .

I en todimensjonal figur har man et aksesystem med en horisontal linje kalt **x-akse** og en vertikal akse kalt **y-akse**. Der disse to aksene skjærer hverandre har man **origo** (0). Ethvert punkt i dette planet (**xy-planet**) kan angis med et par med tall  $(x, y)$  kalt **koordinater**, hvor x-koordinaten ofte kalles **abscisse** og y-koordinaten kalles **ordinat**. Leibniz introduserte ordet **funksjon** om en type matematiske formler. Disse funksjonene kan tegnes som en **grafisk framstilling** i et plan med x- og y-koordinater. Sinus (*sin*), cosinus (*cos*) og tangens (*tan*) er eksempler på **trigonometriske funksjoner** som spesielle periodiske egenskaper. Studerer man tidsavhengige prosesser er x-aksen en **tidsakse** med tidsenheter  $t$  og tidsfunksjonen blir av typen  $f(t)$ . Vi skal etter hvert se at prosesser som endrer seg over tid kan beskrives med differensialligninger. Dynamiske systemer, systemer som endrer seg over tid og/eller rom, kan beskrives i form av differensialligninger som har en kontinuerlig tidsakse, eller i form av differensligninger som er basert på iterasjoner (gjentakelse) og har en diskontinuerlig (diskret) tidsakse.

En **ordinær differensialligning** (ODE) er av typen:

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t, y, p)$$

hvor  $t$  angir tid og  $p$  parameterverdier. Ligningen visere endring i en tilstandsvariabel  $y$ , som funksjon ( $f$ ) av tiden som uavhengig variabel, men rom ( $x$  kan også være en uavhengig variabel. Parameterverdiene er forskjellige andre variable.

**Partielle differensialligninger** inneholder den partiellderiverte til mer enn en uavhengig variabel e.g. variasjon i tid ( $t$ ) og rom ( $x$ ):

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f\left(t, x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, p\right)$$

Schrödingers bølgeligning, varmeligningen og den elektromagnetiske bølgeligningen er eksempler på partiellderiverte i tre dimensjoner.

Den **endimensjonale varmeligningen** er eksempel på en partiell differensialligning:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

hvor både tiden  $t$  og rommet  $x$  er uavhengige variable,  $u(t, x)$ . Analytiske løsninger er:

$$u(t, x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}$$

Varmeligningen i tre dimensjoner kan skrives som:

$$k\nabla^2 Q = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

hvor  $Q$  er varme,  $t$  er tid og gradienten opphøyd i andre blir de andrepartiellderiverte (Laplacian):

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Generelt hvis vi har en funksjon med  $n$  variable  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  så vil **gradienten til  $f$**  være gitt ved de partiellderiverte:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Hvis vi har  $F(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$  i et domene  $D$ , så vil  $F$  være et **konservativt vektorfelt** i  $D$ , og  $\phi$  ( $\phi$ ) er skalarpotensialet for  $F$ . Et konservativt vektorfelt  $F = \nabla f$  hvor funksjonen  $f$  er potensialet til  $F$ .  $\nabla$ , en omvendt delta, er gradientoperatoren.

Vi har gradienten gitt i form av de partiellderiverte:

$$\mathbf{grad}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

**Divergensen** til  $F$  **divF** er funksjon (skalarfelt) og er det samme som **flukstetthet**:

$$\mathbf{div}F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{k}$$

Vi kan også uttrykke dette som

$$\mathbf{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Vi ser at divergensen til  $\mathbf{F}$  er et skalarfelt

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Divergensen til vektorfeltet  $\mathbf{F}$  i punktet  $P$  sier noe om hvordan feltet sprer seg vekk fra  $P$ , divergerer, en fluks per enhetsvolum ut fra små sfærer med sentrum i  $P$ :

$$\mathbf{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \oiint \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

Divergensen sier noe om punktet er en kilde eller sink for vektorfeltet.

**Sirkulasjonen** til  $\mathbf{F}$   $\mathbf{curl} \mathbf{F}$  angir hvordan vektorfeltet (flyt av objekter) roterer rundt punktet  $P$  i rommet  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Hvis punktene i rommet med tilhørende vektor er representert med parameterligning  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  så vil tangentvektoren  $d\mathbf{r}/dt$  være parallel med vektorfeltet  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ .

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lambda(t) \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$

For noen vektorfelt er det mulig å finne feltlinjene via differensialligninger som kan bli multiplisert med funksjoner:

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dx}{F_2(x, y, z)} = \frac{dx}{F_3(x, y, z)}$$

En bølge lager en forstyrrelse i et medium, hvor mediet forblir i samme stadiet etter at bølgen har passert. Den **endimensjonale bølgeligningen** er også eksempel på en andreordens hyperbolsk partiell differensialligning:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{hvor} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Den brukes til å beskrive lys-, lyd- og vann-bølger eller en vibrerende streng. Den har en tidsvariabel  $t$  og  $u$  er høyden av modellen  $u(x, t)$  med en rekke romlige variable  $x_1, x_2, \dots, x_n$  med  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ . Den kan uttrykkes som to førsteordens differensialligninger.

Bølgeligningen i et tredimensjonalt rom blir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

hvor  $x$ ,  $y$  og  $z$  er de romlige koordinatene,  $v$  er hastigheten som bølgen beveger seg med,  $u(x, y, z, t)$  er forflytning av bølgen. Dette er en lineær differensialligning siden det er bare lineære ledd i ligningen i form av  $u(x, y, z, t)$ . Bølgebevegelse i en dimensjon, langs  $x$ -aksen, gjør at  $y$  og  $z$  forsvinner. Løsningen for  $u$  i et punkt  $x$  og ved tid  $t$  er gitt ved cosinusfunksjonen:

$$u(x) = A \cos(kx - \omega t)$$

hvor  $A$  er amplitude,  $k=2\pi/\lambda$ ,  $\omega=2\pi v$

Hele verden slik vi kjenner den kan beskrives av differensialligninger.

Her den tredimensjonale **elektromagnetiske bølge**ligningen:

$$c^2 \nabla^2 E = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Erwin Schrödingers (1887-1961) bølge

ligning fra 1926 (**Schrödingerligningen**) for kvantefysikk (bølgemekanikk):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Partikler beskrives som en bølgefunksjon  $\psi(x, y, z, t)$  hvor man snakker om sannsynligheten for å treffe på en partikkel i rommet ved tid  $t$ ,  $\hbar=h/2\pi$  hvor  $h$ =Plancks konstant,  $V$ =partikkelens potensielle energi,  $i=\sqrt{-1}$ .

**Navier-Stokes ligning** for strømning i væsker:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = f - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u$$

hvor  $u$  er hastighet,  $p$ =trykk,  $\mu$ =viskositet,  $\rho$ =tetthet,  $f$ =en ytre kraft, hvis  $f=0$  gir dette Fourierslov. Er viskositeten lik 0 har vi Eulers bevegelsesligning. Selv for Navier-Stokes ligningene, som er en modell for tredimensjon bevegelse i usammenpressbare løsninger bl.a. vann, benyttes mye og har mange løsninger, har man ennå ikke vist at løsningene har global eksistens, det vil si full generalitet. Oppkalt etter den franske ingeniøren Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) og George Gabriel Stokes (1819-1903, hvor man fremdeles ikke har forstått all fysikk som ligger bak. Eksistens og usikkerhet.

I **stokastiske differensialligninger** er et av leddene i ligningene en tilfeldig (stokastisk) prosess. Hastigheten til molekylene i luft følger en Gaussfordeling. **Brownske bevegelser** som er tilfeldig bevegelse av partikler i en væske forårsaket av kollisjoner med væskemolekyler er eksempel på en stokastisk prosess. Innen akustikk, telekommunikasjon og fysikk har man klassifisert støy etter farge ut fra en spektraltetthet (har forskjellige egenskaper ut fra statistiske avbildninger) angitt ved en potensfordeling av frekvensspekteret. **Hvit støy** er signaler som forekommer



tilfeldig og ukorrelert, og har et flatt frekvensspekter på samme måte som vanlig hvitt lys. Lydstyrke vil e.g. bli den samme innen samme frekvensintervall i Herz (Hz) på alle deler av frekvensskalaen. Brownske bevegelser er oppkalt etter botanikeren Robert Brown (1773-1858) som studerte i mikroskop bevegelsen av pollenkorn med stivelseskorn og oleosomer i vann, og er eksempel på **rød støy**, hvor styrken eller potensen øker med 6 decibel (dB) per oktav med økende frekvens, og tettheten er proporsjonal med  $1/f^2$ . Hvis trinnstørrelsen  $X_n$  er like stor pleier man å kalle det "random walk". Rød støy er eksempel på korrelert støy. Støystyrken kan variere med frekvensen (Hurst støy)

$$\frac{1}{f^\alpha}$$

og for rød støy er  $\alpha=2$ . For hvit støy er  $\alpha=0$ .

Brown viste at de kaotiske bevegelsene hadde en fysisk og ikke biologisk forklaring. At årsaken var kollisjoner med vannmolekyler ble vist av Albert Einstein i 1905. Den franske fysikeren Jean-Baptiste Perrin (1870-1942) gjorde beregninger av massen og størrelsen til partiklene i Brownske bevegelser, bestemte Avogadros tall, og fikk nobelprisen i fysikk i 1926. Robert Brown var også med *Investigator*-ekspedisjonen til Australia.

**Rosa støy** ligger mellom hvit- og rød støy og potenstettheten minsker med konstant styrke, 3 dB per oktav med økende frekvens. Tettheten er proporsjonal med  $1/f$  ( $\alpha=1$ ), ligner mer på rødt enn på blått lys. På samme måte som rosa- og rød støy finnes det henholdsvis blå støy (azur-) og fiolett støy (purpur-) som i stedet øker tilsvarende med økende frekvens.

Mønsteret og tidsserien av støyfargene kan uttrykkes som en form for musikk hvor verdiene tilsvarende noter. I vanlig musikk kan man med en viss sannsynlighet angi hva neste tone blir, den er determinert. Er musikken for determinert kan den bli kjedelig og forutsigbar. I kaotisk musikk e.g. fra logistiske iterasjoner med veksthastighet  $>3.5$  kan det bli gjentakelse av et tema med variasjoner. Det samme gjelder den brusende støyen fra et katodestråle TV-apparat når sendingen er avsluttet for kvelden. Rosa støy er det som mest ligner på musikk, hvit støy blir for uregelmessig og rød støy gir for gjentakende musikk.

Verdiene av hvit støy kan følge en Gauss-fordeling:

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}}$$

Man kan simulere Gaussfordelt hvit støy som

$$X = \sqrt{-2\ln(n_1)} \sin(2\pi n_2)$$

hvor  $n_1$  og  $n_2$  er tilfeldige tall fra to uniforme fordelinger  $[0,1]$ .

**Algebraiske differensialligninger** består av en blanding av en differensialligning og en algebraisk ligning  $g$ .

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t, y, p) \quad \& \quad g(t, y, p) = 0$$

**Forsinkelsesdifferensialligninger** (DDE) har med en tidsforsinkelse.

## Den deriverte av utvalgte funksjoner

Funksjon $y=f(x)$	Den deriverte av funksjonen $y'=dy/dx$
$y=c$	$\frac{dy}{dx} = 0$
$y=cx^n$	$\frac{dy}{dx} = c \cdot n \cdot x^{n-1}$
$y=a^x$	$\frac{dy}{dx} = \ln a \cdot a^x \quad \text{for } a > 0$
$y=\ln x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{for } x > 0$
$y=e^x$	$\frac{dy}{dx} = e^x$
$y=e^{u(x)}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{u(x)} \cdot du(x)}{dx}$
$y=\sin x$ (radianer)	$\frac{dy}{dx} = \cos x$
$y=\cos x$	$\frac{dy}{dx} = -\sin x$
$y=\sqrt{x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=\tan x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$

Summeringsregel for funksjonen  $y= f(x) + g(x)$  hvor den deriverte  $dy/dx$  blir:

$$\frac{dy}{dx} = (f + g)'(x) = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx} = f'(x) + g'(x)$$

Tilsvarende blir det for differense hvor plusstegn byttes med minustegn.

$$\frac{dy}{dx} = (f - g)'(x) = \frac{df(x)}{dx} - \frac{dg(x)}{dx} = f'(x) - g'(x)$$

Produktregel for funksjonen  $y=f(x) \cdot g(x)$  hvor den deriverte  $dy/dx$  blir:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx} + g(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Kvotientregel for funksjonen  $y=f(x)/g(x)$  hvor den deriverte  $dy/dx$  blir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[ \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) - \frac{dg(x)}{dx} \cdot f(x) \right]}{g(x)^2} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}$$

**Kjerneregel** for sammensatte funksjoner  $h(x)=f(g(x))$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ekspontialfunksjone  $f(x)=e^x$  er den eneste hvor den deriverte av funksjonen er lik funksjonen selv.

$$f'(x) = f(x) \rightarrow f(x) = e^x$$

Det naturlige tallet  $e$ , Eulers tall, er mye brukt i kalkulus, akkurat som pi ( $\pi$ ) i geometri.

## Noen andre nyttige regneregler

Uttrykket  $a^n$  kalles en **potens** hvor  $a$  er **grunntall** og  $n$  er **eksponent**. Vi har hvis  $p$  og  $q$  er hele tall og  $a$  forskjellig fra 0:

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^p \cdot a^q = a^{(p+q)}$$

$$(a^p)^q = a^{(p \cdot q)}$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{(p-q)}$$

$$\text{Hvis } c = b^a \text{ s\aa } b = \sqrt[a]{c} \text{ og } a = \log_b c$$

Hvis vi har ligningen  $x^2=2$  s\aa blir l\osningen

$$x = \sqrt{2} = 1.4142136 \dots$$

som er et **irrasjonalt tall**. Har vi en rettvinklet trekant med sider lik 1 blir f\aa hypotenusen lengden kvadratroten av 2 ( $\sqrt{2}$ ) if\olgte Pythagoras. Det betyr at hypotenusen ikke kan bli konstruert helt n\oyaktig. Irrasjonalt betyr at tallet ikke kan uttrykkes som et ratio, et forhold mellom to tall.

Hvis vi har ligningen  $x^2+1=0$  s\aa f\aa vi l\osningen:

$$x = \sqrt{-1}$$

Men det er umulig å finne et tall multiplisert med seg selv som gir  $-1$ . Vi definerer derfor et nytt tall  $\sqrt{-1}$  som vi kaller  $i$ . Reelle tall som multipliseres med  $i$  kalles **imaginære tall**.

**Komplekse tall**  $a+ib$  er summen av et reelt tall  $a$  og et imaginært tall  $ib$  hvor  $b$  er et reelt tall. De reelle tallene er en undermengde av de komplekse tallene hvor  $b=0$ . De komplekse tallene kan ikke som de reelle tallene uttrykkes på en tall-linje, men de uttrykkes i et **komplekst plan** (Argand diagram, etter Jean-Robert Argand (1768-1822) eller Wessel-diagram, hvor den **reelle delen**  $a$  befinner seg på den horisontale aksene og den **imaginære delen**  $i = \sqrt{-1}$  befinner seg på den vertikale aksene. Det komplekse talle  $a+ib$  blir et punkt i det komplekse planet. For de reelle tallene som befinner seg på tall-linjen kan vi avgjøre hvem som er størst og minst, men for de komplekse tallene er det meningsløst å spørre om et komplekst tall er større enn et annet. Vi bruker imidlertid ikke de komplekse tallene til målinger, de er bare resultater av løsning av ligninger. To komplekse tall som atskiller seg bare i fortegnet e.g.  $a+ib$  og  $a-ib$  kalles **komplekse konjugater**.

Vi kan multiplisere to komplekse tall med hverandre og resultatet blir et nytt komplekst tall:

$$(a + ib) \cdot (p + iq) = ap + iaq + ibp + i^2 \cdot bq = (ap - bq) + i(aq + bp)$$

Man kan dividere to komplekse tall ved å multiplisere teller og nevner med det komplekse konjugatet til nevneren:

$$\frac{a + ib}{c + iq} = \frac{a + ib}{c + iq} \cdot \frac{c - iq}{c - iq} = \left( \frac{ac + bq}{c^2 + q^2} \right) + i \left( \frac{bc - aq}{c^2 + q^2} \right)$$

Absoluttverdien til et komplekst tall kalles modulus og skrives  $|x+iy|$  og er avstand fra origo til punktet som tilsvarer det komplekse tallet og i et komplekst plan blir dette ifølge Pythagoras:

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Multiplikasjon av to komplekse konjugater er lik kvadratet av deres modulus:

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2 \cdot y^2 = x^2 + y^2$$

Vi kan la  $x$  og  $y$  følge en sirkel med radius 1, og det komplekse planet med vinkelradius  $\theta$ . Euler fant da sammenhengen:

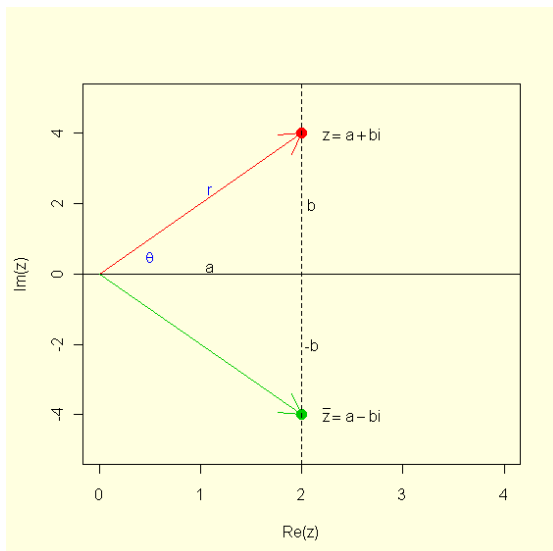
$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Komplekse tall er nødvendig for å undersøke stabiliteten av løsningen av differensialligninger.

Multipliserer vi et komplekst tall  $z=a+bi$  med det komplekse konjugatet så får vi et reelt tall:

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \quad \text{hvor } \bar{z} = a - bi$$

```
#z=a+bi
z<-2+4*1i
plot(z,ylim=c(-5,5),xlim=c(0,4),pch=16,cex=1.5,col=2)
z0<-0+0*1i
arrows(0,0,2,4,col=2)
abline(h=0)
zkonj<-Conj(z) #kompleks konjugat z=a-bi
points(zkonj,col=3,pch=16,cex=1.5)
arrows(0,0,2,-4,col=3)
abline(v=2,lty=2)
text(2.5, -4, expression(bar(z)==a-bi))
text(2.5, 4, expression(z==a+bi))
text(1.1, 0.2,"a")
text(2.1,2,"b")
text(2.1,-2,"-b")
text(1.1,2.4,"r",col=4)
text(0.5,0.5,expression(theta),col=4)
z*zkonj #a^2+b^2
[1] 20+0i
```



Et komplekst tall kan også ha en polar representasjon:

$$z = a + bi = r \cos \theta + i r \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

hvor  $r$  er lik modulus  $z$  og vinkelen  $\theta$  er argumentet til  $z$ :

```
Mod(z) # modulus til z, lengden r
[1] 4.472136
Arg(z) # argument til z, vinklen theta
[1] 1.107149
```

```
sqrt(20) #r via Pythagoras
[1] 4.472136
```

En kvadratisk ligning beskriver en parabel og har formen ( $a \neq 0$ )

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

og denne har to løsninger (to røtter):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Man kan legge sammen eller trekke fra to matriser ved å addere eller subtrahere tilsvarende elementer i matrisen:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

Multiplikasjon av matriser er assosiativ:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

men er ikke kommutativ (l. *commutare*-veksle)

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Vi har kommutativitet bare når:

$$A \cdot B = B \cdot A \text{ når } B = I_n$$

hvor  $I_n$  er en **identitetsmatrise**.

En  $n \times n$  matrise  $A$  er **invertibel** hvis det finnes en  $n \times n$  matrise  $B$  slik at:

$$A \cdot B = I_n$$

Matrise  $B$  kalles i dette tilfelle for en **invers matrise**.

Hvis  $A$  er en invertibel  $n \times n$  matrise så er den inverse matrisen lik  $A^{-1}$ .

Hvis  $A$  og  $B$  er invertible  $n \times n$  matriser så er også  $A \cdot B$  invertibel:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Hvis vi har følgende inhomogene lineære ligningssystem :

$$A \cdot X = B$$

Så vil:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

En invertibel matrise er radlik identitetsmatrisen  $I_n$ .

Determinanten for en  $3 \times 3$  matrise bestemmes med Laplace-ekspansjon, og man skjønner at her blir det praktisk å ta i bruk en datamaskin:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = aek + bfg + cdh - ceg - bdk - afh$$

En matrise  $A$  har en **invers matrise**  $A^{-1}$  hvis determinanten til  $A$  er forskjellig fra 0 ( $\det A \neq 0$ )

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

Hvor  $I_n$  er lik **identitetsmatrisen**. Når  $n=2$  blir identitetsmatrisen en  $2 \times 2$  matrise  $I_2$ .

Den inverse til en  $2 \times 2$  matrise blir:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Vi ser at  $A$  er invertibel hvis  $ad-bc$  er forskjellig fra 0. Vi har at determinanten til  $A$   $\det(A) = ad-bc$ , slik at  $A$  er invertibel hvis determinanten er forskjellig fra 0.

Hvis man kjenner den inverse matrisen kan dette brukes til å løse ligninger. Hvis  $A$  er en  $n \times n$  matrise,  $X$  og  $B$  er en  $1 \times n$  kolonnematrise

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

**Homogene lineære ligninger** er av typen  $A \cdot X = 0$  og **inhomogene ligninger** er av typen  $A \cdot X = B$ .

Integrasjon og derivering er motsatte funksjoner. Hvis vi har en potensfunksjon  $f(x) = x^a$

$$f(x) = x^a$$

Da vil den deriverte av funksjonen bli:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = a \cdot x^{a-1}$$

Integralet av funksjonen er:

$$\int_{t_0}^t x^a dx = \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} + C \quad \text{for } a \neq -1$$

Hvor  $C$  er en integrasjonskonstant. Vi kan bestemme integrasjonskonstanten ved initialbetingelsene ved  $t_0$  hvor  $x$  har en verdi.

Hvis  $a=-1$  har vi funksjon og integral:

$$\int_{t_0}^t x^{-1} dx = \int_{t_0}^t \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

## Matriser og lineære avbildninger

Multiplisering av matriser avbilder en  $m \times n$  matrise fra  $R^n \rightarrow R^m$ .  $R^n$  vil si et  $n$ -dimensjonalt vektorrom. Når  $n=3$  så vil  $R^3$  tilsvare et tredimensjonalt rom. Når  $n=2$  så vil  $R^2$  tilsvare et plan.

Hvis  $A$  er en  $m \times n$  matrise og  $x$  er en  $n$ -vektor så har vi en avbildning ( $\mapsto$ ):

$$x \mapsto A \cdot x$$

Hvis  $A$  er lik en  $2 \times 2$  matrise av typen så har vi avbildning  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

så vil dette gi en avbildning med strekning eller sammentrekning av  $x$ - og  $y$ -koordinatene i et plan:

$$(x, y) \mapsto (\lambda_1 \cdot x, \lambda_2 \cdot y)$$

Hvis  $A$  er følgende matrise så vil dette gi en avbildning i form av rotasjon i planet mot klokka med vinkel  $\theta$ :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Matrisen  $R_{-90}$  roterer koordinatene i planet  $90^\circ$  mot klokka:

$$R_{-90} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Den inverse matrisen  $R_{90}$  roterer  $(x, y)$ -koordinatene  $90^\circ$  med klokka:

$$R_{90} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En identitetsavbildning vil si at hvert element avbildes på seg selv.

Vi har en **lineær avbildning**  $L_A$  mellom vektorrom  $(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)$

$$L_A(x) = A \cdot x$$

En lineær avbildning er definert som multiplisering med en matrise.

En avbildning er lineær hvis:

$$L(u + v) = L(u) + L(v)$$

$$L(c \cdot v) = c \cdot L(v)$$

Alle matriseavbildninger er lineære avbildninger.

En vektor  $v$  i vektorrommet  $\mathbb{R}^n$  ( $v \in \mathbb{R}^n$ ) har koordinatene  $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$  og **basis** er  $w = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$  så kan  $v$  uttrykkes som en lineær kombinasjon av basis:

$$v = \alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 + \dots + \alpha_n \cdot w_n$$

hvor  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  er skalarer.

En **ortonormal basis** vil si at hver basisvektor har enhetslengde og to basisvektorer står normalt på hverandre. Hvis vi har flere vektorer  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  i et vektorrom  $\mathbb{R}^n$  så vil de være ortogonale hvis  $v_i \cdot v_j = 0$  og med enhetslengde 1 så vil  $v_i \cdot v_i = 1$ .

Eksempel på ikke-lineære avbildninger er e.g.  $f(x) = x^2$

$$f(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$f(x) + f(y) = x^2 + y^2$$

$$f(x) = e^x$$

$$f(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$f(x) + f(y) = e^x + e^y$$



# Dynamiske modeller

En dynamisk modell er en forenklet framstilling av den virkelige verden i form av ligninger. Den kalles dynamisk fordi modellen viser hvordan systemet oppfører seg over tid. Modeller er viktige i all vitenskap. Man kan lage en matematisk modell av et økosystem, en populasjon eller av været brukt i meteorologenes klimamodeller. I arbeidet med modellen samles og systematiseres kunnskap. Modellen brukes til å forstå systemet, forutsi hendelser og trekke konklusjoner fra modellen, og se om det modellen predikterer stemmer med virkeligheten. Modellen har et sett med tilstandsvariable som oppsummerer egenskapene til systemet. Dynamiske ligninger viser hvordan tilstandsvariable endrer seg over tid. Måleenhetene på venstre side av likhetstegnet i differensialligningene må være lik måleenhetene på høyre side.

Den tiden man kjente til bare 6 planeter trodde man at avstanden mellom dem var bestemt av 5 lineære polyedre, **Platonske legemer**: tetraeder (4 trekantede sideflater), heksader (kube, 6 kvadratiske sideflater), oktader (8 trekantede sideflater), dodekader (12 femkantede sideflater) og ikosader (20 trekantede sideflater). Johannes Kepler (1571-1630) kunne beskrive planetenes bevegelser i form av 3 lover som ga forklaring på Tycho Brahes observasjoner. 1. Planetbanene er elipser med sola i brennpunktet. 2. Planetene sveiper like store arealer på lik tid. 3. Tredjepotens av planetenes avstand fra sola er proporsjonal med kvadratet til siderisk omløpstid.

På siste del av 1600-tallet studerte Newton av bevegelsen av sola og jorda, et tolegemesystem i klassisk mekanikk karakterisert av bevegelse, posisjon og hastighet som funksjon av tiden, og som kunne beskrives med differensialligninger. Isaac Newton la et grunnlag for differensial- og integralregning mer verket *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (Det matematiske prinsipp for naturfilosofi) publisert i 1687. En fallende ball kan beskrives av to variable, høyde ( $h$ ) og hastighet ( $v$ ) og begge er funksjoner av tiden ( $h(t)$ ,  $v(t)$ ). Lager vi en grafisk framstilling av posisjon som funksjon av tid gir denne kurven informasjon om hastighet, stigningen av grafen er et mål på hastigheten. Hastighet er endring i posisjon, og endring i hastighet er aksellerasjon ( $a$ ). Endringen kalles den deriverte. Bevegelsesmoment = masse ( $m$ ) · hastighet. Ifølge Newtons andre lov er kraft ( $F$ ) = masse · aksellerasjon.

$$F = m \cdot a$$

Newton fant at ved havnivå er gravitasjonskraften lik  $m \cdot g$ , hvor  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$  ved havoverflaten.

Ifølge Leibniz er endring i høyde som funksjon av tid lik hastighet, og endring i bevegelsesmoment er lik gravitasjonskraften, med negativt fortegn fordi gravitasjonskraften virker nedover.

$$\frac{dh}{dt} = v \quad \frac{dmv}{dt} = -mg \quad \frac{dv}{dt} = a$$

Kastes en ball rett opp minker hastigheten inntil ballen når sitt høyeste punkt hvor hastigheten er 0,  $v=dh/dt=0$ , deretter begynner ballen å falle nedover og hastigheten øker, men aksellerasjonen er hele tiden konstant,  $-g$ . Det ble Rowan Hamilton som fikk sitt navn knyttet til **Hamiltonsk mekanikk**, bevegelsesligninger i symmetrisk form.

Differensialligningene i Newtons mekanikk for en fallende ball kan brukes til å beskrive bevegelsen av planeter. Den matematiske verden gir forståelse av den fysiske verden.

Ifølge Newtons inverse kvadratlov for gravitasjonstiltrekning vil to objekter med masse  $m_1$  og  $m_2$  tiltrekke hverandre med en kraft som er proporsjonal med massene og inverst proporsjonalt med kvadratet av avstanden ( $r$ ) mellom dem.

$$F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

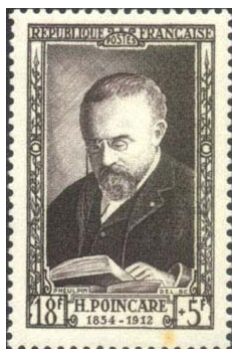
$G$  er gravitasjonskonstanten  $G=6.67 \cdot 10^{-11}$  N m<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>, og gravitasjonen virker i en retning langs en linje som forbinder sentrene i de to massene,

Dette gjelder for alle to-objekt systemer, en planet rundt sola, eller en måne rundt jorda.

Det viste seg at trelegemesystemet med jord, måne og sol var vanskelig å løse. Vi kan imidlertid summere alle krefter som virker på et objekt. Hva er gravitasjon og hvor kommer gravitasjonskreftene fra? Kunnskapen om gravitasjon gjorde at noen ble bekymret. Vil alle planeter fortsette å følge omtrent samme bane, eller kan en planet skli ut av sin bane og nærme seg solen, eller bevege seg ut i verdensrommets mørke? Kong Oskar II utlovet en pris på 2500 kroner til den som kunne løse  **$n$ -legemeproblemet**. Det vil si å finne differensialligningene som beskriver planetbevegelsene i all framtid, gitt posisjon og hastighet. Newton hadde funnet svaret for  $n=2$ .

Er  $n$ -legeme problemet uløselig? Hver planet påvirkes av alle andre planeter, sola, måner, asteroider, kometer osv.

Den franske matematikeren Jules Henri Poincaré (1854-1912) fikk prisen på kongens 60-årsdag 21.1.1889, men han hadde egentlig ikke løst problemet.



Dette var pinlig for den svenske matematikeren Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), samt Karl T. Weierstrass, professor i Berlin, og Charles Hermite som satt i juryen. Prispengene ble tilbakelevert, men i 1890 publiserte Poincaré den riktige løsningen: *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* i *Acta Mathematica* 13 (1890)1-270. I trelegemeproblemet sol-måne-jord hadde Poincaré for hvert av objektene tredimensjonalt 3 koordinater for hastighet og 3 koordinater for posisjon, i alt 18 variable for sol-måne-jord, som kan betraktes som et punkt som beveger seg i et 18-dimensjonalt rom. Det nye var at Poincaré valgte en geometrisk tilnærming for løsning av differensialligninger uten å spørre etter kvalitative egenskaper, en geometrisk analyse av stabilitet. Fra dynamikk til geometri. Løsningene av differensialligningene kan presenteres geometrisk som **trajektorier** i et **faserom**. Trajektoriene kan gå i løkker, periodiske baner, men trajektoriene kan ikke krysse hverandre fordi det er umulig å trekke mer en en tangent gjennom et punkt. Kurver gjennom det globale faseportrett kalles løsningskurver, baner eller trajektorier.

Differensialligninger er det samme som geometriske bilder av flyt. Å løse differensialligninger er å finne den generelle løsningen som er lik flyt. Man må sikre seg at det finnes løsninger, dvs. variabelen kan presenteres som funksjon av tid. Trajektoriene starter i et punkt i faserommet og man må løse **initialverdiproblemet**. Det er vanskelig å finne formelen for alle tilstandsvariablene, hastighet og posisjon i ethvert tidspunkt, gitt **initialverdier** for hastighet og posisjon. **Global eksistens** vil si kurver definert for hvert punkt i fortid, nåtid og framtid. **Lokal eksistens** vil si bare i et kort tidsintervall: før, nå, etter. Kontinuerlig løsning m.h.p initialdata gjør at trajektoriene ligger nær hverandre i starten.

**Bifurkasjoner** er endringer i et dynamisk system når en eller flere parametere passerer kritiske verdier. Noen systemer viser hysteresis, hvor bifurkasjoner får forskjellige verdier avhengig av retningen på endringen av parameterverdiene. Poincaré betraktes som grunnlegger av teorien om bifurkasjoner.

To trajektorier som ligger nær hverandre atskilles raskt og eksponensielt og kan beskrives via **Lyapunoveksponenten  $\lambda$** .

Russisk matematiker Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918).



Sofya Kovalevskaya (1850-1891) ansatt som professor ved Universitetet i Stockholm kom tidligere med tilsvarende idéer.



Lyapunoveksponenten er alltid et reelt tall og gir et mål på hvordan to trajektorier atskilles. Positiv eksponent angir kaos, negativ eksponent angir en periodisk syklus eller et fast punkt. Det er likhetstrekk med egenverdier og begge kan beregnes ut fra Jacobi-matriser, og begge angis med bokstaven  $\lambda$ . Lyapunoveksponenten gir et kvantitativt mål på vekst eller reduksjon i løsningen til lineariserte ligninger i forskjellige retninger i faserommet. For et  $n$ -dimensjonalt rom er det  $n$  Lyapunoveksponenter hvor  $\lambda$  er størst, og  $\lambda$  avhenger av hvilke trajektorier man studerer. Hvis vi plotter den naturlige logaritmen  $\ln$  til vektoren som funksjon av tiden som mål på atskillelsen av trajektoriene blir dette en tilnærmet rett linje med toppe og daler, og som etter hvert når metning. Stigningen av denne linjen er gitt ved  $\lambda$ . Man kan bare prediktere fremtiden bare noen få multipler av  $1/\lambda$ , hvilket betyr at det er vanskelig å prediktere oppførselen av kaotiske systemer jfr. værmeldinger. Kaotisk, betyr ikke uten orden, men kaotiske systemer er meget følsomme for initialbetingelsene. Framtiden utover et lite kort tidsrom er totalt uforutsigbar.

**Poincaré avbildninger (Poincaré snitt)** lager et kutt i alle trajektoriene, dvs. kutter alle flytlinjene i et dynamisk system og viser hvordan dette blir seende ut i et plan. Man kan tenke seg en tyggegummi som kan strekkes i alle retninger, og Poincaré-avbildningen projiserer faste punkter på tyggegummien ned i ett plan. Avbildningen gir punkter på en flate med to koordinater og viser hvordan koordinatene endrer seg når trajektoriet går tilbake til flaten. Periodiske løkker

har trajektorier som flyter rundt og treffer seg selv (Jfr. Lotka-Volterra), og Poincaré-avbildningen blir i dette tilfellet ett punkt. Finner man faste punkter i en topologisk Poincaré transformasjon betyr dette at det må være periodiske sviningninger i det dynamiske systemet.

Kaos er avhengig av initialbetingelsene og svært følsomme for disse. **Feigenbaum** sammenlignet kaos og fasetransisjoner May viste at det for høye veksthastigheter oppstår kaos i den **logistiske ligning**.

Kaotiske systemer er aperiodiske og er svært følsomme for initialbetingelsene. Systemet kan beskrives av ikke-lineære ligninger, og små endringer i en parameter er avgjørende om systemet oppfører seg kaotisk. Kaos kan vises i et Poincaré-snitt. I 1963 kunne Lorenz vise at tre differensialligninger som beskrev vær fenomener oscillerte irregulært og nådde ikke likevekt, Lorenz somfugleffekt: Et vingeslag i Brasil kan gi en tornado i Texas.

På 1970-tallet kunne biologen Robert May vise at det oppstod kaos i den logistiske vekstligningen ved høye veksthastigheter. Kaos (gr.) betyr fravær av orden, og kaos er aperiodisk oppførsel følsom for initialbetingelsene. Meget små forandringer i utgangsbetingelsene gir meget forskjellig resultat, selv i samme ligning. Væske og luft består av store mengder molekyler som kan strømme laminært eller turbulent, og turbulent strøm gir kaos (kaotisk turbulens. For eksempel omrøring av tykk fløte i en kaffekopp. Mens planetene går i stabile elipsebaner rundt sola, går den lille månen Hyperion i en kaotisk bane rundt Saturn.

**Belousov-Zhabotinsky ringer** er eksempler på kaotiske kjemiske oscillasjoner (spiralbølger) ved oksidasjon av malonsyre i en sur løsning med bromationer med små mengder metallioner, cesium eller jern som katalysator. Kaotisk leketøy er satt sammen av to pendler som svinger.

Mandelbrot var en av pionerene innen fraktalgeometri, et resultat av interasjonsprosesser i enkle ligninger. Feigenbaum studerte av faseoverganger og kaos. Datamaskiner gjorde det mulig å visualisere deterministisk kaos fra ikke-lineære ligninger og synliggjort strukturer og mønstre som gjentar seg.

**Fraktaler** er geometriske framstillinger av kaodynamikk, fingeravtrykkene til kaos. Fraktaler viser selvsimilaritet hvor et lite mønster gjenfinnes i det store. Skyformasjoner, bregnefronder, greining i trær og Romanesco-kål (*Brassica oleracea* cv. Romanesco) er eksempler på naturlige fraktaler. Andre eksempler på fraktaler er banefraktaler: Mandelbrotmengden, Julia-mengden, Lyapunov-mengden. Itererte fraktaler: von Koch's snøflak, Cantor-mengde, Peanokurver,

Sierpinski-triangel og Mengersvamp, samt tilfeldige fraktaler: Brownske fraktaler. Bevegelsen av en dobbeltpendel hvor to metallstaver henger sammen i ett punkt kan oppføre seg kaotisk.

Det er svært vanskelig å forutsi utviklingen av komplekse systemer. På noen stadier kan de begynne å oppføre seg kaotiske og uforutsigbare, men det som skjer er allikevel ikke tilfeldig. På visse steder svinger systemet mellom to rytmer, og det skjer en todeling (**bifurkasjon**). Deretter kan det skje helt uregelmessige og uforutsigbare reaksjoner uten noen fast rytme dvs. systemet oppfører seg **kaotisk**. For økologene har kaosmodellene og fraktale mønstre vært med på å forklare utviklingen av populasjoner og hvordan formen på en plante oppstår. Ofte kan populasjoner svinge uten å nå en likevektssituasjon og variasjonen synes å være usystematisk. Det fantes tidligere ingen fullgod matematisk beskrivelse av denne situasjonen. Det er så mange faktorer ute i naturen som påvirker et system at det er vanskelig å finne noe mønster i virvaret, men det er en struktur. Det kan plutselig finnes "vinduer" i kaoset hvor populasjonen faller til ro omkring en likevektsverdi. Seinere går det på nytt inn i kaos. Forgreinene i fikentreet oppstår med stadig kortere mellomrom, og intervallene mellom periodefordoblingen minsker med faktoren  $4.669201\dots$ , kalt **Feigenbaums tall**. Det er også en gjentakelse av mønsteret for periodefordoblinger og overgang til kaos. Man sier at systemet viser **selvsimilaritet**. Det er i den kaotiske delen mønsterstrukturer gjentar seg i miniatyr om og om igjen. Benoit Mandelbrot har vist dette via Mandelbrot-mengden: Han gjentok en enkel beregning en rekke ganger og resultatet av denne danner utgangspunktet for den neste (iterasjoner). Det er altså en uendelighet i dette mønsteret og man kan zoome inn på stadig mindre deler av helheten. Lengden av kysten er avhengig av målestokken man bruker. En mikrostruktur går igjen. Helhetens form er identisk med delenes form. Hvis en rett linje har dimensjon en, flaten har dimensjon to og rommet dimensjon tre, vil krøllede linjer ha en dimensjon som ligger mellom disse heltallene, kalt fraktaler. Kaosforskningen er istand til å gi mønstre og lovmessighet bak dynamiske systemers utvikling. Mønstre oppstår når delene i et system plasserer seg energimessig mest gunstig i forhold til hverandre for eksempel vannmolekyler i en snøkrystall.

Differensialligninger har en kontinuerlig tidsakse, mens differensligninger har diskrete tidsintervall.

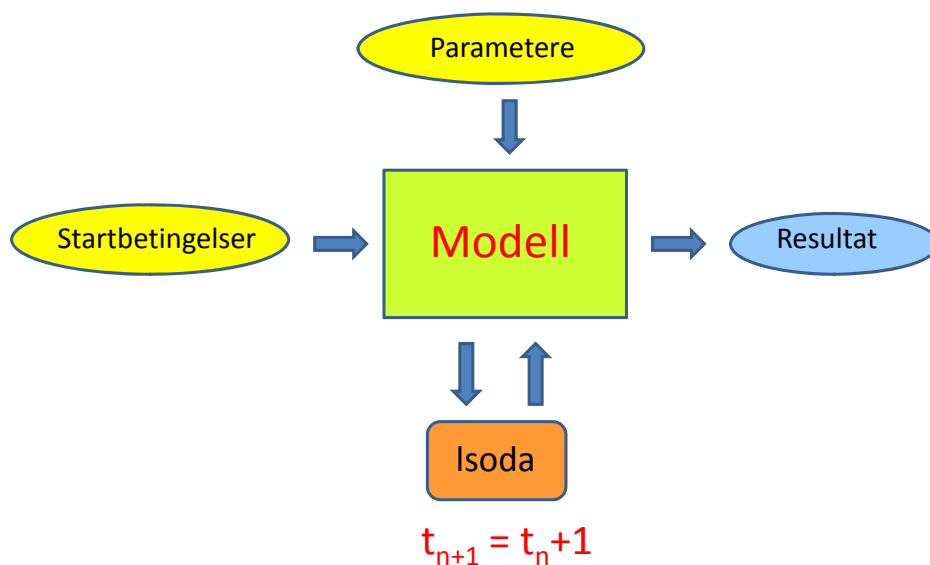
En viktig del av **topologi** er studiet av posisjon. Topologisk sett er det ingen forskjell på en sirkel, ellipse eller en annen lukket kurve. En **todimensjonal manifold** er et objekt hvor et punkt og de nærmeste omgivelser kan betraktes som en

flate. For en matematiker er kulen todimensjonal, ser bort fra det som er inne i kule. Leve på en kule er å leve på en flate. En smultring, torus, er også en todimensjonal manifold. Det er først når vi kommer utenfor jordkloden at vi kan se at vi lever på en kule. Ser man seg rundt ser det ut som man lever på en flate. En tredimensjonal manifold må være tredimensjonal på et ethvert punkt på objektet

I det følgende skal vi først se på systemer med en variabel: et lineært system i form av eksponensiell vekst eller nedbrytning, og det ikke-lineære systemet med logistisk vekst som under visse betingelser viser bifurkasjoner og kaos. Newtons system med sol og måne var et lineært system med to variable, men vi skal se på det ikke-lineære systemet Lotka-Volterra-modellen for predator-byttedyr. Det lineære Poincarés trelegemeproblemet har tre variable, og vi skal studere de ikke-lineære Lorenzlikningene, og samt se litt på fraktaler, diffusjon, rute-systemer og cellulære automater e.g. Conways game of life. Schrödingers bølge-ligninger innen kvantemekanikk, Maxwells ligninger for elektromagnetisme, Ficks diffusjonsligninger, Fouriers varmeligninger, Laplaces ligning for harmoniske funksjoner, Navier-Stokes ligningene (flyt av væske eller gass i rør hvor hastigheten er størst i midten og minst ved veggen med tilhørende turbulens), samt Black-Scholes ligninger for beregning av pris på aksjeopsjoner i finansverden, er alle eksempler på differensialligninger.

#### **Kolmogorov-Arnold-Moser teori.**

Biologiske systemer er selvorganiserende dissipative energiforbrukende systemer langt fra likevekt. Det er **flukser** av stoff og energi gjennom de biologiske systemene, beskrevet av **irreversibel termodynamikk** av bl.a. Prigogine og norskamerikaneren og nobelprisvinneren Lars Onsager.



Figur. Gitt et modellsystem beskrevet av differensialligninger. Ved gitte startbetingelser, parameterverdier og et bestemt antall tidstrinn  $t$  så vil differensialligningene kunne løses numerisk via deSolveren lsoda.

*Naturforskeren studerer ikke naturen fordi det er nyttig. Han/hun studerer den fordi han fryder seg, og han fryder seg fordi det er vakkert. Hvis naturen ikke var vakker, så ville det ikke være verdt å vite, og hvis naturen ikke var verd å vite, så ville ikke livet være verd å leve. J.H.Poincaré.*

## Differensialligninger

En differensialligning viser i hvilken retning en tangent til en funksjon peker til enhver tid. Moderne datamaskiner har gjort det mulig å løse differensialligninger numerisk hvis man har gitt utgangsparameterne for ligningen.

Differensialligninger er av to hovedtyper:

**Ordinære differensialligninger** hvor den ukjente er en funksjon av en variabel og **partielle differensialligninger** som har to eller flere variable.



I en differensialligning inngår funksjonen og den deriverte funksjonen. Det finnes **første ordens differensialligninger** og **høyere ordens differensialligninger**.

Generelt har en differensialligning formen:

$$y' = f(x, y)$$

Retningsfeltet til differensialligning er korte linjestykker som tangenter til en integralkurve.

## Numerisk løsning av differensialligninger

Generelt er det vanskelig, for ikke å si umulig, å finne analytiske løsninger av differensialligninger, men vi kan finne en tilnærmet numerisk løsning gitt bestemte utgangsbetingelser. Eulers metode, lsoda eller fjerde ordens Runge Kutta metode (rk4) kan benyttes til numerisk løsning av differensialligninger, av disse er lsoda den beste. Den deriverte av  $x$  ved tid  $t$  har grenseverdi:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Odepack, en samling av ODEsolvere (Ordinary Differential Equations), bl.a. lsoda (Ordinary Differential Equation Solver for Stiff or Non-Stiff System), ble opprinnelig utviklet av Alan Hindmarsh og Linda Petzhold ved Lawrence Livermore National Laboratory i USA. Karline Soetart, Thomas Petzolt og R. Woodrow Setzer har laget et grensesnitt mellom R og ode-solvere fra Odepack. Lsoda skifter automatisk mellom stiff og ikke-stiff metoder. Hvis en eller flere variable endrer seg raskere enn andre kalles systemet stiff.

En generell utgave av resultatene fra lsoda er at først definerer man en funksjon, parameter- og startverdier, antall tidsstep, og rtol angir nøyaktigheten i den numeriske integrasjonen. Er det raske endringer er det små tidsstep, er det små endringer går det raskere fremover i lenger steg. Feilkildene ved den numeriske integrasjonen kommer fra tidstrinn og dobbelpresisjons flyttallsaritmetikk i R.

```
funksjon<-function(t,x,p)
resultat<-
as.data.frame(lsoda(start,tid,funksjon,params,rtol=1e-4))
Resultatene kan plottes med plot eller matplot.
```

## Ekspensialfunksjon og eksponensiell vekst

Et eksempel på en differensialligning hvor den f-deriverte av  $x$  ( $f'(x)$ ) er lik funksjonen selv ( $f(x)$ ):

$$f'(x) = f(x)$$

Denne differensialligningen har en løsning hvis  $f(x) = e^x$ , hvor  $C$  er en **integrasjonskonstant**:

$$f(x) = C \cdot e^x$$

Eksponensialfunksjonen  $e^x$  er et eksempel på en funksjon som er lik sin deriverte. For forskjellige verdier av  $C$  kan man tegne integralkurver for differensialligningen.

Eksponensialfunksjonen  $e^x$  er et eksempel på en funksjon som er lik sin deriverte. For forskjellige verdier av  $C$  kan man tegne integralkurver for differensialligningen. Det betyr at eksponensiell vekst for en populasjon med organismer kan beskrives som en første ordens differensialligning.

Vekstraten for en populasjon kan beskrives som endring i antall individer  $N$  over tiden  $t$  (eller endring i biomasse over tiden  $t$ )  $dN/dt$ .  $N(t)$  er antall individer (eller biomasse) ved tid  $t$  og  $N(0)$  er antall individer (eller biomasse) ved  $t=0$ . Den **relative vekstraten**  $r$  blir:

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt} = r$$

Denne kalles også **per capita vekstrate**. Denne er den samme som:

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N$$

Denne kalles også Malthusligningen (Malthus 1798). Dette er en første orden lineær (proporsjonal med  $N$ ) og ordinær (ingen partiellderiverte) differensialligning (deriverte eller differensial). En løsning av denne differensialligningen blir lik en eksponensialfunksjon som beskriver eksponensiell vekst:

$$N = N_0 \cdot e^{r \cdot t}$$

Løsningen går mot uendelig når  $r > 0$  (eksponensiell vekst, og går mot 0 når  $r < 0$  dvs. eksponensiell nedbrytning e.g. desintegrering av radioaktive nuklider hvor fortegnet på høyre side av ligningen blir negativ.

Uavhengig av  $N$  vil **doblingstiden** ( $t_{\text{dobling}}$ ) bli den samme,  $N_{t_{\text{dobling}}} = 2N_0$ .

$$2 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{r \cdot t_{\text{dobling}}}$$

$$\ln 2 = r \cdot t_{\text{dobling}}$$

$$t_{\text{dobligng}} = \frac{\ln 2}{r}$$

Man må skille mellom **relativ vekstrate**  $r$  (antall antall<sup>-1</sup> dag<sup>-1</sup> eller  $g \cdot g^{-1} \text{ dag}^{-1}$ ) som er et mål på hvor effektivt hvert individ (eller enhet biomasse) produserer nye individer (eller biomasse) og **absolutt vekstrate** (antall dag<sup>-1</sup> eller  $g \text{ dag}^{-1}$ ) som angir økning i antall (eller biomasse) per dag. For mange organismer er den relative vekstraten høyest når  $N$  er rundt halvmetning. Det blir vanskelig å finne parringspartner når  $N$  er liten, og når  $N$  blir stor gir det konkurranse om mat og andre ressurser. Vekstraten  $r = (b-d)$  hvor  $b$  er fødselsrate og  $d$  er dødsrate.

I virkeligheten kan ingen populasjon vokse eksponensielt i det uendelige.

Ekspensialfunksjonen  $e^x$  er en funksjon som er lik sin deriverte. For forskjellige verdier av  $C$  kan man tegne integralkurver for differensialligningen.

Vi benytter numerisk løsning på den enkle første ordens differensialligningen hvor  $dx/dt$  er proporsjonal med  $x$

$$\frac{dx}{dt} = rx$$

Denne er enkel å løse ved å flytte  $x$  over på venstre side og  $dt$  over til høyre og ta integralet på hver side av likhetstegnet:

$$\int \frac{dx}{x} = r \cdot \int dt$$

Som er lik:

$$\ln x = rt + C$$

Ved tiden  $t=0$  har vi, hvor  $C$  er en integrasjonskonstant:

$$\begin{aligned} \ln x_0 &= C \\ \ln x &= rt + \ln x_0 \\ \ln \frac{x}{x_0} &= rt \end{aligned}$$

og vi finner da den analytiske løsningen:

$$x(t) = x_0 e^{rt}$$

Dette er det samme som den lineære funksjonen hvor veksthastigheten  $r$  er stigningskoeffisienten:

$$\ln(x(t)) = \ln x_0 + r \cdot t$$

Vi finner likevektspunktet når  $dx/dt=0$  og  $x=x_0$ .

Vekstraten for en populasjon kan beskrives som endring i antall individer  $x$  over tiden  $t$ ,  $dx/dt$ .

Den relative vekstraten  $r$  blir:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = r$$

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x$$

En løsning av denne differensialligningen blir lik en eksponensialfunksjon.

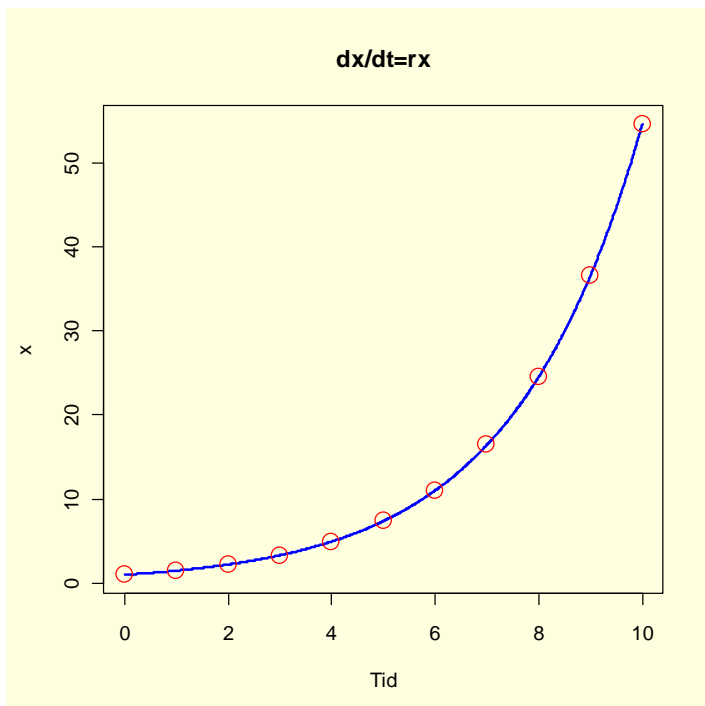
$$x = x_0 \cdot e^{r \cdot t}$$

```
#Du må først hente følgende pakker fra CRAN: deSolve,  
rootSolve og scatterplot3D  
#Numerisk løsning av diffligning for eksponensiell vekst  
#Laster inn pakken deSolve som bl.a. inneholder lsoda  
library(deSolve)  
#Setter inn parameterverdien r for veksthastighet. Kan endres.  
params<-c(r=0.4)  
#Definerer en funksjon som inneholder tid t, x og parameter p  
eksp<-function(t,x,p)  
{  
#Definerer differensialligningen, legg merke til parameter  
dxdt<-p["r"]*x[1]  
#Lager en liste som inneholder dx/dt  
list(dxdt)  
}  
require(deSolve)  
#Definerer tiden  
tid<-seq(0,10,0.01)  
#Definerer startverdi  
start<-1  
#Overfører verdier til lsoda og lagrer resultat i dataramme  
resultat<-as.data.frame(lsoda(start,tid,eksp,params,rtol=1e-4))  
#Plotter grafisk den numeriske løsningen av ligningen  
plot(resultat[,1],resultat[,2],type="n",col="blue",xlab="Tid",  
ylab="Populasjonsstørrelse (x)",main="dx/dt=rx")  
lines(resultat[,1],resultat[,2],col="blue",lwd=3)  
#Sammenligner den numeriske løsningen med den analytiske  
r<-0.4  
t<-seq(0,10,1)  
points(t,exp(r*t),col="red",cex=2)  
#Du har nå løst differensialligningen for eksponensiell vekst  
#Det er alltid praktisk å se på hva et objekt inneholder  
head(resultat)  
resultat[1:20,]  
#Hvilken måleenhet har dx/dt ?  
  
#Gjør det samme men skriver parameterverdien som as.list  
#For en matrise kan man bruke matplot i stedet for plot  
params<-c(r=0.4)  
eksp2<-function(t,x,p)  
{  
with(as.list(p), {
```

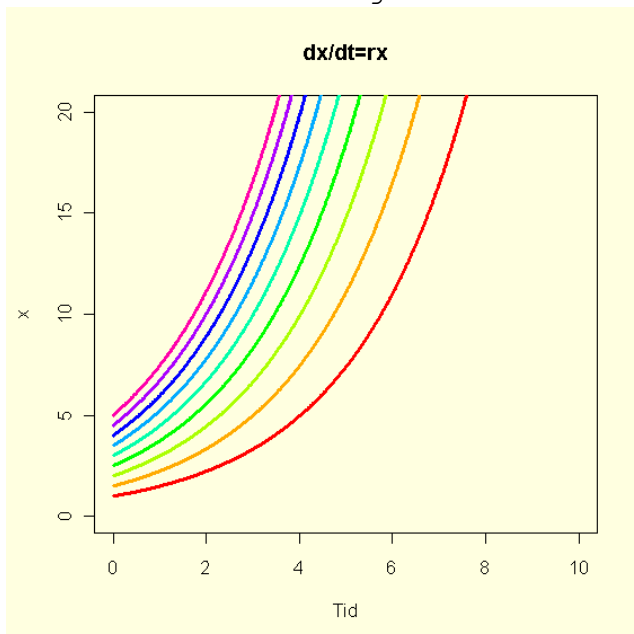
```

dxdt<-r*x[1]
list(dxdt)
})
}
tid2<-seq(0,10,0.01)
start2<-1
resultat2<-
as.data.frame(lsoda(start2,tid2,eksp2,params,rtol=1e-4))
matplot(resultat2[,1],resultat2[,2],type="l",lwd=3,col=2,xlab=
"Tid",ylab="x",main="dx/dt=rx")
#Forsøk å endre verdien av r med positive og negative verdier
#Forsøk å endre initialverdi og tid
#Forskjellige initialverdier
params<-c(r=0.4)
eksp3<-function(t,x,p)
{
with(as.list(p), {
dxdt<-r*x[1]
list(dxdt)
})
}
tid3<-seq(0,10,0.01)
#lager et tomt plot
y<-seq(0,10,0.01)
plot(tid3,y,ylim=c(0,20),type="n",col=4,xlab="Tid",ylab="x",ma
in="dx/dt=rx")
start3<-1
#Lar initialverdiene s variere fra 1 til 5, kan endres
s<-seq(1,5,0.5)
#antall initialverdier
n<-length(s)
for (i in 1:n) {
start3<-s[i]
resultat3<-
as.data.frame(lsoda(start3,tid3,eksp,params,rtol=1e-4))
lines(resultat3[,1],resultat3[,2],col=rainbow(n)[i])
}

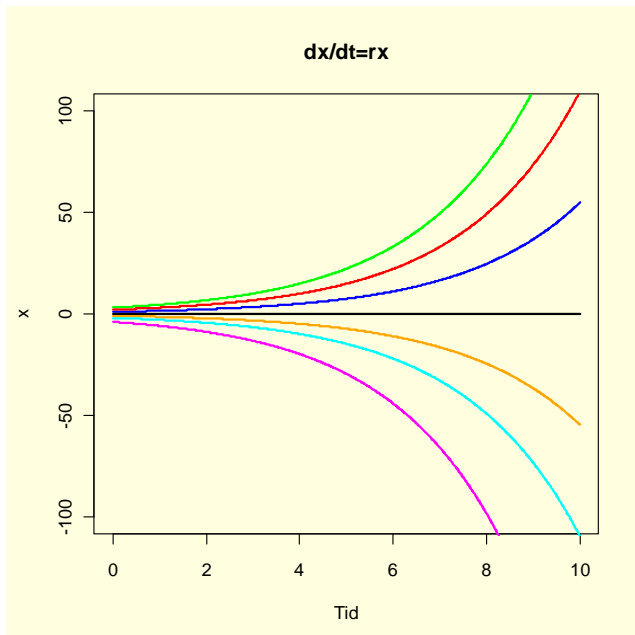
```



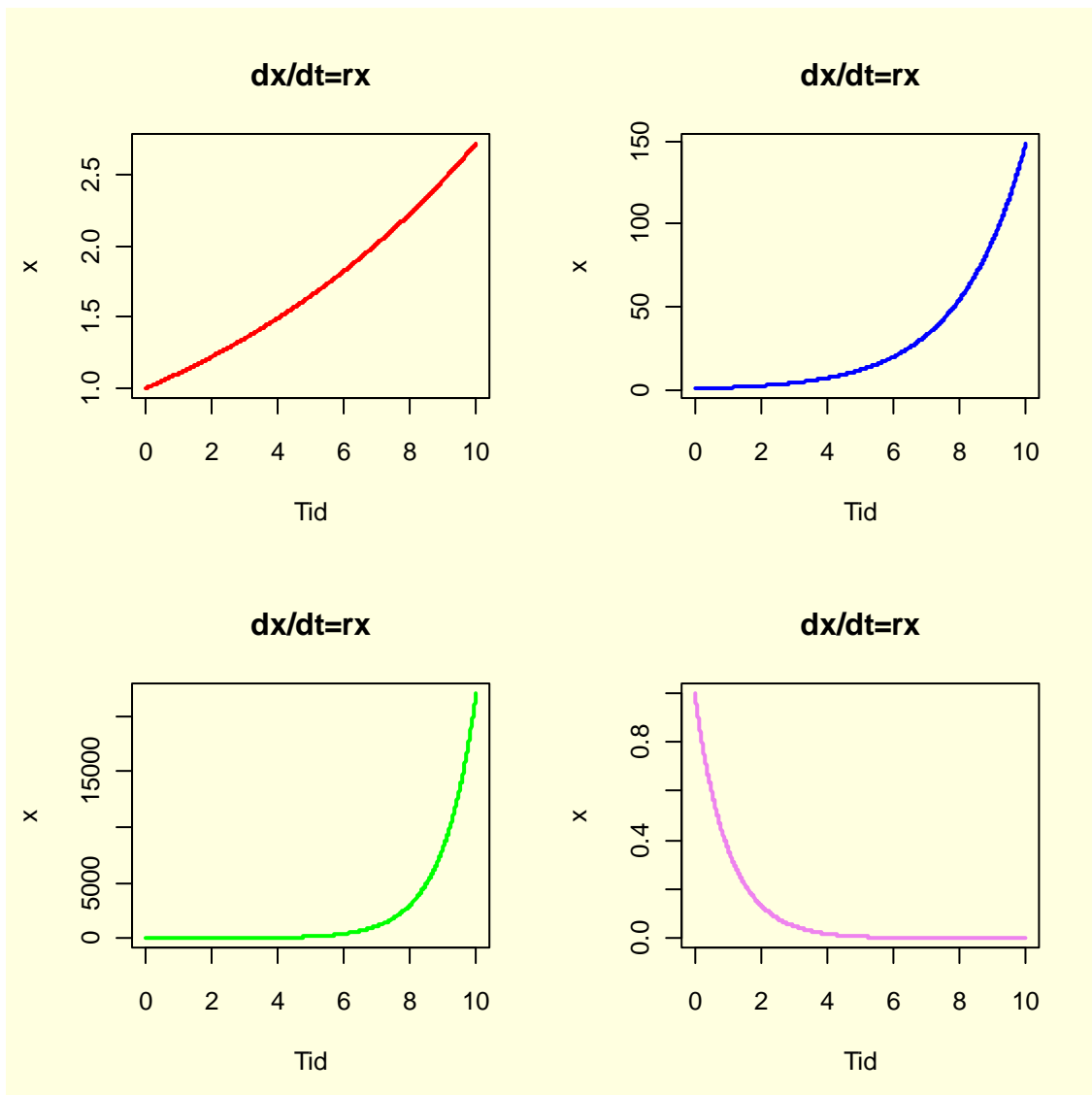
Figur. Numerisk løsning med  $r=0.4$  og startverdi  $x=1$ . I virkeligheten kan ingen populasjon vokse eksponensielt i det uendelige. Ligningen over kan også brukes til å beskrive desintegrasjonen av en radioaktiv isotop, men hvor  $r$  har en negativ verdi. Rød sirkler viser den analytiske løsningen, noe som viser at den numeriske odesolveren *lsoda* gir et bra estimat. For løsning se: Halvor Aarnes: *Bruksanvisning for R*.



Figur.  $r=0.4$  og forskjellige initialverdier 1-5.



Figur. Trajektorier (integralkurver) for  $dx/dt=rx$  for  $r=0.4$  og forskjellige startverdier: -4 (magenta), -2 (cyan), -1 (oransje), 0 (svart), 1 (blå), 2 (rød), og 3 (grønn)



Figur. Numerisk løsning av  $dx/dt=rx$  for forskjellige verdier av  $r$ . Startverdi for  $x=1$ . Øverst venstre:  $r=0.1$ , øverst høyre:  $r=0.5$ , nederst venstre:  $r=1$ , og nederst høyre  $r=-1$

## Logistisk ligning og logistisk vekst

Ingen populasjon kan fortsette med eksponensiell vekst til evig tid. Populasjoner kan imidlertid følge en **logistisk vekstligning** brukt av P. F. Verhulst i 1838 for å beskrive vekst av menneskepopulasjonen

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

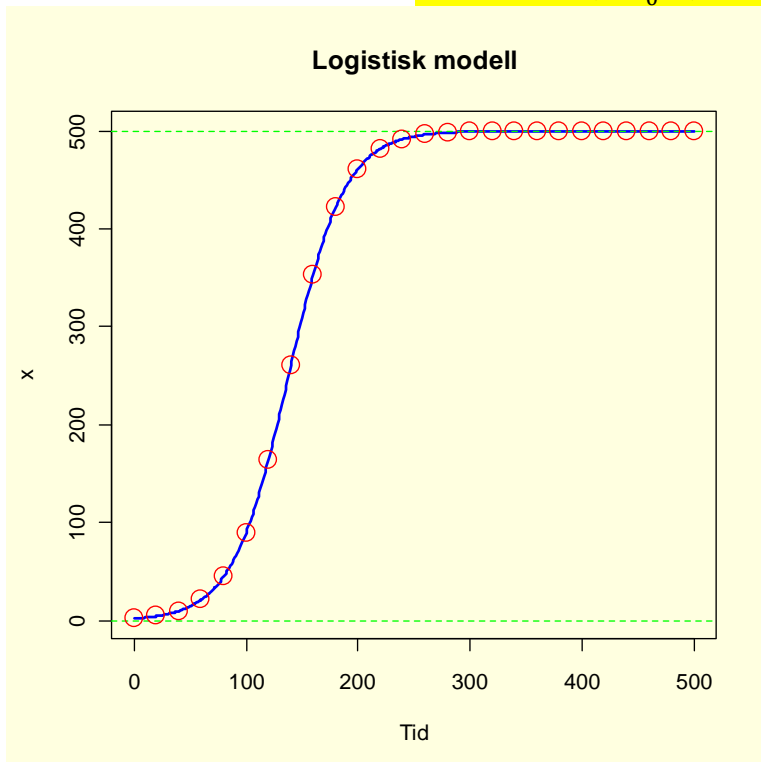
hvor populasjonen vil nærme seg bærekapasiteten  $K$ ,  $N(t) \rightarrow K$  når  $t \rightarrow \infty$ , unntatt når  $N_0=0$ . Faste punkter er  $N=0$  og  $N=K$ . Den logistiske ligningen er ganske god til å beskrive veksten av enkle organismer som bakterier, gjær og encellede alger, men er lite egnet hvis organismen har flere livsstadier e.g. insekter.



$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Hvor  $r$  er veksthastighet og  $K$  er bærekapasitet. Det er vanligvis meget vanskelig å finne analyttiske løsninger av en ikke-lineær differensialligning, men i dette tilfelle kan vi finne den analytiske løsningen ved integrering:

$$x(t) = \frac{K}{\left[1 + \left(\frac{K - x_0}{x_0}\right) \cdot e^{-rt}\right]}$$



Figur Viser numerisk løsning av en logistisk vekstkurve for  $r=0.04, K=500$ , initialverdi  $x_0=2$  (blå). Kurven vil assymptotisk nærme seg bærekapasiteten  $K=500$ . Analyttisk løsning som røde punkter, og vi ser at det er god overensstemmelse mellom numerisk og analyttisk løsning av differensialligningen.

#Logistisk vekstkurve

```

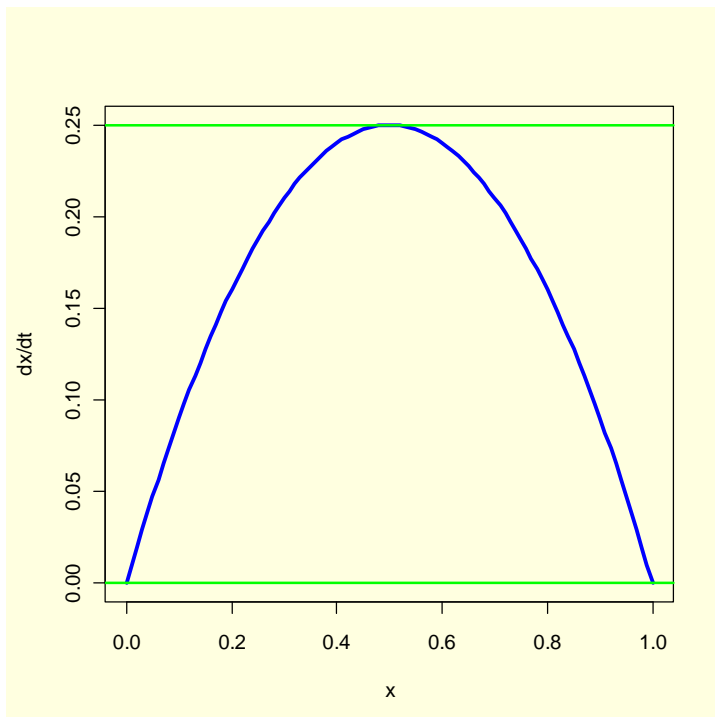
params<-c(r=0.04,K=500)
logistisk<-function(t,x,p)
{
  with(as.list(p), {
    dxdt<-r*x*(1-(x/K))
    list(dxdt)
  })
}
require(deSolve)
time<-0:500
init<-2 #startverdi
results<-
as.data.frame(lsoda(init,time,logistisk,params,rtol=1e-4))
plot(results[,1],results[,2],type="n",xlab="Tid",

```

```

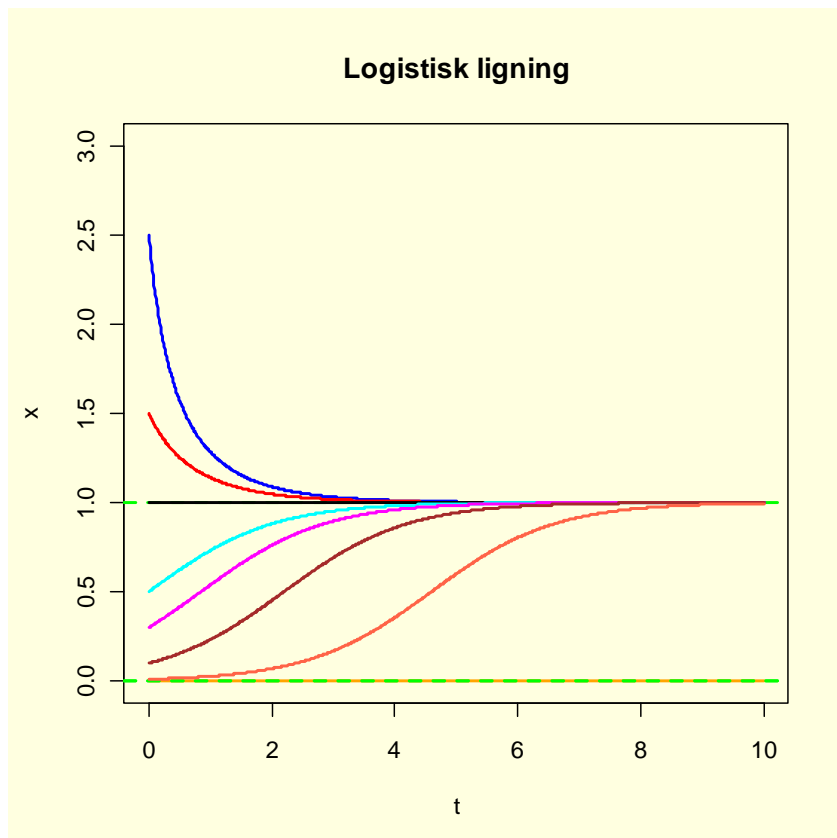
ylab="Populasjonsstørrelse (x)",
main="Logistisk modell")
lines(results[,1],results[,2],col=4,lwd=3)
abline(h=c(0,500),col=3,lty=2)
#Sammenligner med den analytiske løsningen
r<-0.04
x0<-2
K<-500
t<-seq(0,500,20)
points(t,K/(1+((K-x0)/x0)*exp(-r*t)),col="red",cex=2)
#Du kan forsøke å endre K

```



Figur. Logistisk differensialligning for  $x_0=0.01$  og  $r=1$ . Den deriverte  $dx/dt=0$  ved  $x=0$  og  $x=1$ . Den deriverte har et vendepunkt ved  $x=0.5$  og  $dx/dt$  har maksimalpunkt ved  $r/4$ . For mange organismer er den effektive vekstraten høyest når  $N$  er intermediær.

Ved likevekt er den førstederiverte lik null,  $dx/dt=0$ , dvs.  $rx-rx^2=0$  som har løsninger  $x=0$  og  $x=1$ . Den logistiske differensialligningen er et ikke-lineært flyt mellom to likevekter.



Figur. Viser logistisk differensialligning ved forskjellige initialverdier. Konjurerer mot 1 når  $t \rightarrow \infty$  og nærmer seg 0 når  $t \rightarrow -\infty$ . Vektorfelter vil være tangenter til løsningene på figuren. Initialverdier 2.5 (blå), 1.5 (rød), 1 (svart), 0.5 (cyan), 0.3 (magenta), 0.1 (brun), 0.01 (tomat). Ved grafisk framstilling av løsningene av en differensialligning så vil løsningene (punktene) bevege seg i et abstrakt faserom og følge **trajektorier**. Disse trajektoriene vil etter hvert nærme seg grenser eller assymptoter.

Før vi går videre skal vi se på en enklere utgave av den **logistiske differensialligningen**:

$$\frac{dx}{dt} = r * x(1 - x) = r * x - r * x^2$$

Vi setter initialverdi  $x_0=0.01$  og  $r=1$ . Den analyttiske løsningen er:

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) * e^{-r*t}}$$

```
params<-c(r=1)
logistisk2<-function(t,x,p)
{
with(as.list(p), {
dxdt<-r*x*(1-x)

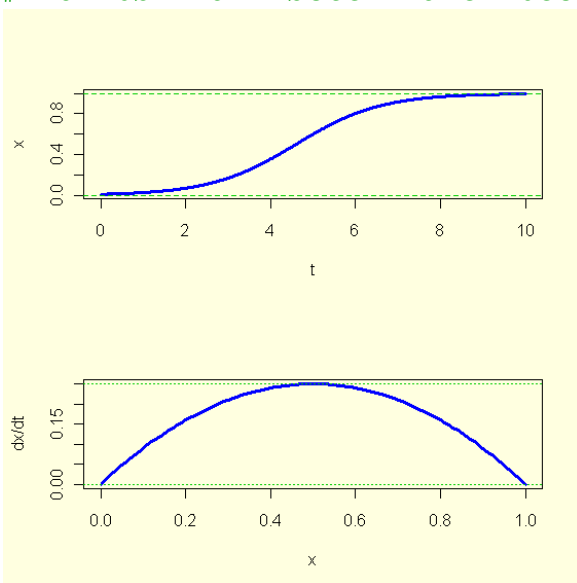
list(dxdt)
})
```

```

}
require(deSolve)
time2<-seq(0,10,0.01)
init2<-0.01
results2<-
as.data.frame(lsoda(init2,time2,logistisk2,params,rtol=1e-4))
plot(results2[,1],results2[,2],type="n",col=4,xlab="t",ylab="x",
      ,main="Logistisk ligning")
lines(results2[,1],results2[,2],col=4)
abline(h=c(0,1),lty=2,col=3)
#Se at numerisk og analytisk løsning stemmer overens
r<-1
x0<-0.01
t<-seq(0,10,1)
points(t,1/(1+(1/x0-1)*exp(-r*t)),col=2,cex=1.5)

#Vi kan plotte den deriverte dx/dt mot x
x<-seq(0,1,0.01)
y<-r*x*(1-x)
plot(x,y,col=4,type="l",lwd=3,xlab="x",ylab="dx/dt")
abline(h=c(0,0.25),lty=3,col=3)
#For å se hva som skjer med den deriverte se på begge figurene
par(mfrow=c(2,1))
plot(results2[,1],results2[,2],type="n",col=4,xlab="t",ylab="x")
lines(results2[,1],results2[,2],lwd=3,col=4)
abline(h=c(0,1),lty=2,col=3)
plot(x,y,col=4,type="l",lwd=3,xlab="x",ylab="dx/dt")
abline(h=c(0,0.25),lty=3,col=3)
#den deriverte=0 ved maksimums- og minimumspunkter
#Hvor bør man høste fra en bestand med logistisk vekst ?

```

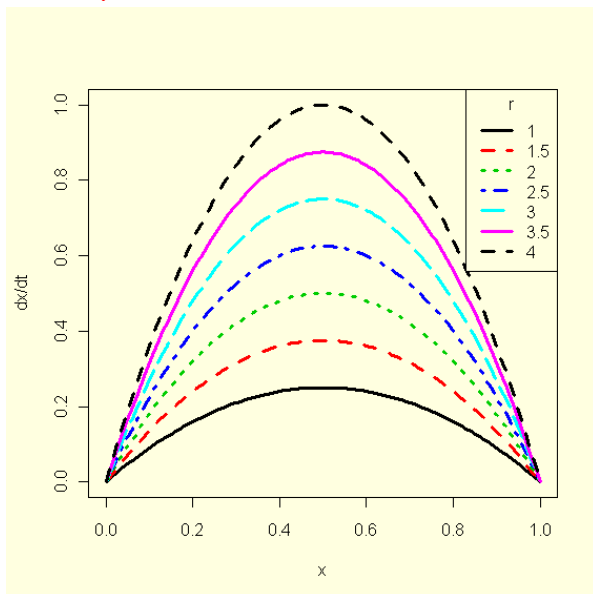


```

#eller for flere verdier av r:
x<-seq(0,1,0.01)
r<-seq(1,4,0.5)

```

```
logistisk3<-outer(x,r, function(x,r) -r*x^2+r*x)
matplot(x,logistisk3,type="l",lwd=3,ylab="dx/dt")
legend("topright",as.character(r),title="r",lty=1:5,col=1:6,
lwd=3)
```



Ved likevekt er den førstederiverte lik null,  $dx/dt=0$ , dvs.  $rx-rx^2=0$  som har løsninger  $x=0$  og  $x=1$ . Den deriverte har et vendepunkt ved  $x=0.5$  og  $dx/dt$  har maksimalpunkt ved  $r/4$ . For mange organismer er den effektive vekstraten høyest når  $N$  er intermediær.

Den logistiske differensialligningen er et ikke-lineært flyt mellom to likevekter.

Logistisk differensialligning ved forskjellige initialverdier, konjugerer mot 1 når  $t \rightarrow \infty$  og nærmer seg 0 når  $t \rightarrow -\infty$ .

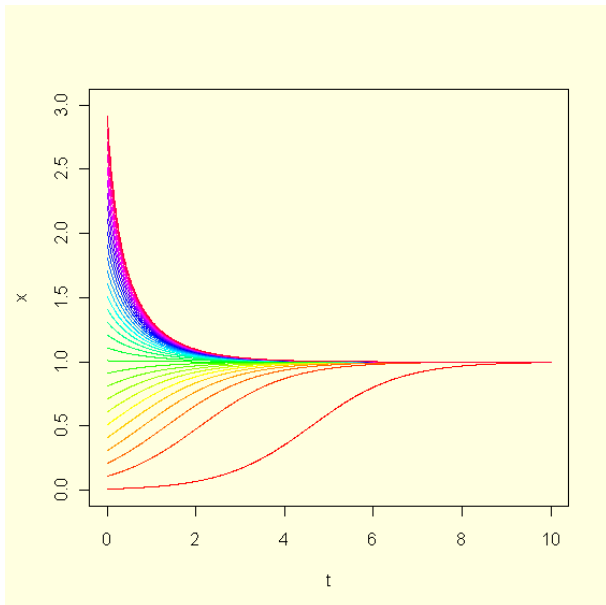
Vektorfelter vil være tangenter til løsningene på figuren.

```
#Logistisk vekstkurve med forskjellige initialverdier
params<-c(r=1)
logistisk4<-function(t,x,p) {
with(as.list(p), {
dxdt<-r*x*(1-x)
list(dxdt)
})
}
require(deSolve)
time3<-seq(0,10,0.01)
#forskjellige initialverdier s
s<-seq(0.01,3,0.1)
n2<-length(s) #antall initialverdier
#tomt plot
y<-seq(0,10,0.01)
plot(time3,y,ylim=c(0,3),type="n",xlab="t",ylab="x")
for (i in 1:n2) {
init3<-s[i]
```

```

results3<-
as.data.frame(lsoda (init3, time3, logistisk4, params, rtol=1e-4))
lines (results3[,1], results3[,2], col=rainbow (n2) [i])
}

```



Som differensligning med diskrete tidstrinn blir den logistiske avbildningen:

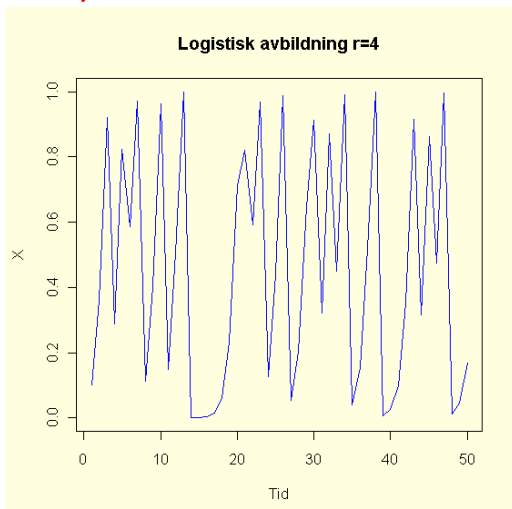
$$X_{n+1} = rX_n(1 - X_n)$$

For økende verdi av r får man bifurkasjoner og ved r=4 får man et ikke predikterbart system med kaos

```

#logistisk avbildning r=4
x<-rep(0,50)
r<-4
x[1]=0.1
for (t in 2:50) x[t]<-r*x[t-1]*(1-x[t-1])
plot(1:50,x,type="l",col=4,
ylim=c(0,1),xlab="Tid",ylab="X",main="Logistisk avbildning
r=4")

```



Vi kan beregne Lyapunovveksponten for funksjonen

$$f(x) = rx(1-x)$$

hvor den førstederiverte blir:

$$f'(x) = r(1-2x)$$

Vi ser at den deriverte er lik 0 i maksimumspunktet  $x=0.5$ .

**#parabel og den deriverte**

```
r<-4
```

```
f<-function(x) r*x*(1-x)
```

```
curve(f,-5,5,ylim=c(-80,20),col=2,lwd=3)
```

```
#førstederiverte
```

```
dfdt<-D(expression(r*x*(1-x)), "x")
```

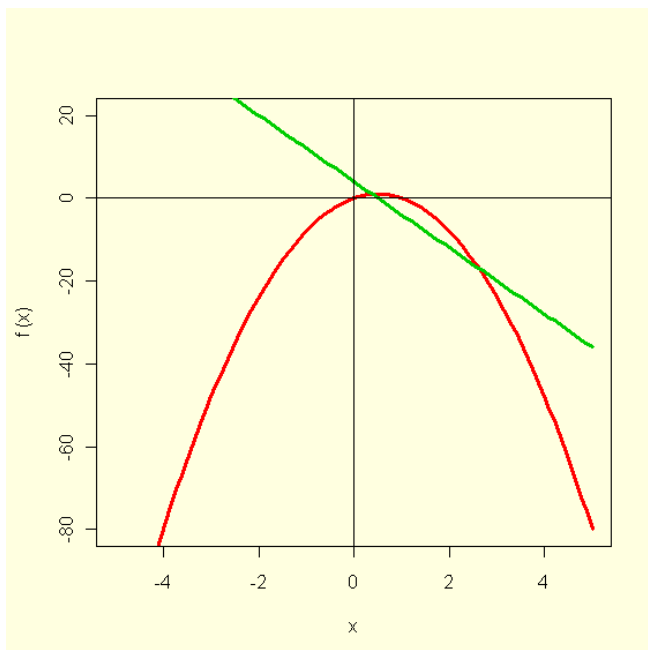
```
dfdt
```

```
r * (1 - x) - r * x
```

```
fderiv<-function(x) {eval(dfdt)}
```

```
curve(fderiv,-5,5,add=T,col=3,lwd=3)
```

```
abline(v=0,h=0)
```



For en endimensjonal avbildning

$$X_{n+1} = f(X_n)$$

vil to nærliggende punkter  $x_0$  og  $x_0 + \Delta x$  bli atskilt etter en iterasjon

$$\Delta x_1 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) \cong \Delta x_0 f'(x_0)$$

Vi kan definere en **lokal Lyapunovvekspont**  $\lambda$  hvor vi har for absoluttverdien:

$$e^\lambda = \left| \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \right| = |f'(x_0)|$$

Vi tar den naturlige logaritmen på begge sider av likhetstegnet og får:

$$\lambda = \ln \left| \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \right| \cong \ln |f'(x_0)|$$

Lokale Lyapunovvekspontener kan variere mye i verdi, kan også være negative.

Den globale Lyapunov eksponenten  $\lambda$  etter flere iterasjoner for den logistiske avbildningen i eksemplet over blir:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln|r(1 - 2X_n)|$$

Lyapunov eksponenten blir lik  $\log(2)$ . Pakken `fractal`

## Sirkulær bevegelse

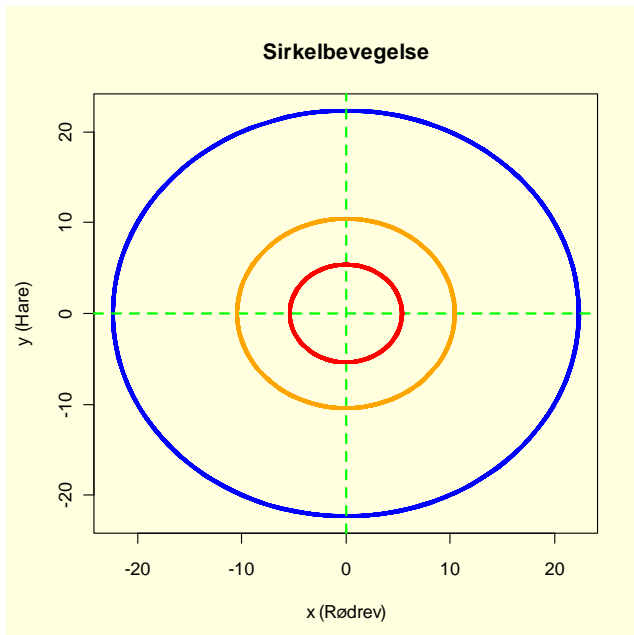
Anta i et enkelt system at vi har en stabil bestand av predatoren rødrev og byttedyret hare. Ved  $t=0$  blir det satt ut et overskudd av hare,  $y=y_0$ . Revene får mer mat og revebestanden øker, og disse dreper flere harer slik at harebestanden begynner å synke. Endring i revebestanden  $dx/dt$  og harebestanden  $dy/dt$  kan beskrives av differensialligningene:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -x$$

```
library(deSolve)
params<-
sirkel <-function(t,x,p)
{
dxdt<-x[2]
dydt<--x[1]
list(c(dxdt,dydt))
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,100,0.1)
start<-c(10,20)
resultat<-lsoda(init.state,out.time,sirkel,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(resultat[,2],resultat[,3],type="n",ylab="y
(Hare)",xlab="x (Rødrev)",main="Sirkelbevegelse")
lines(resultat[,2],resultat[,3],col=4,lwd=3)
abline(h=0,col=3)
abline(v=0,col=3)
#sett inn andre startverdier og plot resultat med lines
```





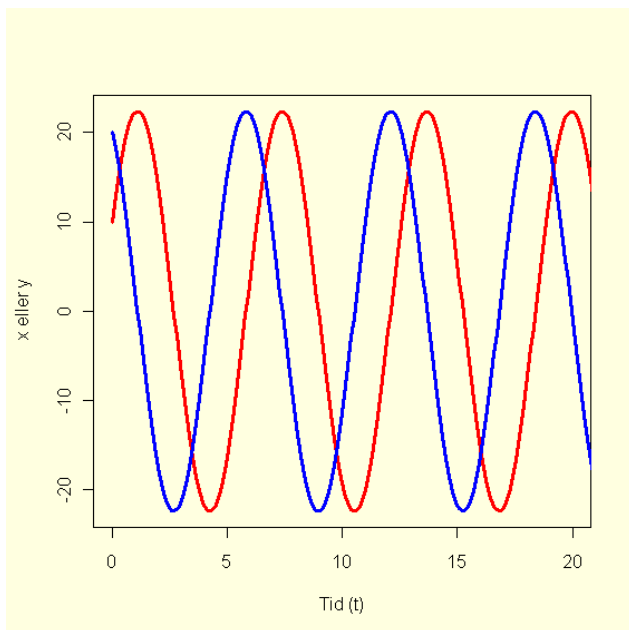
Figur. Fasediagram som viser lineær flyt omkring origo. Startbetingelser  $(10,20)$ , blå),  $(2,5)$ , rød) og  $(3,10)$ , oransje). En lukket løkke i fasediagrammet indikerer periodiske svingninger, som vi kan observere i tidsseriediagrammet nedenfor. Hadde systemet vært stabilt hadde trajektoriet vist seg som bare ett punkt.

### #tidsserieplot

```

params<-
sirkel <-function(t,x,p)
{
dxdt<-x[2]
dydt<--x[1]
list(c(dxdt,dydt))
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,100,0.1)
start<-c(10,20)
resultat<-lsoda(init.state,out.time,sirkel,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(resultat[,1],resultat[,2],type="n",xlim=c(0,20),ylab=" x
eller y",xlab="Tid (t)")
lines(resultat[,1],resultat[,2],col=2,lwd=3)
lines(out.state[,1],out.state[,3],col=4,lwd=3)

```



Figur. Tidsseriedigram for rødrev (x, rød) og hare (y, blå). Populasjonene gjennomgår sinusoscillasjoner med  $90^\circ$  ut av fase fra hverandre.

## Lotka-Volterra ligningen

Lotka-Volterra ligningen er et par første ordens ikke-linære differensialligninger som beskriver dynamikken når to arter interagerer med hverandre: predator (P) og byttedyr (B). Den italienske biologen Umberto D'Ancona hadde i 1926 tidsseriedata for fiskefangst i det nordlige Adriaterhavet med bl.a. prosenten av de forskjellige fiskeslagene på markedene i Trieste, Fiume og Venezia. Under første verdenskrig hvor fisket var redusert fant Ancona økt andel av predatorer (hai, skate, rokker). Ancona kontaktet Volterra som utviklet en modell for å kunne forklare fenomenet. Modellen er en forenkling av virkeligheten, men gir et innblikk i bruk av modeller. Det ble mulig å forklare hvordan økt fiske kunne lede til mer fisk, ved at mengden predatorer også synker og det kompenserer for tapet av fisket (Volterras paradoks). Ved bruk av DDT mot skadeinsekter ble også insekter som predaterte på skadeinsektene også drept, slik at i noen tilfeller økte mengden skadeinsekter etter DDT-behandlingen ! Tankegangen ble presentert av både **Alfred J. Lotka** (1925) i studiet av kjemiske likevekter, og av **Vito Volterra** (1926). Endring i byttedyrbestand over tid er  $dB/dt$  og kan beskrives som:

$$\frac{dB}{dt} = r \cdot B \cdot \left( \frac{K - B}{K} \right) - b \cdot B \cdot P$$

Endring i bestanden av predatorer er  $dP/dt$  og kan beskrives som

$$\frac{dP}{dt} = c \cdot B \cdot P - d \cdot P$$

Ligningene har en rekke konstanter:

$r$  - vekstraten for byttedyr uten predator tilstede

$b$  - effekten av predator på byttedyr

$d$  - dødsrate for predator i fravær av byttedyr

$c$  - effektivitet og formeringsrate hos predator

Predatorer dør i mangel på mat beskrevet av  $dP/dt = -dP$ .

I ligningen for byttedyr har vi satt inn et ledd  $(K-B)/K$  hvor vi antar at byttedyrbestanden ikke vokser uendelig, men når et metningsnivå med en **bærekapasitet**  $K$ .

## Tidsseriediagram

```
#Lotka-Volterra tidsserie
#Parameterverdier (params)
params<-c(r=0.4,K=1000,b=0.03,c=0.02,d=0.5)
lotkavolterra<-function(t,x,p)
{
  with(as.list(p), {
    dbdt<-r*x[1]*(K-x[1])/K-b*x[1]*x[2]
    dpdt<-c*x[1]*x[2]-d*x[2]
    list(c(dbdt,dpdt))
  })
}
require(deSolve)
tid<-0:1000
start<-c(50,10)
results<-
as.data.frame(lsoda(start,tid,lotkavolterra,params,rtol=1e-4))
plot(results[,1],results[,2],xlim=c(0,1000),ylim=c(0,80),type=
"n",ylab="Predator eller byttedyr",
xlab="Tid",main="Lotka-Volterra")
lines(results[,1],results[,2],col=2)
lines(results[,1],results[,3],col=4)
text(200,45,"Byttedyr",col=2)
text(200,5,"Predator",col=4)
#Hvor skjer det stabilisering ?
```

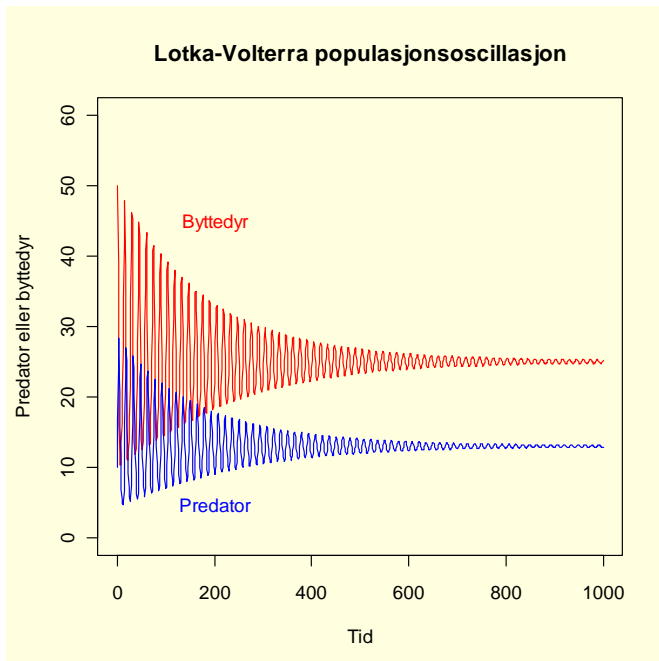
## Fasediagram

```
#Lotka-Volterra fasediagram
#Parameterverdier (params)
params<-c(r=0.4,K=1000,b=0.03,c=0.02,d=0.5)
lotkavolterra<-function(t,x,p)
{
```

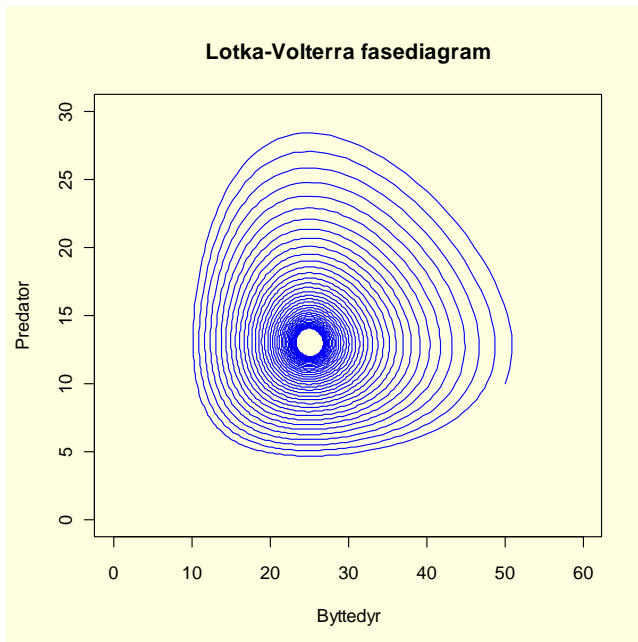
```

with(as.list(p), {
dbdt<-r*x[1]*(K-x[1])/K-b*x[1]*x[2]
dpdt<-c*x[1]*x[2]-d*x[2]
list(c(dbdt,dpdt))
})
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,500,0.1)
start<-c(50,10)
results<-
as.data.frame(lsoda(start,tid,lotkavolterra,params,rtol=1e-4))
plot(results[,2],results[,3],xlim=c(0,60),ylim=c(0,30),type="n",
      ylab="Predator",
      xlab="Byttedyr",main="Lotka-Volterra fasediagram")
lines(results[,2],results[,3],col=4)
#Hvor mange predatorer og byttedyr er det ved stabilisering ?

```



Figur 1. Lotka-Volterra ligningen for svingninger (oscillasjoner) i populasjoner av byttedyr og predator. Konstanter:  $r=0.3$ ,  $K=1000$ ,  $b=0.03$ ,  $c=0.02$ ,  $d=0.5$ . Start med 60 byttedyr og 10 predatorer. Etter en periode med store svingninger i begge populasjonene vil de etter hvert stabilisere seg ved  $r/b = 0.3/0.03 = 10$  (predator) og  $d/c = 0.5/0.02 = 25$  (byttedyr). I denne figuren er det foretatt numerisk løsning av differensialligningen.



Figur Figur. Fasediagram for  $r=0.4, K=1000, b=0.03, c=0.02, d=0.5$ . Starter med 50 byttedyr og 10 predatorer (`init.state<-c(50,10)`). Ved likevekt er  $(B, P) = (d/c, r/b) = (0.5/0.02, 0.4/0.03) = (25, 13)$ , som vi kan se av figuren er likevektspunktet med 25 byttedyr og 13 predatorer.

Hvis alle trajektoriene nærmer seg ett punkt er systemet stabilt. Kvasiperiodiske systemer har flere uavhengige periodiske spiraler rundt en torus.

Fasediagrammet har to akser, en for hver av de to populasjonene.

Ethvert punkt i faserommet kan virke som initialbetingelser for systemet. I ethvert punkt på trajektoriet kan det trekkes en vektortangent som viser i hvilken retning systemet beveger seg og størrelsen på vektoren angir hvor stor forandringen er. Faserommet består av en mengde vektorer, danner et vektorfelt, som viser hvordan systemet oppfører seg.

Trajektoriene beskriver hvilken vei et punkt beveger seg. Hvis vi starter å følge trajektoriet fra initialbetingelser (50,10) ser vi at predatorbestanden stiger, mens byttedyrbestanden synker. Dette skjer til vi når et maksimum og predatorbestanden begynner å synke. Vi finner nullkliner hvor  $dB/dt=dP/dt=0$ . I et faseportrett kan alle mulige trajektorier beskrives og kan betraktes som flytlinjene til en partikkel i en væske.

Hvis vi utelater leddet med bærekapasitet:

$$\frac{dB}{dt} = r \cdot B - b \cdot B \cdot P$$

$$\frac{dP}{dt} = c \cdot B \cdot P - d \cdot P$$

```

#Lotka-Volterra tidsserie uten K
#Parameterverdier (params)
params<-c(r=0.4,b=0.03,c=0.02,d=0.5)
lotkavolterra<-function(t,x,p)
{
with(as.list(p), {
dbdt<-r*x[1]-b*x[1]*x[2]
dpdt<-c*x[1]*x[2]-d*x[2]
list(c(dbdt,dpdt))
})
}
require(deSolve)
tid<-0:100
start<-c(50,10)
results<-
as.data.frame(lsoda(start,tid,lotkavolterra,params,rtol=1e-4))
plot(results[,1],results[,2],xlim=c(0,100),ylim=c(0,60),type="n",
ylab="Predator eller byttedyr",
xlab="Tid",main="Lotka-Volterra")
lines(results[,1],results[,2],col=2)
lines(results[,1],results[,3],col=4)
text(10,55,"Predator",col=4)
text(10,60,"Byttedyr",col=2)

```

```

#Lotka-Volterra fasediagram uten K
params<-c(r=0.4,b=0.03,c=0.02,d=0.5)
lotkavolterra<-function(t,x,p)
{
with(as.list(p), {
dbdt<-r*x[1]-b*x[1]*x[2]
dpdt<-c*x[1]*x[2]-d*x[2]
list(c(dbdt,dpdt))
})
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,500,0.1)
start<-c(50,10)
results<-
as.data.frame(lsoda(start,tid,lotkavolterra,params,rtol=1e-4))
par(bg="lightyellow")
plot(results[,2],results[,3],xlim=c(0,60),ylim=c(0,30),type="n",
ylab="Predator",
xlab="Byttedyr",main="Lotka-Volterra fasediagram")
lines(results[,2],results[,3],col=4)

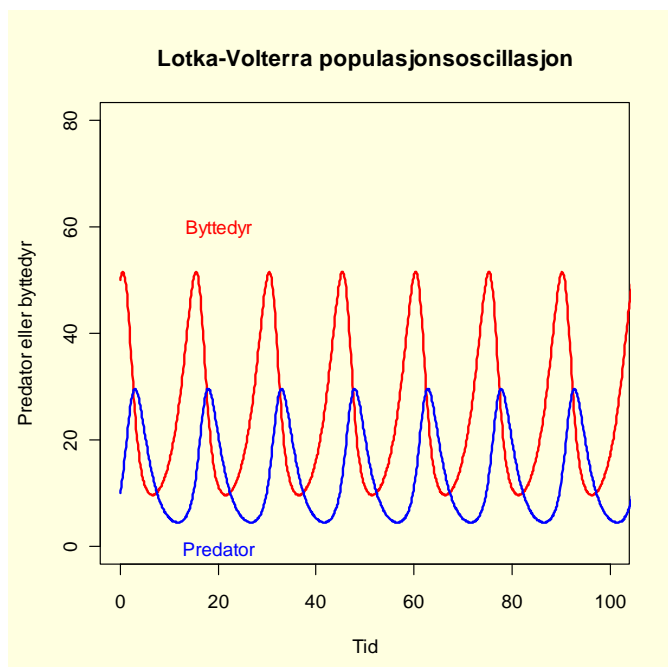
```

Byttedyrbestanden svinger mellom 10 og 50, og predatorbestanden svinger mellom 5 og 30.

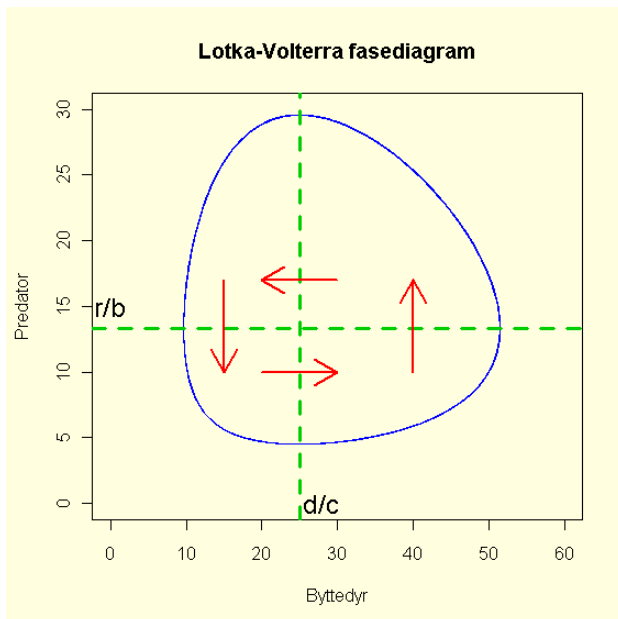
```

#Lotka-Volterra fasediagram uten K
params<-c(r=0.4,b=0.03,c=0.02,d=0.5)
lotkavolterra<-function(t,x,p)
{
with(as.list(p), {
dbdt<-r*x[1]-b*x[1]*x[2]
dpdt<-c*x[1]*x[2]-d*x[2]
list(c(dbdt,dpdt))
})
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,500,0.1)
start<-c(50,10)
results<-
as.data.frame(lsoda(start,tid,lotkavolterra,params,rtol=1e-4))
plot(results[,2],results[,3],xlim=c(0,60),ylim=c(0,30),type="n",
,ylab="Predator",
xlab="Byttedyr",main="Lotka-Volterra fasediagram")
lines(results[,2],results[,3],col=4)
r<-0.4;b<-0.03;c<-0.02;d<-0.5
abline(h=r/b,v=d/c,lty=2,lwd=3,col=3)
arrows(20,10,30,10,col=2,lwd=2)
arrows(30,17,20,17,col=2,lwd=2)
arrows(40,10,40,17,col=2,lwd=2)
arrows(15,17,15,10,col=2,lwd=2)
text(0,15,"r/b",cex=1.5)
text(28,0,"d/c",cex=1.5)

```



Figur. Tidsseriediagram Lotka-Volterra uten ledd for bærekapasitet. Byttedyrbestanden svinger mellom 10 og 50, og predatorbestanden svinger mellom 5 og 30.



Figur. Lotka-Volterra faseportrett (faseportrett). I hvert punkt på trajektoriene (blå) kan det trekkes tangenter som viser i hvilken vei systemet beveger seg. Ved  $d/c$  og  $r/b$  er de deriverte lik 0 ( $d/c=25$  byttedyr, og  $r/b=13.3$ ) som beskriver gjennomsnittspopulasjonen av byttedyr og predatorer i en syklus. Deretter skifter systemet retning og beveger seg i retningen som de røde pilene viser, horisontale **nullkliner** for byttedyr og vertikale nullkliner for predatorer. Trajektoriene vender tilbake til utgangspunktet i en lukket geometrisk løkke.

Vi må først finne maksimums- og minimumspunktene til systemet hvor de deriverte er lik 0 og vi har likevektspunkter, nullvekstisokliner for predator og byttedyr

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dP}{dt} = 0$$

Deretter undersøker man hvordan systemet oppfører seg rundt likevektspunktene maksimum og minimum.

$$\frac{dB}{dt} = B \cdot (r - b \cdot P) = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = P \cdot (c \cdot B - d) = 0$$

Som gir:

$$(B, P) = \left( \frac{d}{c}, \frac{r}{b} \right)$$

Jacobi-matrisen ( $J(B, P)$ ) med de partiellderiverte i predator-byttedyrligningen kan brukes til å undersøke stabiliteten ved et fast punkt. For ligningene:



$$\frac{dB}{dt} = r \cdot B - b \cdot B \cdot P$$

$$\frac{dP}{dt} = c \cdot B \cdot P - d \cdot P$$

Blir Jacobi-matrisen:

$$J(B,P) = \begin{bmatrix} r - b \cdot P & -b \cdot P \\ c \cdot B & c \cdot B - d \end{bmatrix}$$

Ved likevekt  $J(B,P) = J(0,0)$  blir denne:

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

Vi finner egenverdiene ( $\lambda$ ) ved å løse:

$$\begin{vmatrix} r - \lambda & 0 \\ 0 & -d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Og finner egenverdiene  $\lambda_1 = r$  og  $\lambda_2 = -d$ . En positiv og en negativ egenverdi tilsvarer en ustabil sadelnode.

De to tilsvarende egenvektorene ( $v$ ) danner to akser:

$$J \cdot v = \lambda \cdot v$$

Generelt om stabilitet ved likevektspunkt og Jacobimatriser:  
Hvis vi har et system med to differensialligninger med initialverdier  $(x_0, y_0)$  ved tid  $t=0$ :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y) \end{aligned}$$

Så kalles matrisen med de partiellderiverte for Jacobimatrise  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Jacobimatrise, egenverdier og egenvektorer benyttes i studiet av stabiliteten av likevektspunkter i differensialligningene. Det kan være stabil eller ustabil likevekt. Systemet vokser eller synker i retning bestemt av egenvektorene og med hastighet bestemt av egenverdiene.

## Lotka Volterra konkurransemodell

Logistisk modell som gir mer intraspesifikk konkurranse ettersom populasjonsstørrelsen øker. Vi har to arter med

endring i antall arter over tid ( $n_1$  og  $n_2$ ) med veksthastigheter  $r_1$  og  $r_2$  og bærekapasitet  $K_1$  og  $K_2$ , hvor  $a_{12}$  og  $a_{21}$  er konkurransekoeffisienter,  $a_{12}$  er per capita effekten av art2 på art1. Dette er en symmetrisk modell:

$$\frac{dn_1}{dt} = r_1 \cdot n_1 \left( \frac{K_1 - n_1 + a_{12} \cdot n_2}{K_1} \right)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = r_2 \cdot n_2 \left( \frac{K_2 - n_2 + a_{21} \cdot n_1}{K_2} \right)$$

Hvis artene ikke interagerer dvs.  $a_{12}$  og  $a_{21}$  begge er lik 0 blir det en logistisk ligning. Hvis koeffisientene  $a_{12}$  og  $a_{21}$  begge er negative har vi mutualisme, hvis en er negativ og den andre er lik 0 er det kommensalisme. Hvis  $a_{12}$  og  $a_{21}$  begge er positive er det konkurranse mellom artene, og har de motsatt fortegn er det parasittisme.

**#Lotka-Volterra konkurransemodell**

**#Parameterverdier p**

**p<-c(r1=0.04,r2=0.02,K1=1000,K2=400,a12=0.01,a21=0.02)**

**lvkonkurr<-function(t,x,p)**

**{**

**with(as.list(p), {**

**n1<-x[1]**

**n2<-x[2]**

**dn1dt<-r1\*n1\*((K1-n1+a12\*n2)/K1)**

**dn2dt<-r2\*n2\*((K2-n2+a21\*n1)/K2)**

**list(c(dn1dt,dn2dt))**

**})**

**}**

**require(deSolve)**

**tid<-seq(0,400,1) #tid**

**start<-c(50,10) #startantall(n1,n2)**

**out<-**

**as.data.frame(lsoda(start,tid,lvkonkurr,p,rtol=1e-4))**

**par(bg="lightyellow")**

**plot(out[,1],out[,2],xlim=c(0,400),ylim=c(0,1000),**

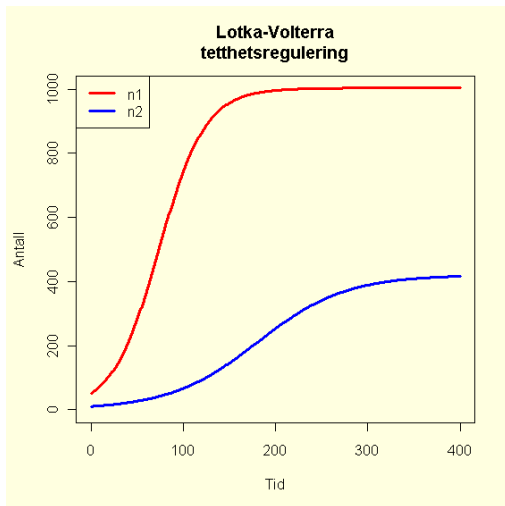
**type="n",ylab="Antall",xlab="Tid",main="Lotka-Volterra**

**tetthetsregulering")**

**lines(out[,1],out[,2],col=2,lwd=3)**

**lines(out[,1],out[,3],col=4,lwd=3)**

**legend("topleft",c("n1","n2"),col=c(2,4),lwd=c(3,3))**



Det finnes mange modeller for sammenhengen mellom endring i antall byttedyr over tid ( $dy_1/dt$ ) og antall predator over tid ( $dy_2/dt$ ) hvor  $K$  (bærekapasitet),  $a$  (dødsrate for predator i fravær av byttedyr),  $b$ , og  $c$  (effektivitet og formeringsrate hos predator) er konstanter:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 \left(1 - \frac{y_1}{K}\right) - y_2 \cdot y_1^b$$

$$\frac{dy_2}{dt} = c \cdot y_2 \cdot y_1^b - a \cdot y_2$$

Rosenzweig-MacArthur predator byttedyrmodell hvor  $dy_1/dt$  er endring bestanden av byttedyr og  $dy_2/dt$  er endringen i predatorbestanden:

$$\frac{dy_1}{dt} = r_1 \cdot y_1 \left(1 - \frac{y_1}{K_1}\right) - y_2 \frac{a_1 y_1}{B + y_1}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_2 \frac{a_2 y_1}{B + y_1} - r_2 y_2$$

Med konstanter  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $B$  og  $K_1$ .

**#Rosenzweig-MacArthur predator byttedyrmodell**

**#Parameterverdier p**

**p<-c(a1=2,a2=2,r1=1,r2=1, K1=700,B=200)**

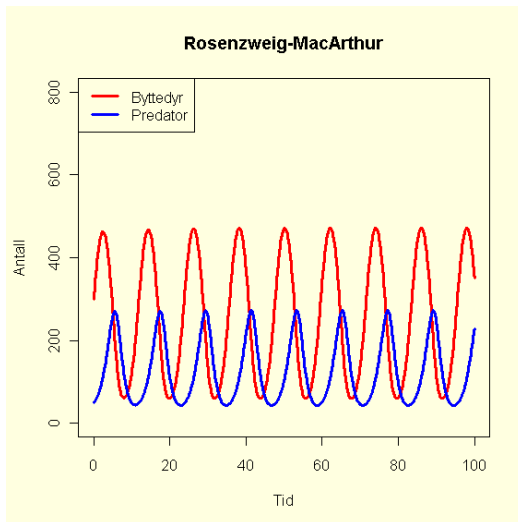
**rosenarthur<-function(t,y,p)**

```
{
with(as.list(p), {
y1<-y[1]
y2<-y[2]
dy1dt<-r1*y1*(1-y1/K1) -
y2*((a1*y1)/(B+y1))
dy2dt<-y2*((a2*y1)/(B+y1)) - r2*y2
list(c(dy1dt,dy2dt))
})
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,100,0.1)
start<-c(300,50)
```

```

out2<-lsoda(start,tid,rosenarthur,p,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(out2[,1],out2[,2],xlim=c(0,100),ylim=c(0,800),type="n",
ylab="Antall",xlab="Tid",main="Rosenzweig-MacArthur")
lines(out2[,1],out2[,2],col=2,lwd=3)
lines(out2[,1],out2[,3],col=4,lwd=3)
legend("topleft",c("Byttedyr","Predator"),col=c(2,4),
lwd=c(3,3))

```



Endring i antall byttedyr over tid ( $dy_1/dt$ ) og antall predator over tid ( $dy_2/dt$ ) hvor  $K$  (bærekapasitet),  $a$  (dødsrate for predator i fravær av byttedyr),  $b$ , og  $c$  (effektivitet og formeringsrate hos predator) er konstanter:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 \left(1 - \frac{y_1}{K}\right) - y_2 \cdot y_1^b$$

$$\frac{dy_2}{dt} = c \cdot y_2 \cdot y_1^b - a \cdot y_2$$

### #Predator-Byttedyrmodell oscillasjon

```

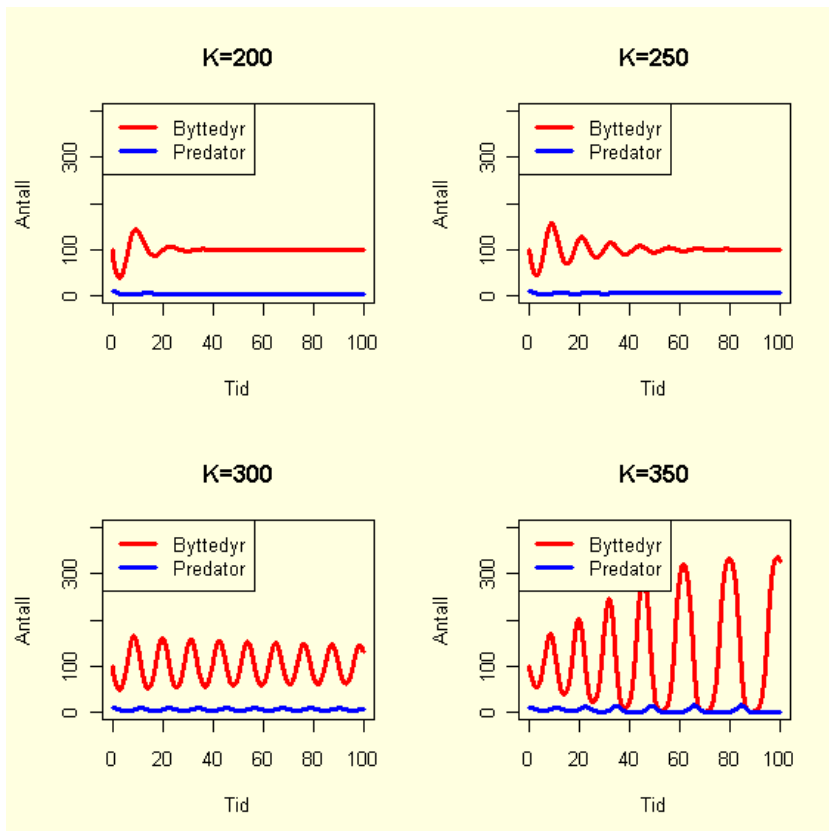
p<-c(b=0.5,K=350,c=0.1,a=1)
lovel.model <-function(t,y,p)
{
with(as.list(p), {
y1<-y[1]
y2<-y[2]
dy1dt<-y1*(1-y1/K)-y2*y1^b
dy2dt<-c*y2*y1^b-a*y2
list(c(dy1dt,dy2dt))
})
}
require(deSolve)
t<-seq(0,100,0.1) #tid
start<-c(100,10) #start(y1,y2)

```

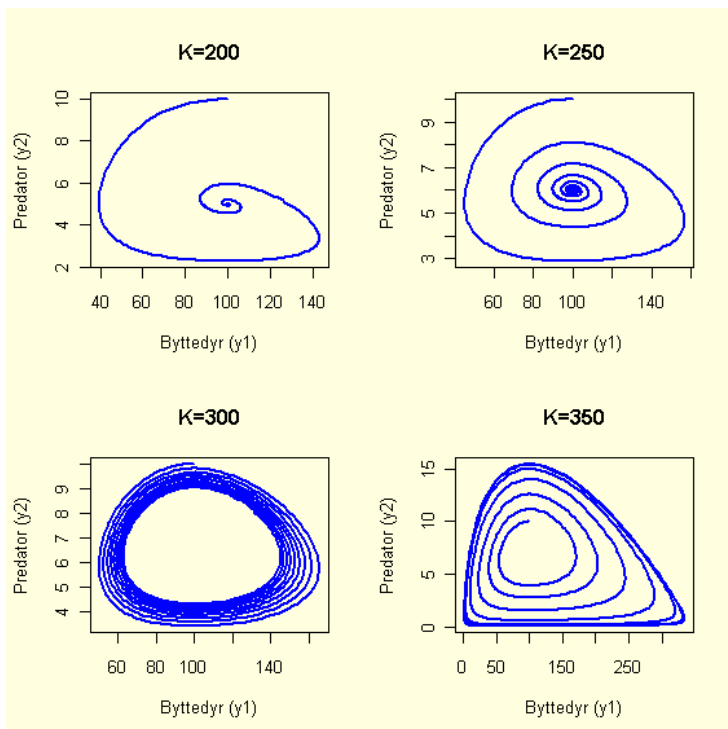
```

out3<-lsoda(start,t,lovol,model,p,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(out3[,1],out3[,2],xlim=c(0,100),ylim=c(0,400),
type="n",ylab="Antall",xlab="Tid",main="K=350")
lines(out3[,1],out3[,2],col=2,lwd=3)
lines(out3[,1],out3[,3],col=4,lwd=3)
legend("topleft",c("Byttedyr","Predator"),col=c(2,4),lwd=c(3,3)
))

```



Tidsserieplot. Tidsavhengig løsning av byttedyr-predatorligning hvor  $b=0.5, K=200-350, c=0.1, a=1$ . Startverdi: 100 byttedyr og 10 predatorer. Ved lav K er byttedyrkonsentrasjonen konstant, men etter hvert som K øker så blir det svingninger i byttedyrkonsentrasjonen.



Tilsvarende fasediagram for data fra Figur 1.  $b=0.5, K=200-350, c=0.1, a=1$ . Startverdi: 100 byttedyr og 10 predatorer. Vi ser endringen i  $(y_1(t), y_2(t))$ .

Ved likevekt er de deriverte lik 0:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \frac{dy_2}{dt} = 0 \\ y_1 \left(1 - \frac{y_1}{K}\right) - y_2 \cdot y_1^b &= 0 \\ c \cdot y_2 \cdot y_1^b - a \cdot y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Vi finner først  $y_1$ :

$$\begin{aligned} y_2(c \cdot y_1^b - a) &= 0 \\ y_1 &= \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{b}} \end{aligned}$$

Og deretter  $y_2$ :

$$y_2 = \left(1 - \frac{y_1}{K}\right) \cdot y_1^{1-b}$$

Likevektspunktet  $(y_1, y_2) = (100, 5)$  for  $b=0.5, K=200, c=0.1, a=1$ , som stemmer med Figur 2 øverst til venstre i endepunktet for spiralen.

Jacobimatrisen  $J(y_1, y_2)$  ved  $(y_1, y_2)$  med partiellderiverte:

$$J(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial y_1} & \frac{\partial y_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial y_1} & \frac{\partial y_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} =$$

Vi kan bestemme hvor et punkt ligger i planet ved hjelp av **koordinater** i et **koordinatsystem**. Det vanligste koordinatsystemet består av en x-akse (abscisse) og y-akse (ordinat) som står vinkelrett (normalt, ortogonalt) på

hverandre. Skjæringspunktet mellom aksene kalles origo, og koordinatsystemet deler opp planet i fire kvadranter. I et tredimensjonalt rom har man tre akser som står vinkelrett på hverandre, x-, y- og z-aksen. Et annet koordinatsystem i planet er **polarkoordinater** hvor punkter (P) i planet angis som avstanden r (radius) fra origo og vinkelen  $\theta$  (theta) mellom linjen OP og en akse som går gjennom origo.

Vi lar punkter (x,y) i planet være gitt ved polarkoordinater r og  $\theta$  :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

Det vil si at:

$$\begin{aligned}r^2 &= x^2 + y^2 \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\end{aligned}$$

Hvor r kalles **amplitude** og  $\theta$  kalles **fase**.

Den tilsvarende Jacobi-matrisen blir:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Vi ser at hvis  $r=1$  er dette en matrise (avbildning) som roterer planet mot klokka med en vinkel  $\theta$ .

Og Jacobi-determinanten blir forskjellig fra null:

$$\det J(x,y) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = \cos \theta r \cos \theta + r \sin \theta \sin \theta = r$$

## Rosensweig-MacArthur predator-byttedyrmodell

Rosensweig-MacArthur predator byttedyrmodell hvor  $dy_1/dt$  er endring bestanden av byttedyr og  $dy_2/dt$  er endringen i predatorbestanden:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= r_1 \cdot y_1 \left(1 - \frac{y_1}{K_1}\right) - y_2 \frac{a_1 y_1}{B + y_1} \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2 \frac{a_2 y_1}{B + y_1} - r_2 y_2\end{aligned}$$

Med konstanter  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , B og  $K_1$ .

```
#Rosensweig-MacArthur
```

```
p<-c(a1=2,a2=2,r1=1,r2=1,B=200,K1=700)
```

```
rosen<-function(t,y,p)
```

```
{
```

```
  with(as.list(p), {
```

```
    y1<-y[1]
```

```
    y2<-y[2]
```

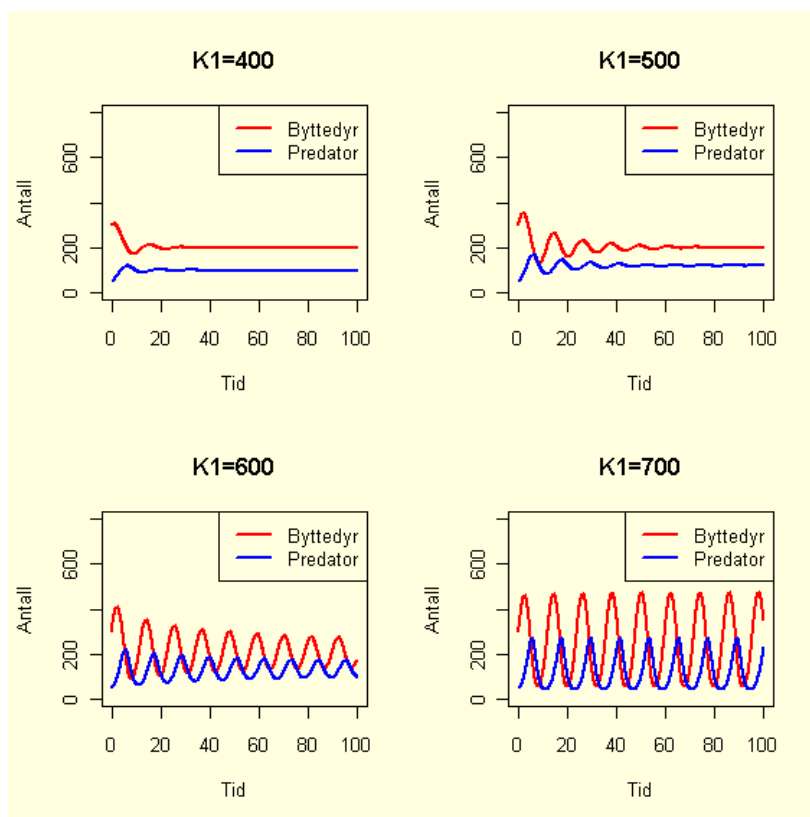
```
    dy1dt<-r1*y1*(1-y1/K1)-y2*((a1*y1)/(B+y1))
```

```
    dy2dt<-y2*((a2*y1)/(B+y1))-r2*y2
```

```

list(c(dy1dt, dy2dt))
})
}
require(deSolve)
t<-seq(0,100,0.1) #tid
start<-c(300,50) #start(y1,y2)
out4<-lsoda(start,t,rosen,p,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(out4[,1],out4[,2],xlim=c(0,100),ylim=c(0,800),
type="n",ylab="Antall",xlab="Tid",main="K1=700")
lines(out4[,1],out4[,2],col=2,lwd=2)
lines(out4[,1],out4[,3],col=4,lwd=2)
legend("topright",c("Byttedyr","Predator"),col=c(2,4),lwd=c(2,
2))

```



Tidsserieplot av Rosenzweig-MacArthur predator-byttedyrmodell med konstantene  $a_1=2, a_2=2, r_1=1, r_2=1, B=200$ , hvor man starter med 300 byttedyr og 50 predatorer, og hvor  $K_1=400-700$ . For  $K_1=400$  og  $500$  når man en steady-state bestand av byttedyr og predatorer, men når  $K_1=600$  eller  $700$  gir dette svingninger i bestanden.

```

#Rosenzweig-MacArthur
p<-c(a1=2,a2=2,r1=1,r2=1,B=200,K1=700)
rosen<-function(t,y,p)
{

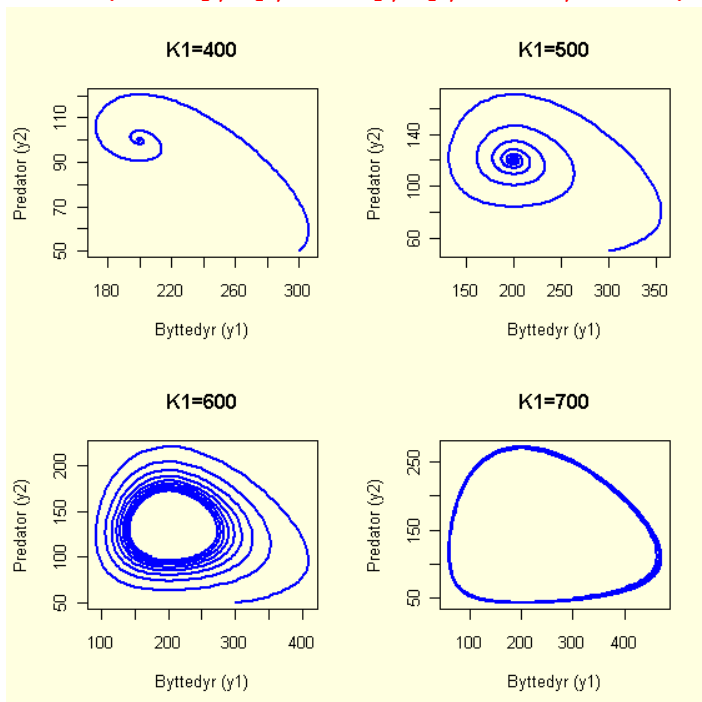
```



```

with(as.list(p), {
y1<-y[1]
y2<-y[2]
dy1dt<-r1*y1*(1-y1/K1)-y2*((a1*y1)/(B+y1))
dy2dt<-y2*((a2*y1)/(B+y1))-r2*y2
list(c(dy1dt,dy2dt))
})
}
require(deSolve)
t<-seq(0,100,0.1) #tid
start<-c(300,50) #start(y1,y2)
out4<-lsoda(start,t,rosen,p,rtol=1e-4)
plot(out4[,2],out4[,3],type="n",ylab="Predator (y2)",
xlab="Byttedyr (y1)",main="K1=700")
lines(out4[,2],out4[,3],col=4,lwd=2)

```



Fasediagram av dataene hvor man starter med 300 byttedyr og 50 predatorer, og hvor K1=400-700.

Vi endrer modellen ved å sette inn en konstant b (type III funksjonell respons)

$$\frac{dy_1}{dt} = r_1 \cdot y_1 \left(1 - \frac{y_1}{K_1}\right) - y_2 \frac{a_1 y_1^b}{B^b + y_1^b}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_2 \frac{a_2 y_1^b}{B^b + y_1^b} - r_2 y_2$$

**#Rosenzweig-MacArthur med b**

```

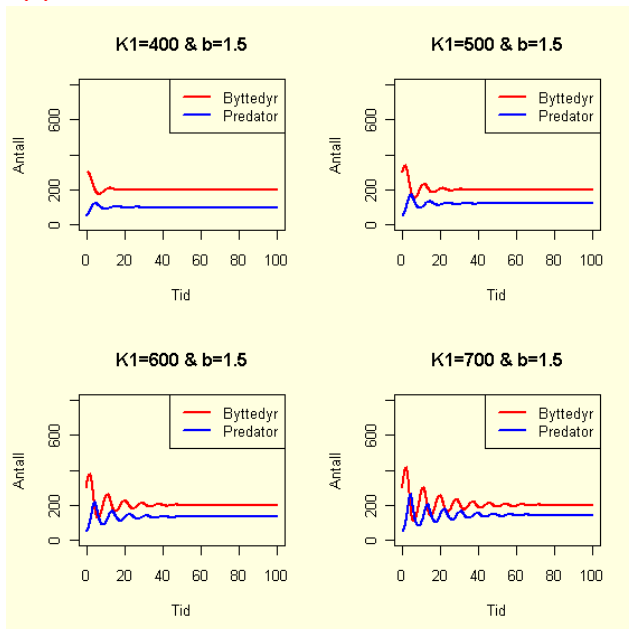
p<-c(a1=2,a2=2,r1=1,r2=1,B=200,K1=700,b=1.5)
rosenarthur<-function(t,y,p)
{

```

```

with(as.list(p), {
y1<-y[1]
y2<-y[2]
dy1dt<-r1*y1*(1-y1/K1)-y2*((a1*y1^b)/(B^b+y1^b))
dy2dt<-y2*((a2*y1^b)/(B^b+y1^b))-r2*y2
list(c(dy1dt,dy2dt))
})
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,100,0.1) #tid
start<-c(300,50) #start(y1,y2)
out5<-lsoda(start,tid,rosenarthur,p,rtol=1e-4)
plot(out5[,1],out5[,2],xlim=c(0,100),ylim=c(0,800),
type="n",ylab="Antall",xlab="Tid",main="K1=700 & b=1.5")
lines(out5[,1],out5[,2],col=2,lwd=2)
lines(out5[,1],out5[,3],col=4,lwd=2)
legend("topright",c("Byttedyr","Predator"),col=c(2,4),lwd=c(2,
2))

```



Tidsserieplot. Ved innsetting av konstant  $b=1.5$ . For øvrig:  $a_1=2$ ,  $a_2=2$ ,  $r_1=1$ ,  $r_2=1$ ,  $B=200$ , hvor man starter med 300 byttedyr og 50 predatorer, og hvor  $K_1=400-700$ .

Tilsvarende argumentasjon kan brukes i relasjonen herbivore og vegetasjon, hvor herbivore tilsvarer predator og vegetasjon tilsvarer byttedyr. Mennesket har gjennom alle tider høstet fra predator-byttedyrsystemer.

## Kaos og Lorenz-ligningene

Meteorologen Edvard N. Lorenz ved MIT viste i 1963 hvordan konveksjonsstrømmer i atmosfæren kunne bli beskrevet av 12 ligninger som han forenklet til tre ligninger, hvor  $x$  er hastighet på rotasjonen, positiv med klokka, negativ mot klokka;  $y$  er temperaturforskjell mellom stigende og synkende væske,  $z$  er avvik fra linearitet i temperaturprofilen,  $r$  er Rayleightall,  $\sigma$  er Prandtl tall,  $b$  aspekt ratio i en konveksjonssylinder (*Deterministic nonperiodic flow* J. Atmos.Sci. 1963,20,130). Startverdiene for Lorenz var  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  og  $r = 28$ .

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x \cdot z + r \cdot x - y$$

$$\frac{dz}{dt} = x \cdot y - b \cdot z$$

Løsningene oscillerer, men inne visse grenser, i form av en fraktal med dimensjon to til tre. Ligningene inneholder to kvadratledd  $xy$  og  $xz$ . Hvis løsningene  $x(t)$  blir plottet mot  $z(t)$  gir dette en figur som ligner på en sommerfugl.

Lineære systemer har ett likevektspunkt, mens ikke-lineære systemer har mange eller ingen likevektspunkter. Likevekten kan være stabil eller ustabil. Todimensjonalt ser linjer for løsning av ligningene ut til å krysse hverandre, men det skjer ikke i et tredimensjonalt plot. Ifølge ikke-snitt teoremet kan ikke trajektoriene krysse hverandre. Trajektoriene kan nærme seg et punkt (**limitsyklus**) eller gå mot uendelig. Løsningene kan være faste eller oscillere. I et punkt på en linje kan det bare trekkes en tangent. Hvis trajektoriene hadde krysset hverandre hadde dette betydd to løsninger som starter i samme punkt, hvilket er umulig. Etter en kortvarig og forbigående fase vil de avgrensede løsningene av ligningene være stabile eller oscillere periodisk, ingen andre løsninger er mulige (**Poincaré-Bendixson-teoremet**, svensk matematiker Ivar Bendixson (1861-1935)).

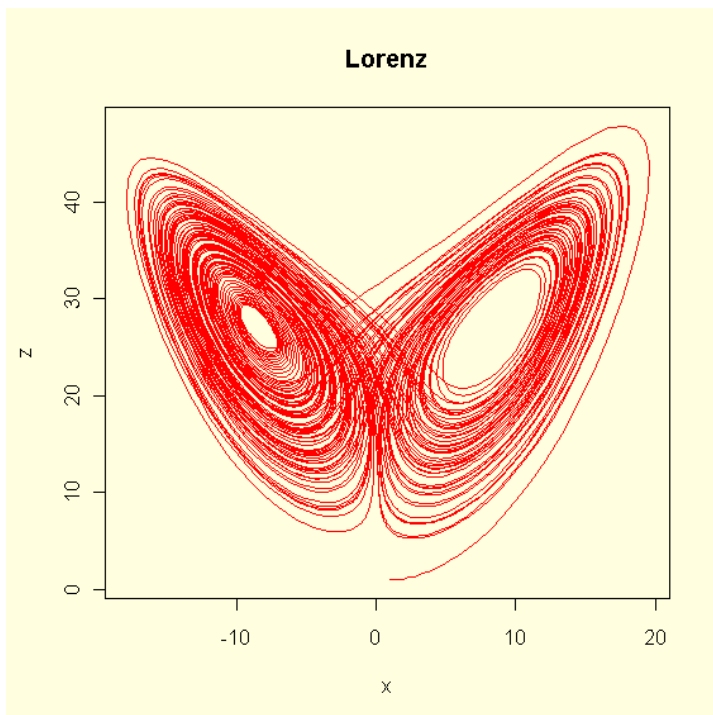
I løsningen av Lorenz-ligningene starter trajektoriet nær 0, svinger til høyre og inn i sentrum av en spiral på venstre side. Trajektoriet forlater spiralen etter å ha kommet en kritisk verdi vekk fra sentrum, og etter å ha gått i spiral spretter den over til høyre side, går litt i spiral, så over til venstre side, går litt i spiral osv. Det blir seende ut som to sommerfuglvinger. De to vingene skyldes konveksjonsstrømmene i lufta kan gå enten oppover eller nedover. Lorenz viste at det å komme med en sikker varmelding langt fram i tid er vanskelig, for ikke å si umulig. Framtiden er uforutsigbar. Resultatet er avhengig av utgangsbetingelsene, men selv om startbetingelsene er målt nøyaktig vil det alltid bli en feil mellom estimert verdi og

sann verdi. Det er bare en viss tid fremover det er mulig å prediktere, det vil si komme med en statistisk sannsynlighet for en utviklingsretning. Det er dette som gjenspeiles i den berømte: *Does a flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas* (1972). Det betyr selvsagt ikke at en sommerfugl direkte gir en tornado, men viser ustabiliteten i ligningene som modellerer atmosfæren. Mikroskopiske forstyrrelser av systemet kan gi makroskopiske forandringer. Ifølge "Sommerfugleffekten" er fremtiden helt og total uforutsigbar, bortsett fra de nærmeste par døgn hvor man med en viss statistisk sannsynlighet kan beregne hva som vil skje. Det er forskjell på vær og klima. Selv om været utover en uke er uforutsigbart er klima en mer stabil tilstand, slik at man kan prediktere klima for lenger tidsrom enn for vær.

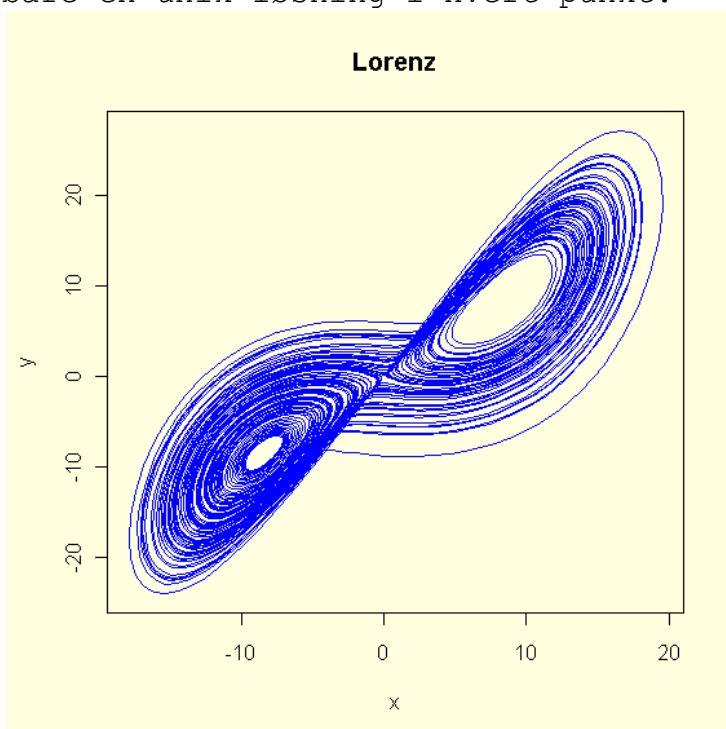
For Lorenz er Lyapunov eksponenten  $\lambda \approx 0.9056, 0, -14, 5723$   
Hvis et lokalt maksimum på tidsseriediagrammet  $z$  versus tiden  $t$  måles ved  $Z_n$  og neste ved  $Z_{n+1}$ , og man deretter plotter lokale maksimum  $Z_n$  på abscissen mot  $Z_{n+1}$  på ordinaten,  $Z_{n+1} = f(Z_n)$  kalles en **Lorenz graf**) så faller dataene fra en kaotisk tidsserie på en kurve. Dette ligner på **Poincaré avbildninger** og denne og Lorenz graf forsøker å forenkle analysen av differensialligninger.

### #Lorenz-ligningene og sommerfugleffekt

```
library(deSolve)
params<-c(s=10,b=8/3,r=28)
lorenz<-function(t,y,p)
{
  with(as.list(p), {
    dx<-s*(y[2]-y[1])
    dy<--y[1]*y[3]+ r*y[1]-y[2]
    dz<-y[1]*y[2]-b*y[3]
    list(c(dx,dy,dz))
  })
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,100,0.01)
initial<-c(1,1,1)
resul<-lsoda(initial,tid,lorenz,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(resul[,2],resul[,4],xlab="x",ylab="z",type="l",
col=2,main="Lorenz")
```



Figur. xz-fasediagram for Lorenz-ligningene. Figuren viser grafisk løsningen av differensialligningene. Det ser ut som linjene krysser hverandre i 2D-plot, men hadde det vært plottet i 3D ville vi ha sett at dette ikke stemmer. Det er bare en unik løsning i hvert punkt.



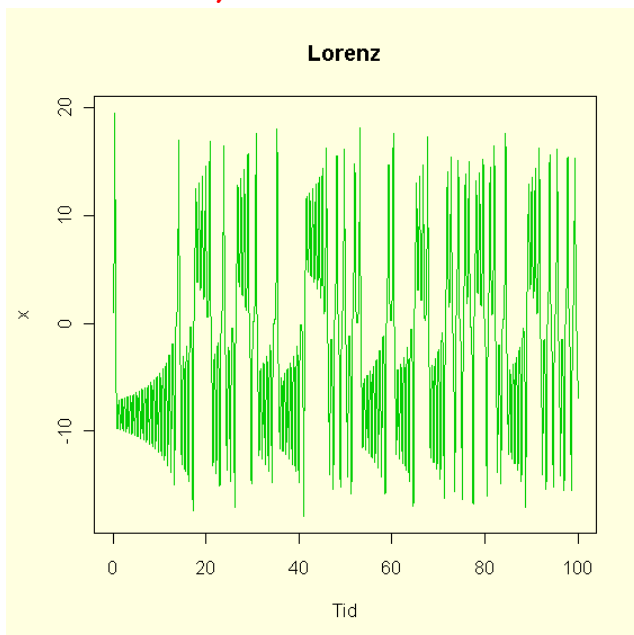
Figur. XY-fasediagram for Lorenz-ligningene.

```
#Tidsserieplot Lorenz
params<-c(s=10,b=8/3,r=28)
lorenz<-function(t,y,p)
```

```

{
with(as.list(p), {
dx<-s*(y[2]-y[1])
dy<--y[1]*y[3]+ r*y[1]-y[2]
dz<-y[1]*y[2]-b*y[3]
list(c(dx,dy,dz))
})
}
tid<-seq(0,100,0.01)
initial<-c(1,1,1)
resul<-lsoda(initial,tid,lorenz,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(resul[,1],resul[,2],xlab="Tid",ylab="x",type="l",col=3,main="Lorenz")

```



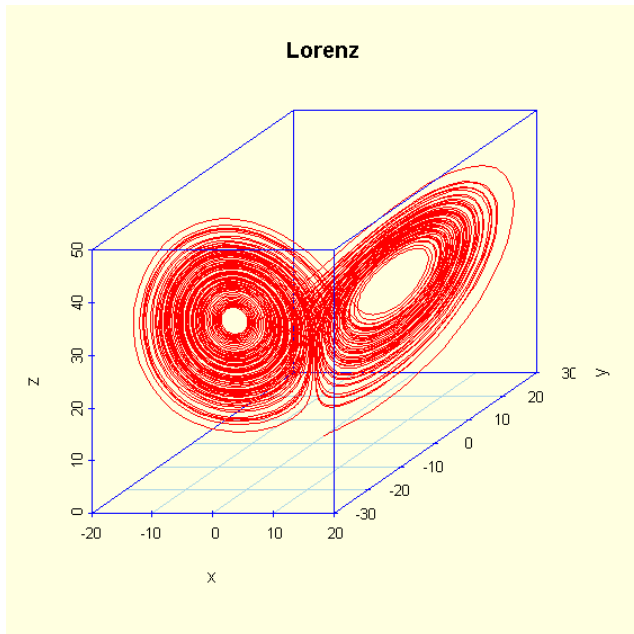
Figur. Tidsserieplot av Lorenz-ligningene som viser kaos.

```

#Hvis man ønsker et 3D plot last inn library(scatterplot3D)
#3D-plot Lorenz
library(deSolve)
params<-c(s=10,b=8/3,r=28)
lorenz<-function(t,y,p)
{
with(as.list(p), {
dx<-s*(y[2]-y[1])
dy<--y[1]*y[3]+ r*y[1]-y[2]
dz<-y[1]*y[2]-b*y[3]
list(c(dx,dy,dz))
})
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,100,0.01)
initial<-c(1,1,1)
resul<-lsoda(initial,tid,lorenz,params,rtol=1e-4)

```

```
require(scatterplot3d)
par(bg="lightyellow")
scatterplot3d(resul[,2],resul[,3],resul[,4],type="l",
xlab="x",ylab="y",zlab="z",main="Lorenz",color=2,
col.axis="blue", col.grid="lightblue")
```



Figur. 3D numerisk løsning av Lorenz-ligningene. Lorenz-ligningene og Rössler er eksempler på **globale bifurkasjoner**. For Lorenz attraktor er det **heterokline trajektorier**, mens for Rössler er det **homokline trajektorier**.

Pakken rgl kan brukes til å lage en 3-D presentasjon som kan dreies, forminskes eller forstørres. Det gir et innblikk i at trajektoriene ikke krysser hverandre.

```
#last inn pakken rgl
library(rgl)
library(rgl)
library(help=rgl)
plot3d (resul[,2],resul[,3],resul[,4],xlab="x",
ylab="y",zlab="z",type="l",col=2)
```

## Rössler

Nedenfor er det vist en del eksempler på løsning av sett med differensialligninger. Rössler er et enklere system enn Lorenz uten kvadratledd, med kaotisk løsning for  $a=0.2$ ,  $b=0.2$  og  $c=5.7$ , et av de enkleste kaotiske systemene.

Rössler, O.E.: *An equation for continuous chaos*. Phys.Lett A57 (1976) 397.

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$

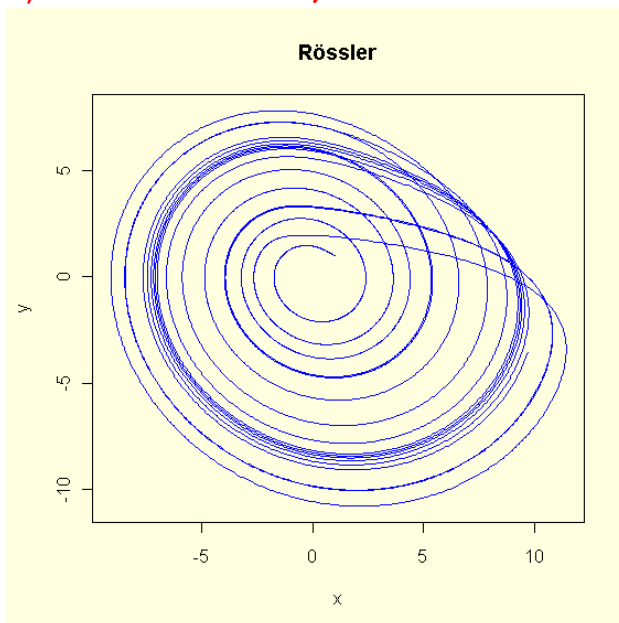
$$\frac{dy}{dt} = x + a \cdot y$$

$$\frac{dz}{dt} = b + z \cdot (x - c)$$

```

#Rössler
library(deSolve)
params<-c(a=0.2,b=0.2,c=5.7)
roessler<-function(t,y,p)
{
with(as.list(p), {
dx<--y[2]-y[3]
dy<-y[1]+ a*y[2]
dz<-b +y[3]*(y[1]-c)
list(c(dx,dy,dz))
})
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,100,0.01)
start<-c(1,1,1)
resultat<-lsoda(start,tid,roessler,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(resultat[,2],resultat[,3],xlab="x",ylab="y",type="l",col=
4,main="Rössler")

```



Figur. Fasediagram for Rössler ligningene og initialverdier (1,1,1).

Når trajektorier atskilles eksponensielt og divergerer uendelig hvordan er det mulig at de er begrenset? Svaret er strekning og folding. Som en firkantet deig som kjevles ut til

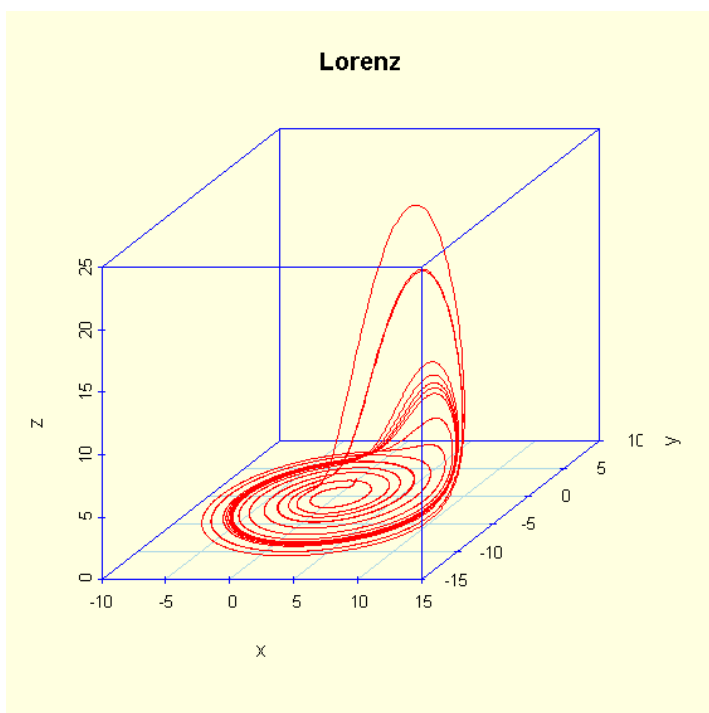


en flat deig, foldes og kjevles ut på nytt, slik at den til slutt består av en rekke tynne lag. Jfr. et wienerbrød

```

library(deSolve)
params<-c(a=0.2,b=0.2,c=5.7)
roessler<-function(t,y,p)
{
with(as.list(p), {
dx<--y[2]-y[3]
dy<-y[1]+ a*y[2]
dz<-b +y[3]*(y[1]-c)
list(c(dx,dy,dz))
})
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,100,0.01)
start<-c(1,1,1)
resultat<-lsoda(start,tid,roessler,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
require(scatterplot3d)
par(bg="lightyellow")
scatterplot3d(resultat[,2],resultat[,3],resultat[,4],type="l",
xlab="x",ylab="y",zlab="z",main="Lorenz",color=2,
col.axis="blue", col.grid="lightblue")

```



Figur . 3D Rössler med homokline trajektorier.

## Enkel kaotisk flyt

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dz} = z$$

$$\frac{dz}{dt} = -az - y + |x| - 1$$

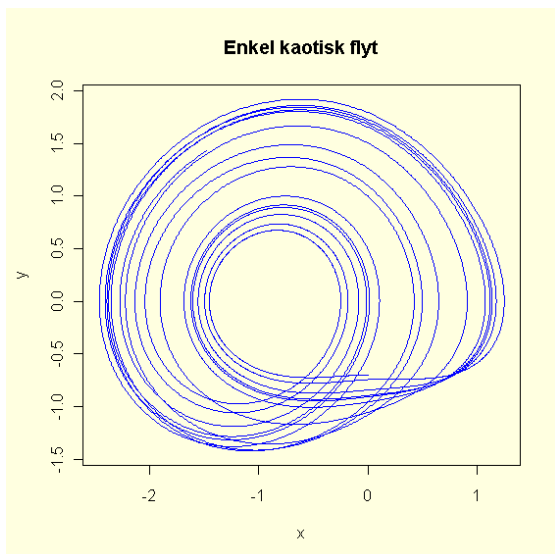
Linz, S.J. & Sprott, J.C.: *Elementary chaotic flow*. Phys. Lett. A 259(1999)240-245

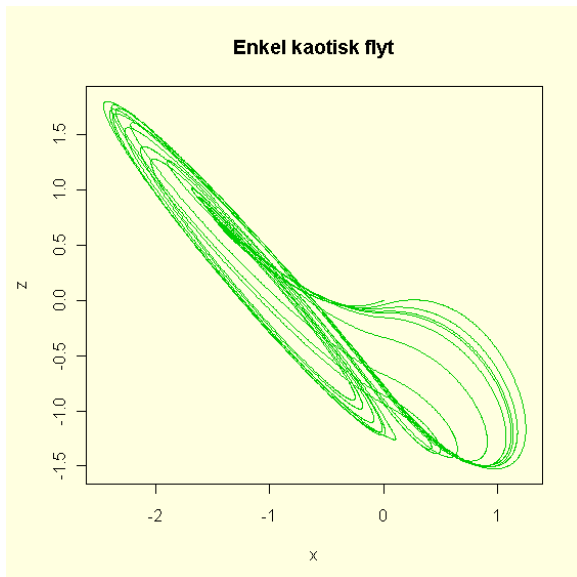
```

library(deSolve)
params<-c(a=0.6)
kaos<-function(t,y,p)
{
  with(as.list(p), {
    dx<-y[2]
    dy<-y[3]
    dz<--a*y[3]-y[2]+abs(y[1])-1
    list(c(dx,dy,dz))
  })
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,100,0.01)
initial<-c(0,-0.7,0)
result<-lsoda(initial,tid,kaos,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(result[,2],result[,3],xlab="x",ylab="y",type="l",
      col=4,main="Enkel kaotisk flyt")

#3D rotér og zoom med rgl
library(rgl)
plot3d(result[,2],result[,3],result[,4],xlab="x",
        ylab="y",zlab="z",type="l",col=2)

```





## Nosé-Hoover oscillator

$$\frac{dx}{dt} = y$$

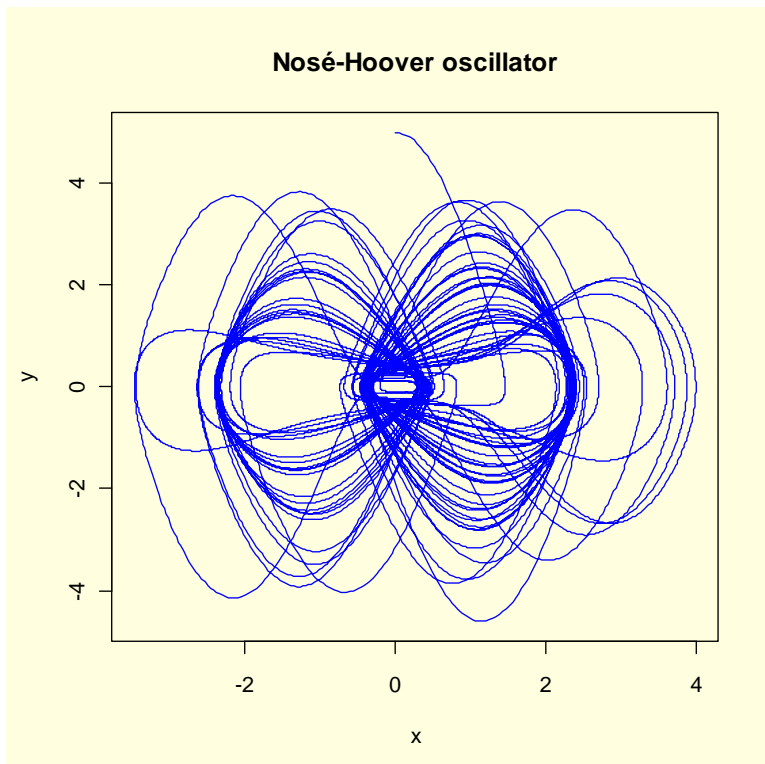
$$\frac{dy}{dt} = -x + y * z$$

$$\frac{dz}{dt} = a - y^2$$

Nosé, S. *Constant temperatur molecular dynamics methods*. Progress of theoretical Physics Supplement 103 (1991)1-46.  
 Hoover, G. *Remark on "Some simple chatoic flows*. Physical Review E 51 (1995)759-760.

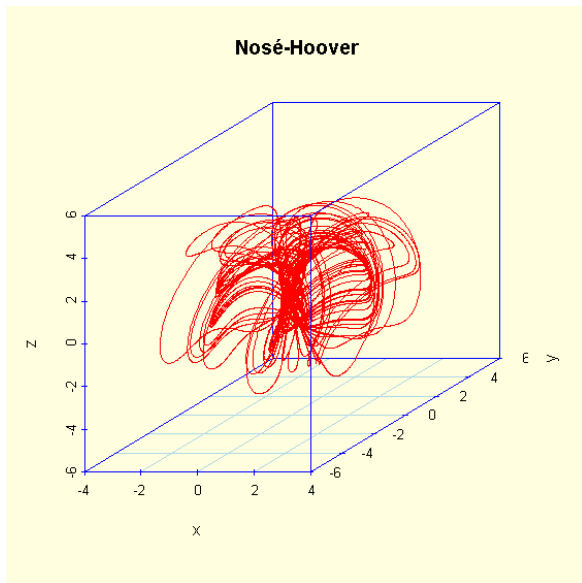
```
#Nosé-Hoover
library(deSolve)
params<-c(a=1)
nosehoover<-function(t,y,p)
{
  with(as.list(p), {
    dxdt<-y[2]
    dydt<--y[1]+y[2]*y[3]
    dzdt<-a-y[2]^2
    list(c(dxdt,dydt,dzdt))
  })
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,500,0.01)
init<-c(0,5,0)
resultat<-lsoda(init,tid,nosehoover,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
```

```
plot(resultat[,2],resultat[,3],xlab="x",ylab="y",type="l",col=
4,main="Nosé-Hoover oscillator")
```



Figur. Fasediagram for Nosé-Hoover oscillator med  $a=1$  og initialverdier  $(0,5,0)$ ,  $t=0-500$

```
#Nosé-Hoover
library(deSolve)
params<-c(a=1)
nosehoover<-function(t,y,p)
{
with(as.list(p), {
dxdt<-y[2]
dydt<--y[1]+y[2]*y[3]
dzdt<-a-y[2]^2
list(c(dxdt,dydt,dzdt))
})
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,500,0.01)
init<-c(0,5,0)
resultat<-lsoda(init,tid,nosehoover,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
require(scatterplot3d)
scatterplot3d(resultat[,2],resultat[,3],resultat[,4],type="l",
xlab="x",ylab="y",zlab="z",
main="Nosé-Hoover",color=2,col.axis=4,col.grid="lightblue")
```



## Rucklidge

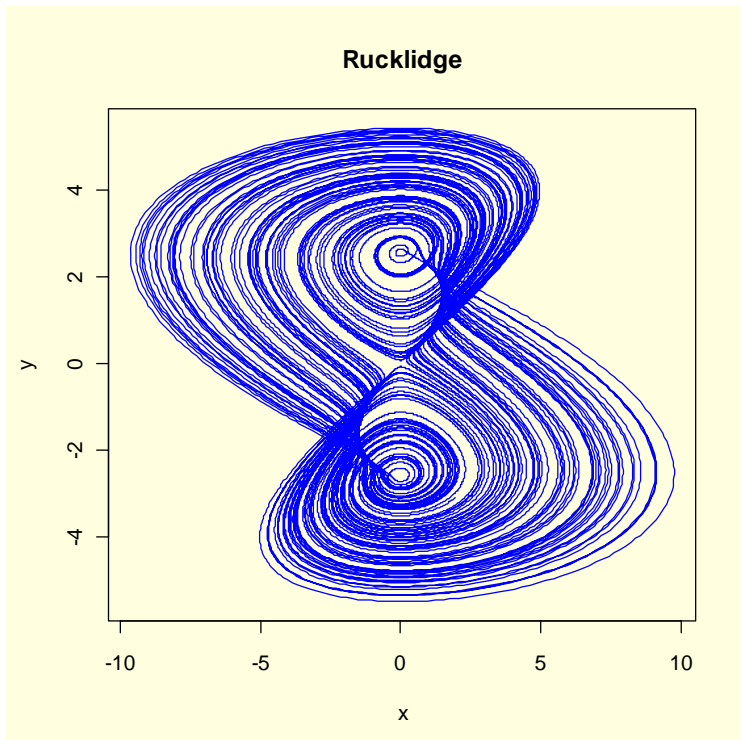
$$\frac{dx}{dt} = -k * x + \lambda * y - y * z$$

$$\frac{dy}{dt} = x$$

$$\frac{dz}{dt} = -z + y^2$$

Rucklidge, A.M. *Chaos in models of double convection*. Journal of Fluid Mechanics 237(1992)209-229.

```
#Rucklidge
library(deSolve)
params<-c(k=2,l=6.7)
rucklidge<-function(t,y,p)
{
  with(as.list(p), {
    dxdt<--p["k"]*y[1]+p["l"]*y[2]-y[2]*y[3]
    dydt<-y[1]
    dzdt<--y[3]+y[2]^2
    list(c(dxdt,dydt,dzdt))
  })
}
require(deSolve)
time<-seq(0,500,0.01)
init<-c(1,0,4.5)
result<-lsoda(init,time,rucklidge,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(result[,2],result[,3],xlab="x",ylab="y",type="l",col=4,main="Rucklidge")
```

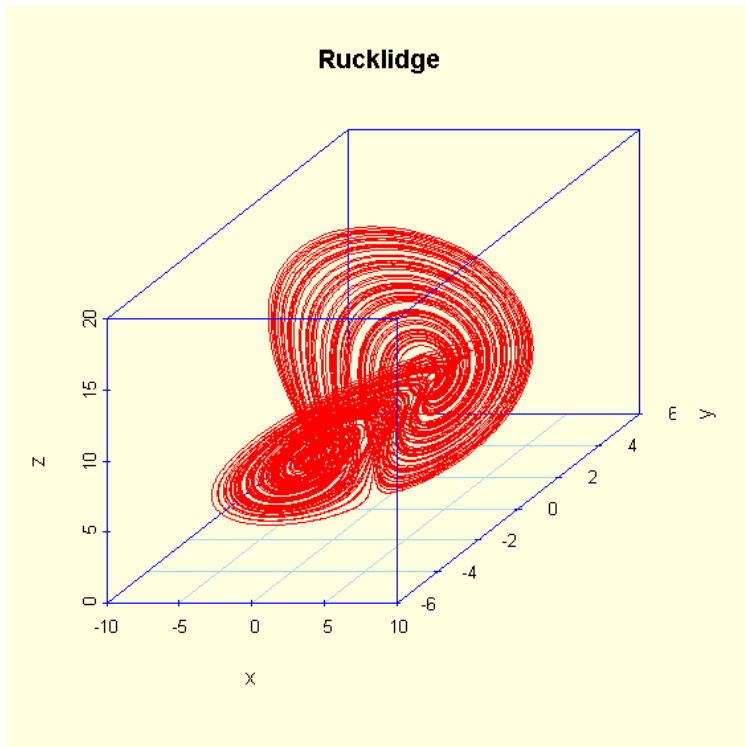


Figur. Fasediagram for Rucklidge med  $k=2$ ,  $\lambda=6.7$ , initialverdier  $(1,0,4.5)$  og  $t=0-500$

```

library(deSolve)
params<-c(k=2,l=6.7)
rucklidge<-function(t,y,p)
{
  with(as.list(p), {
    dxdt<--p["k"]*y[1]+p["l"]*y[2]-y[2]*y[3]
    dydt<-y[1]
    dzdt<--y[3]+y[2]^2
    list(c(dxdt,dydt,dzdt))
  })
}
require(deSolve)
time<-seq(0,500,0.01)
init<-c(1,0,4.5)
result<-lsoda(init,time,rucklidge,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
require(scatterplot3d)
scatterplot3d(result[,2],result[,3],result[,4],type="l",
  xlab="x",ylab="y",zlab="z",
  main="Rucklidge",color=2,col.axis=4, col.grid="lightblue")

```



## Thomas labyrinthkaos

$$\frac{dx}{dt} = \sin y$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin z$$

$$\frac{dz}{dt} = \sin x$$

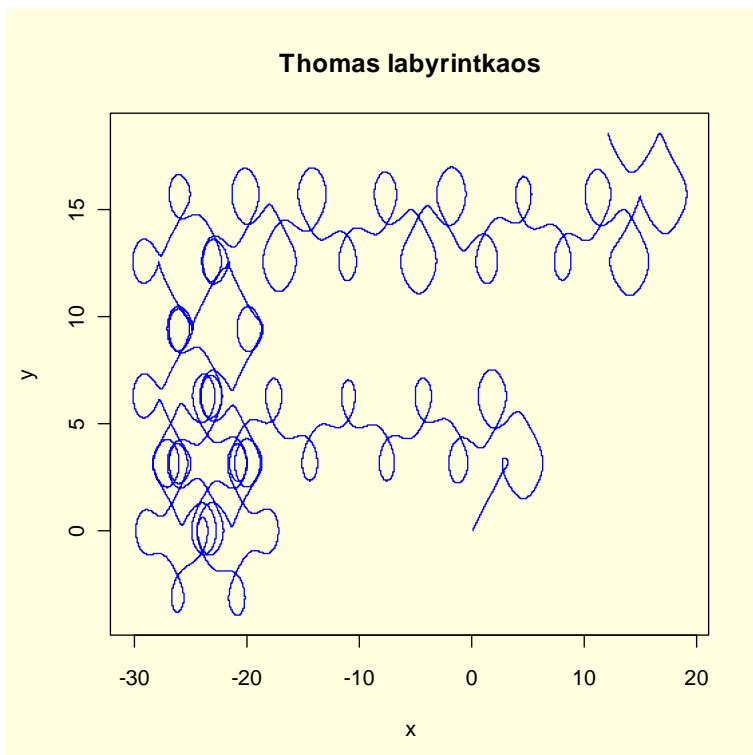
Thomas, R. *Deterministic chaos seen in terms of feedback circuits: analysis, synthesis, "labyrinth chaos"*. Journal of Bifurcation and Chaos 9 (1999)1889-1905

```
#Thomas
library(deSolve)
params<-c()
thomas<-function(t,y,p)
{
  with(as.list(p), {
    dxdt<-sin(y[2])
    dydt<-sin(y[3])
    dzdt<-sin(y[1])
    list(c(dxdt,dydt,dzdt))
  })
}
require(deSolve)
time<-seq(0,500,0.01)
init<-c(0.1,0,0)
result<-lsoda(init,time,thomas,params,rtol=1e-4)
```

```

par(bg="lightyellow")
plot(result[,2],result[,3],xlab="x",ylab="y",type="l",col=4,
main="Thomas labyrintkaos")

```



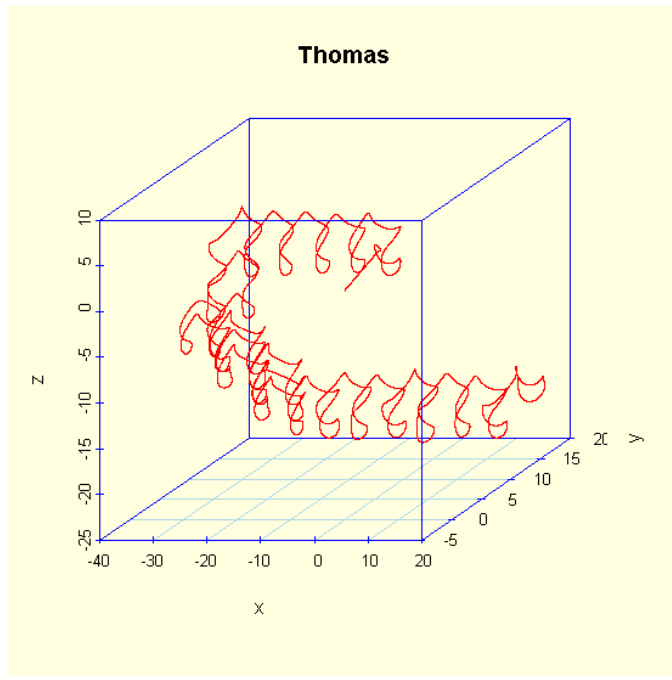
Figur. Fasediagram for Thomas labyrintkaos med initialverider (0.1,0,0) og t=0-500.

```

#Thomas
library(deSolve)
params<-c()
thomas<-function(t,y,p)
{
with(as.list(p), {
dxdt<-sin(y[2])
dydt<-sin(y[3])
dzdt<-sin(y[1])
list(c(dxdt,dydt,dzdt))
})
}
require(deSolve)
time<-seq(0,500,0.01)
init<-c(0.1,0,0)
result<-lsoda(init,time,thomas,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
require(scatterplot3d)
scatterplot3d(result[,2],result[,3],result[,4],type="l",
xlab="x",ylab="y",zlab="z",
main="Thomas",color=2,col.axis=4, col.grid="lightblue")

```





Figur. 3D fasediagram for Thomas labyrinthkaos med initialverider (0.1,0,0) og t=0-500.

## Hopf bifurkasjon

Kalles også Poincaré-Andronov-Hopf bifurkasjon.

$$\frac{dx}{dt} = -y + x[\mu - (x^2 + y^2)]$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y[\mu - (x^2 + y^2)]$$

Hopf, E. *A mathematical example displaying the features of turbulence*. Communications of Pure and Applied Mathematics 1 (1948) 303-322.

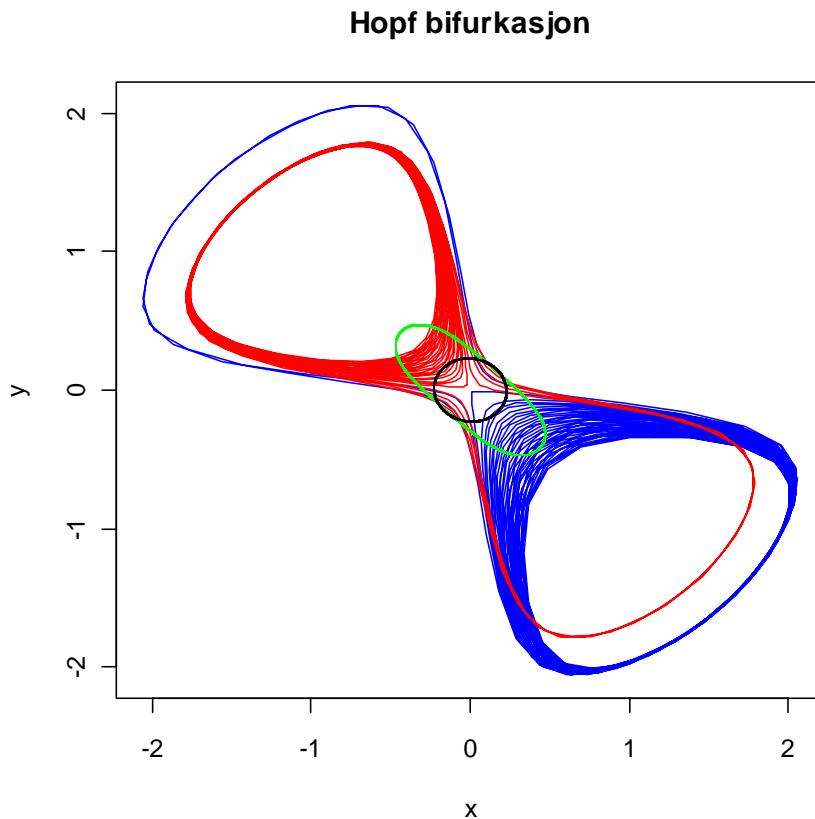
Hopf bifurkasjon (Eberhard Hopf) var opprinnelig spontane oscillasjoner i akustiske og elektriske kretser.

```
#Hopf
library(deSolve)
#Parameterverdier (params)
params<-c(m=5)
hopf<-function(t,x,p)
{
  with(as.list(p), {
    dxdt<--x[2]-x[1]*(m-(x[1]^2+x[2]^2))
    dydt<-x[1]+x[2]*(m-(x[1]^2+x[2]^2))
    list(c(dxdt,dydt))
  })
}
require(deSolve)
```

```

tid<-seq(0,100,0.1)
start<-c(0.1,0.2)
resultat<-lsoda(start,tid,hopf,params,rtol=1e-4)
plot(resultat[,2],resultat[,3],type="n",ylab="y",xlab="x",main
="Hopf bifurkasjon")
lines(resultat[,2],resultat[,3],col=4)

```



Figur. Fasediagram Hopf bifurkasjon med initialverdier (0.1,0.2) og  $\mu=5$  (blå),  $\mu=4$  (rød) og  $\mu=1$  (grønn),  $\mu=0.1$  (svart),  $t=0-100$

Heinz Hopf (1894-1971) var en tysk matematiker med godt renommé.

Hopf bifurkasjon kan også skrives i form av polarkoordinater:

$$\frac{dr}{dt} = r \cdot (\mu - r^2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1$$

hvor radien  $r=\sqrt{(x^2+y^2)}$  og vinkelen  $\theta=1/\tan(y/x)$ .

## van der Pol

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = b(1 - x^2)y - x$$

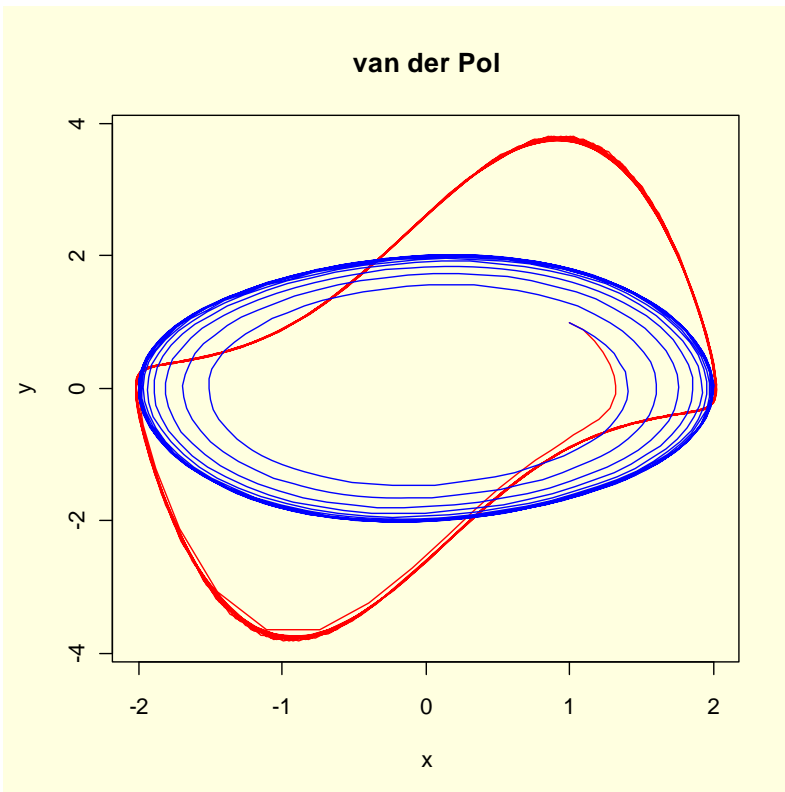
van der Pol ligningen har en begrenset syklus for hver verdi av  $b > 0$ . Har vært brukt i modellering av hjerteslag, solflekksyklus og pulserende stjerner (Cepheidene). Man finner van der Pol oscillasjon i en elektrisk krets utsatt for periodisk endring i spenningen.

van der Pol ligningene kan også uttrykkes som:

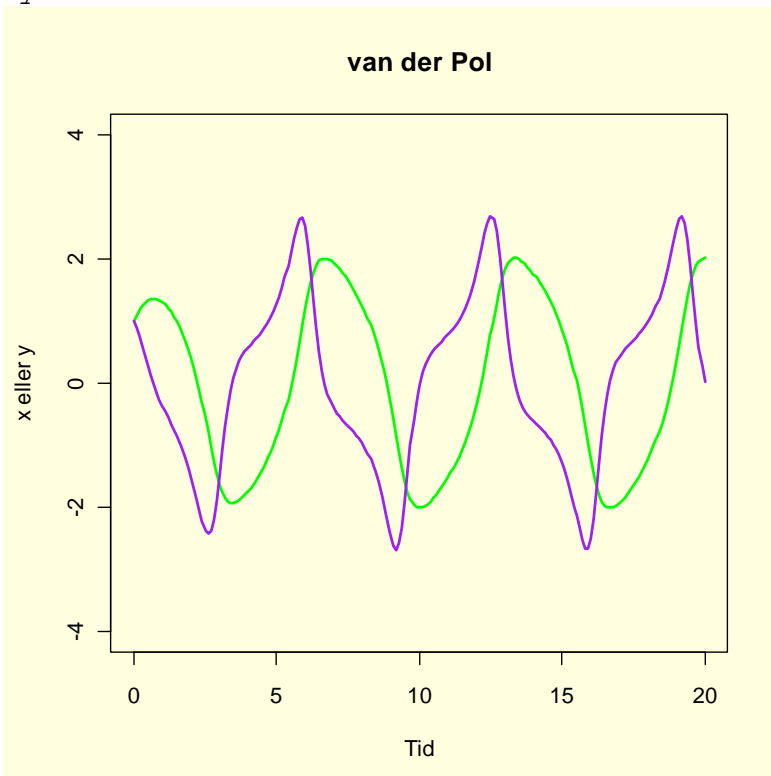
$$\frac{d^2x}{dt^2} + b(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

Van der Pol, B. *On relaxation oscillations*. Philosophical Magazine 2 (1926) 978-992

```
#van der Pol
library(deSolve)
params<-c(b=2)
vanderpol<-function(t,x,p)
{
  with(as.list(p), {
    dxdt<-x[2]
    dydt<-b*x[2] - b*x[2]*x[1]^2-x[1]
    list(c(dxdt,dydt))
  })
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,100,0.1)
start<-c(1,1)
resultat<-lsoda(init.state,out.time,vanderpol,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(resultat[,2],resultat[,3],type="n",ylab="y",xlab="x",main="van der Pol")
lines(resultat[,2],resultat[,3],col=2)
#sett b=0.1 kjør på nytt plot og bytt farge
```



Figur. van der Pol ligningen er en begrenset syklus som avhenger av verdien for  $b$ :  $b=2$  (rød),  $b=0.1$  (blå), initialverdier  $(1,1)$ . Sirkulært fasetrajektorium for  $b < 1$ . Ved større  $b$  er trajektoriene to ganger utenfor sirkelen per syklus.



Figur van der Pol tidsseriediagram  $b=1$ , initialbetingelser  $(1,1)$   $x$ (grønn),  $y$  (purpur)

van der Pol ligningene har en mer generell form i form av **Liénard-ligningen**:

$$\frac{d^2x}{dt} + f(x) \cdot \frac{dx}{dt} + g(x) = 0$$

som kan uttrykkes som to første ordens ligninger:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -f(x) \cdot y - g(x)$$

## Hénon-Heiles

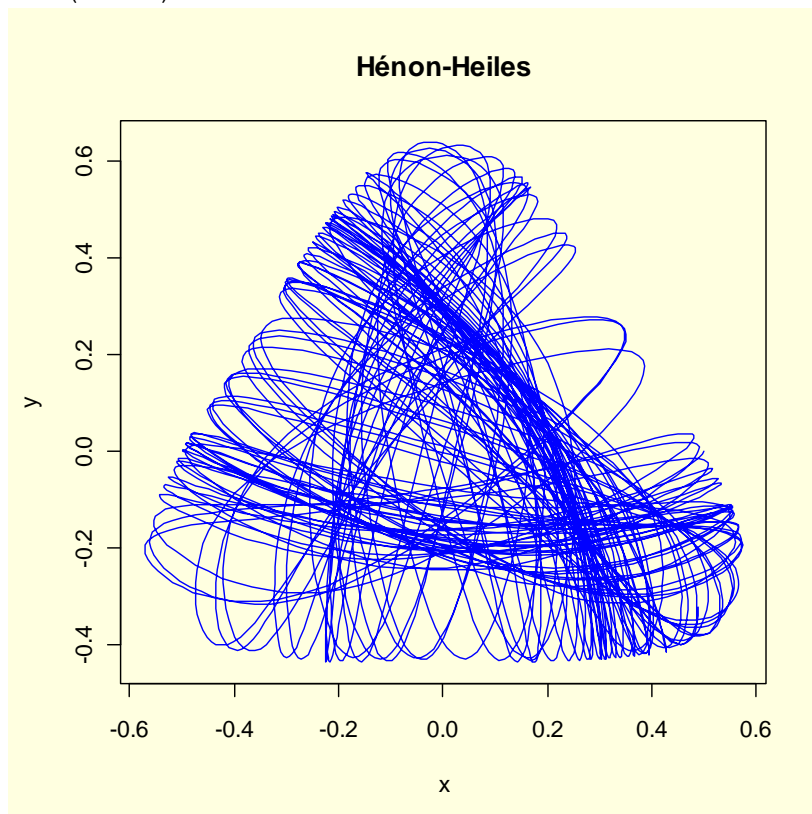
$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dy}{dt} = w$$

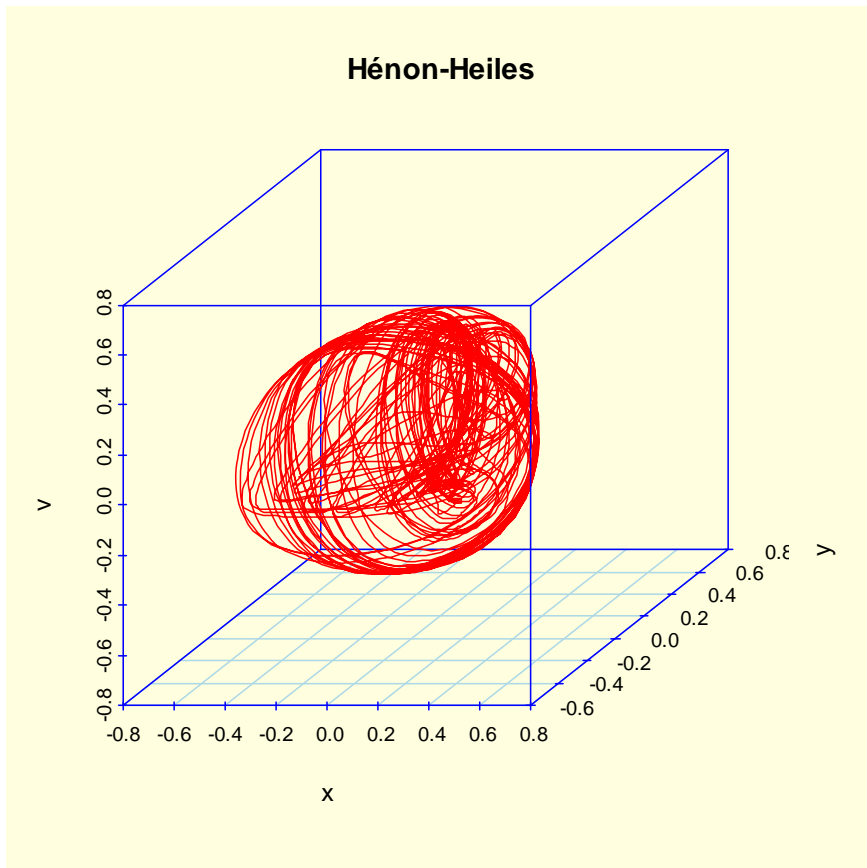
$$\frac{dv}{dt} = -x - 2xy$$

$$\frac{dw}{dt} = -y - x^2 + y^2$$

Hénon, M. & Heiles, C. *The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments*. *Astrophysical Journal* 69 (1964) 73-79



Figur. Fasediagram Hénon-Heiles med initialverdier  $c(0.499, 0, 0, -0.045)$



Figur. 3D fasediagram Hénon-Heiles for x, y og v med initialverdier c(0.499,0,0,-0.045)

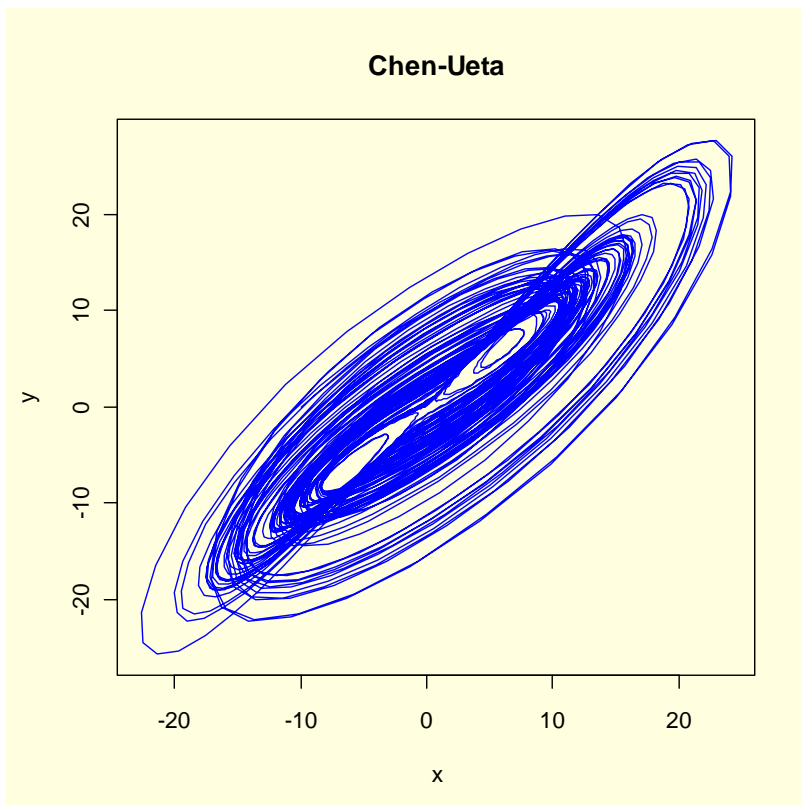
## Chen og Ueta

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot (y - x)$$

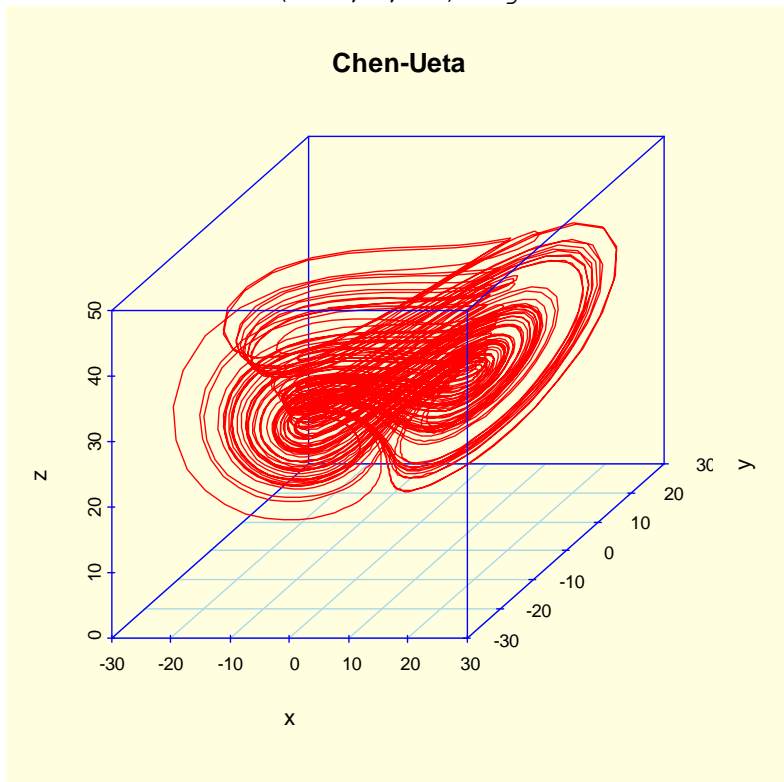
$$\frac{dy}{dt} = (c - a) \cdot x - x \cdot z + c \cdot y$$

$$\frac{dz}{dt} = x \cdot y - b \cdot z$$

Chen, G. & Ueta, T. *Yet another chaotic attractor*.  
International Journal of Bifurcation and Chaos 9 (1999) 1465-1466



Figur. Fasediagram Chen-Ueta med parametere  $a=35$ ,  $b=3$ ,  $c=28$ , initialverdier  $(-10,0,37)$  og  $t=0-50$  i intervall 0.01



Figur. 3D fasediagram Chen-Ueta med parametere  $a=35$ ,  $b=3$ ,  $c=28$ , initialverdier  $(-10,0,37)$  og  $t=0-50$  i intervall 0.01

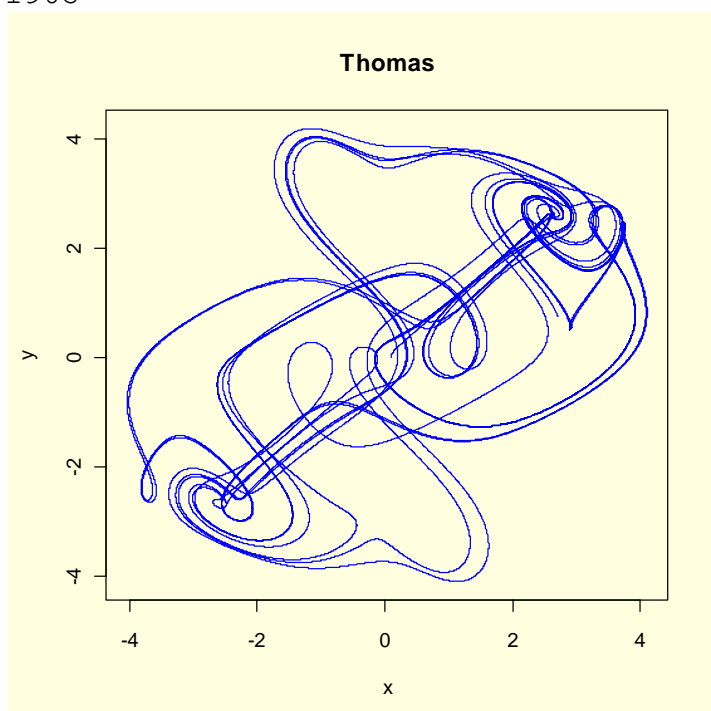
## Thomas

$$\frac{dx}{dt} = -b \cdot x + \sin y$$

$$\frac{dy}{dt} = -b \cdot y + \sin z$$

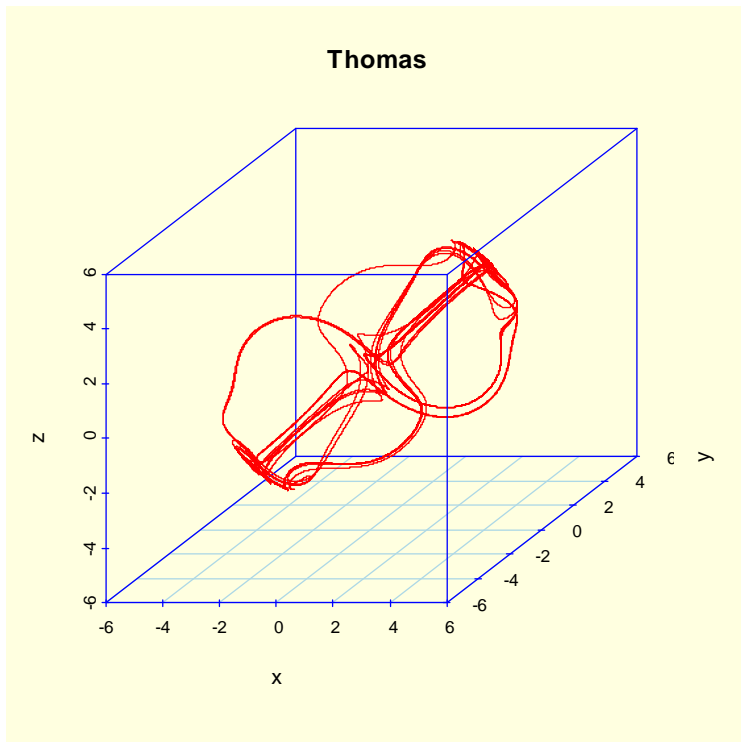
$$\frac{dz}{dt} = -b \cdot z + \sin x$$

Thomas, R. *Deterministic chaos seen in terms of feedback circuits: analysis, synthesis, "labyrinth chaos"*. International Journal of Bifurcation and Chaos 9 (1999)1889-1905



Figur. Fasediagram Thomas syklisk symmetrisk tiltrekker med parameter  $b=0.18$ , initialverdier  $(0.1,0,0)$  og tid 0-500 i step 0.01.





Figur. 3D fasediagram Thomas syklisk symmetrisk tiltrekker med parameter  $b=0.18$ , initialverdier  $(0.1,0,0)$  og tid 0-500 i step 0.01.

## Boldrighini & Francheshini

Et system av fem differentiaalligninger hvor det dimensjonsløse Reynoldstallet  $R$  inngår. Reynoldstall, forholdet mellom inerte og viskøse krefter, kan brukes til å beskrive om det blir laminar eller turbulent flyt rundt objekter.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -2x_1 + 4x_2x_3 + 4x_4x_5 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -9x_2 + 3x_1x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -5x_3 - 7x_1x_2 + R \\ \frac{dx_4}{dt} &= -5x_4 - x_1x_5 \\ \frac{dx_5}{dt} &= -x_5 - 3x_1x_4\end{aligned}$$

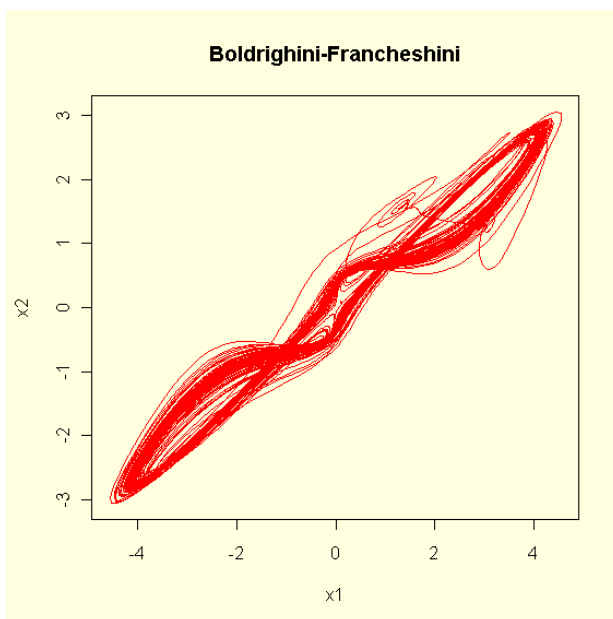
Boldrighini, C. & Francheshini, V. A five-dimensional truncation of the plane incompressible Navier-Stokes equations. *Comm. Math. Phys.* 64(1979)159-170

```
#Boldrighini-Francheshini
library(deSolve)
#Reynoldstall R=33
params<-c(R=33)
```

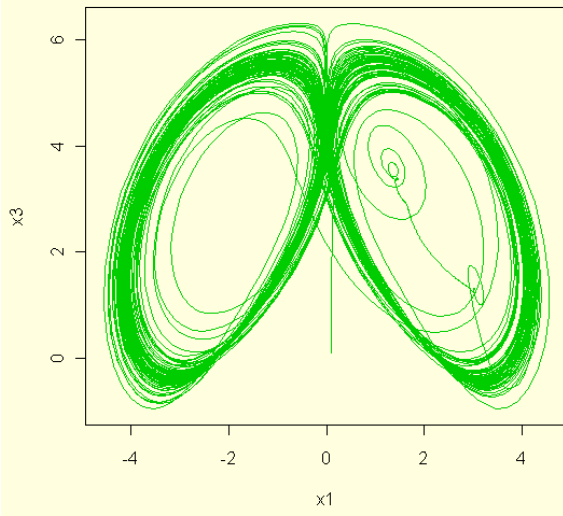
```

boldrighini<-function(t,y,p)
{
with(as.list(p), {
dx1<--2*y[1]+4*y[2]*y[3]+4*y[4]*y[5]
dx2<--9*y[2]+3*y[1]*y[3]
dx3<--5*y[3]-7*y[1]*y[2]+R
dx4<--5*y[4]-y[1]*y[5]
dx5<--y[5]-3*y[1]*y[4]
list(c(dx1,dx2,dx3,dx4,dx5))
})
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,100,0.01)
initial<-c(0.1,0.1,0.1,0.1,0.1)
resul<-lsoda(initial,tid,boldrighini,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(resul[,2],resul[,3],xlab="x1",ylab="x2",type="l",
col=2,main="Boldrighini-Francheshini")

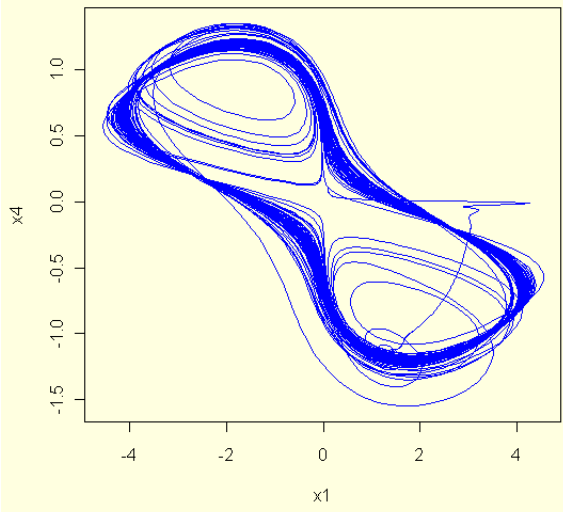
```



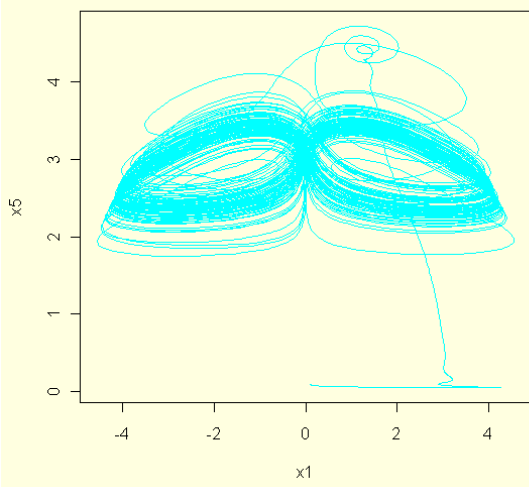
**Boldrighini-Francheshini**



**Boldrighini-Francheshini**



**Boldrighini-Francheshini**



## Hadley sirkulasjon

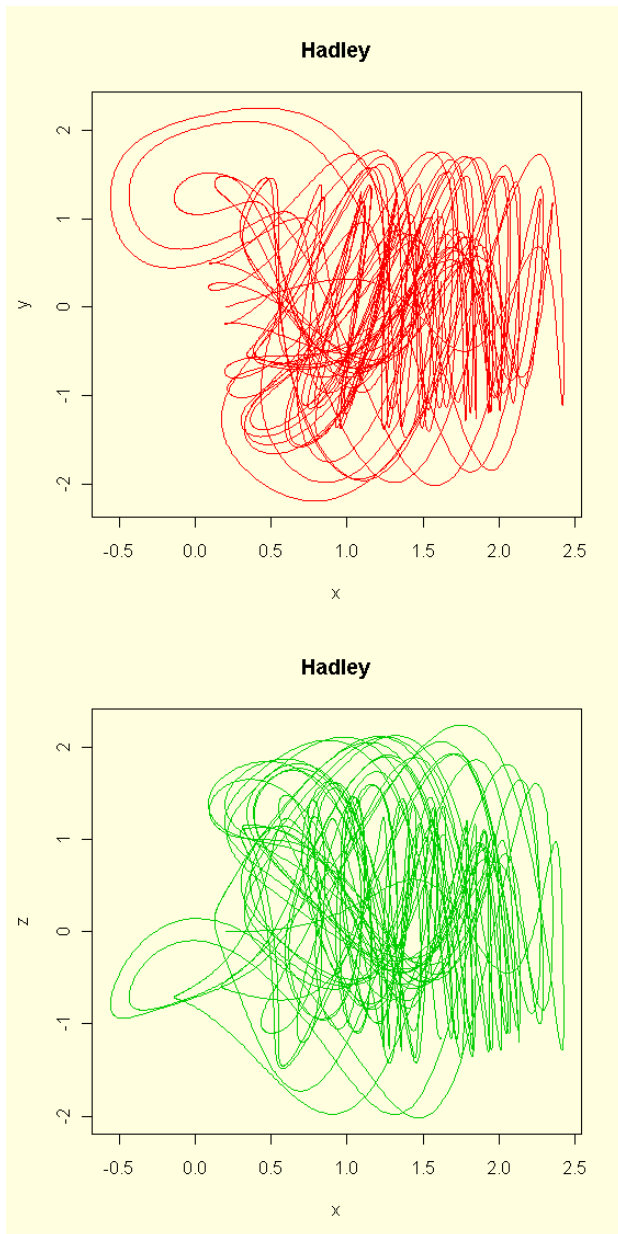
Den engelske meteorologen George Hadley (1685–1768) kunne forklare hvordan passatvindene hadde sin forklaring i varm luft som stiger ved ekvator (gir lavtrykk) og faller ned ved de subtropiske høytrykksbeltene 30° nord og syd for ekvator (Hadley celler), og hvor luften blir ført tilbake til ekvator langs jordoverflaten som passatvinder, dreiet av jordrotasjonen (Coriolis) som nordøstpassat på nordlig halvkule og sydøstpassat på sørlig halvkule.

Vi har tre ligninger:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y^2 - z^2 - ax + aF \\ \frac{dy}{dt} &= xy - bxz - y + G \\ \frac{dz}{dt} &= bxy + xz - z\end{aligned}$$

Lorenz, E.N.: *Irregularity: a fundamental property of the atmosphere*, Tellus 36A(1984) 98-100.

```
library(deSolve)
params<-c(a=0.25,b=4,F=8,G=1)
hadley<-function(t,y,p)
{
  with(as.list(p), {
    dx<--y[2]^2-y[3]^2-a*y[1]+a*F
    dy<-y[1]*y[2]-b*y[1]*y[3]-y[2]+G
    dz<-b*y[1]*y[2]+y[1]*y[3]-y[3]
    list(c(dx,dy,dz))
  })
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,100,0.01)
initial<-c(0.2,0,0)
result<-lsoda(initial,tid,hadley,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(result[,2],result[,3],xlab="x",ylab="y",type="l",
col=2,main="Hadley")
```



## Halvorsen

Syklisk symmetrisk hvor den deriverte er permutasjoner av  $x$ ,  $y$  og  $z$ . Thomas labyrintsystem er en avart av dette

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ax - 4y - 4z - y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -ay - 4z - 4x - z^2 \\ \frac{dz}{dt} &= az - 4x - 4y - x^2\end{aligned}$$

```
Arne Dehli Halvorsen (upubl)
```

```
library(deSolve)
```

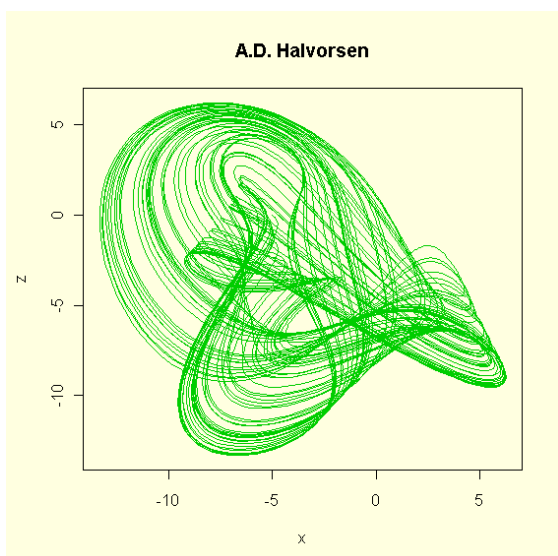
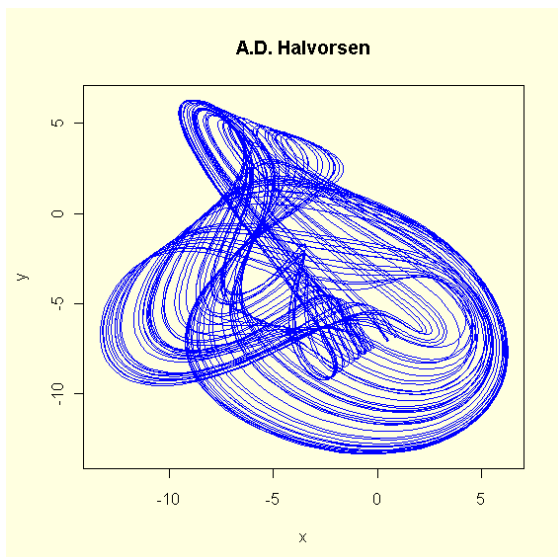
```
params<-c(a=1.27)
```

```
halvorsen<-function(t,y,p)
```

```

{
with(as.list(p), {
dx<--a*y[1]-4*y[2]-4*y[3]-y[2]^2
dy<--a*y[2]-4*y[3]-4*y[1]-y[3]^2
dz<--a*y[3]-4*y[1]-4*y[2]-y[1]^2
list(c(dx,dy,dz))
})
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,100,0.01)
initial<-c(-5,0,0)
result<-lsoda(initial,tid,halvorsen,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(result[,2],result[,3],xlab="x",ylab="y",type="l",
col=4,main="A.D. Halvorsen")
plot(result[,2],result[,4],xlab="x",ylab="z",type="l",
col=2,main="A.D. Halvorsen")

```

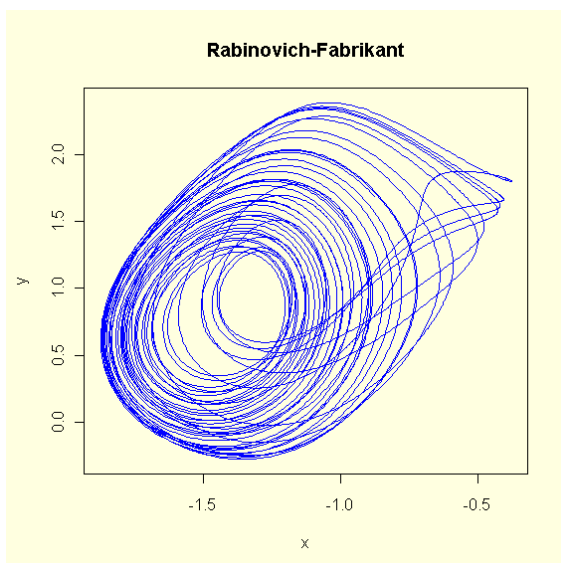


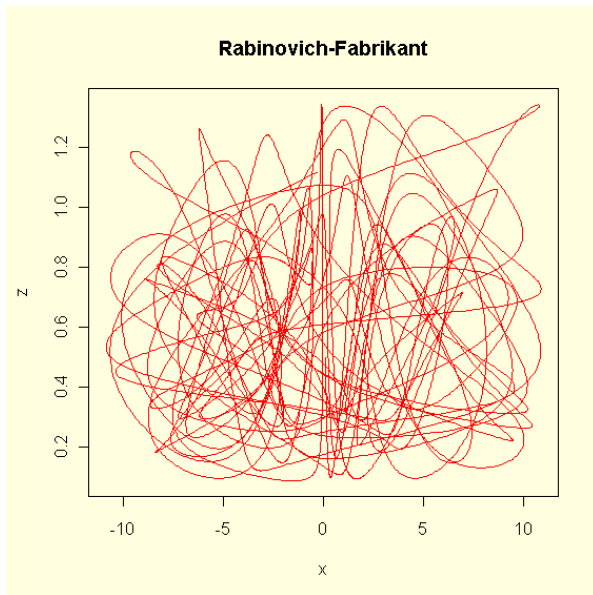
## Rabinovich-Fabrikant

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y(z - 1 + x^2) + gx \\ \frac{dy}{dt} &= x(3z + 1 - x^2) + gy \\ \frac{dz}{dt} &= -2z(a + xy)\end{aligned}$$

Rabinovich, M.I. & Fabrikant, A.L.: *Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media*. Soviet Physics JETP 50 (1979) 311-317

```
library(deSolve)
params<-c(a=1.1,g=0.87)
rabinovich<-function(t,y,p)
{
  with(as.list(p), {
    dx<-y[2]*(y[3]-1+y[1]^2)+g*y[1]
    dy<-y[1]*(3*y[3]+1-y[1]^2)+g*y[2]
    dz<--2*y[3]*(a+y[1]*y[2])
    list(c(dx,dy,dz))
  })
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,100,0.01)
initial<-c(-1,0,0.5)
resul<-lsoda(initial,tid,rabinovich,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(resul[,2],resul[,3],xlab="x",ylab="y",type="l",
col=4,main="Rabinovich-Fabrikant")
plot(resul[,2],resul[,4],xlab="x",ylab="z",type="l",
col=2,main="Rabinovich-Fabrikant")
```





## WINDMI

Solvinddrevet magnetosfære-ionosfære

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= z \\ \frac{dz}{dt} &= -az - y + b - e^x \end{aligned}$$

Horton, W., Weigel, R.S. & Sprott, J.C.: *Chaos and the limits of predictability for the solar-wind-driven magnetosphere-ionosphere system*. Phys. Plasmas 8 (2001)2946-2952

```

library(deSolve)
params<-c(a=0.7,b=2.5)
windmi<-function(t,y,p)
{
  with(as.list(p), {
    dx<-y[2]
    dy<-y[3]
    dz<--a*y[3]-y[2]+b-exp(y[1])
    list(c(dx,dy,dz))
  })
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,200,0.01)
initial<-c(0,0.8,0)
res<-lsoda(initial,tid,windmi,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(res[,2],res[,3],xlab="x",ylab="y",type="l",
col=4,main="WINDMI")

```

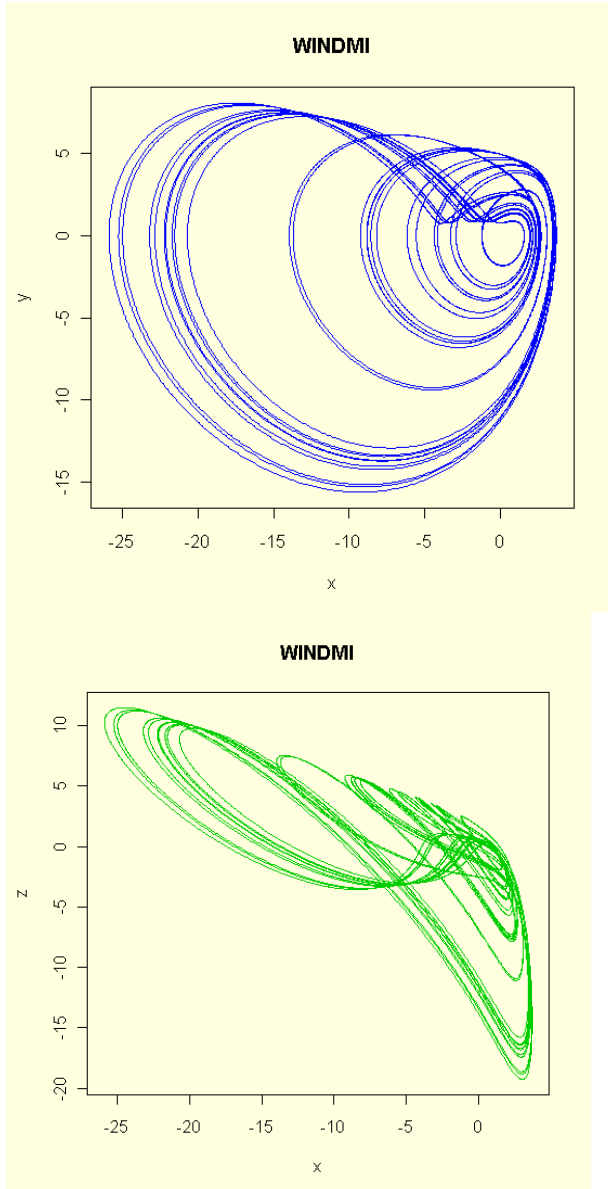


```
plot(res[,2],res[,4],xlab="x",ylab="z",type="l",
col=3,main="WINDMI")
```

```
#3D rotér og zoom med rgl
```

```
library(rgl)
```

```
plot3d (res[,2],res[,3],res[,4],xlab="x",
ylab="y",zlab="z",type="l",col=4)
```



## Moore-Spiegel

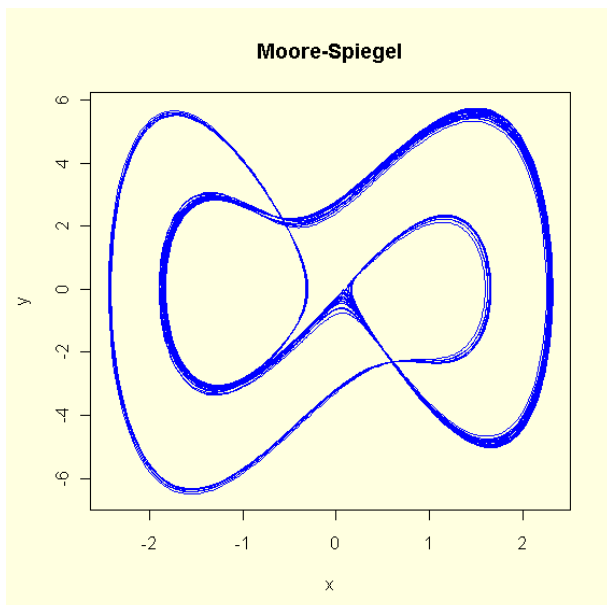
$$\frac{dx}{dt} = y$$

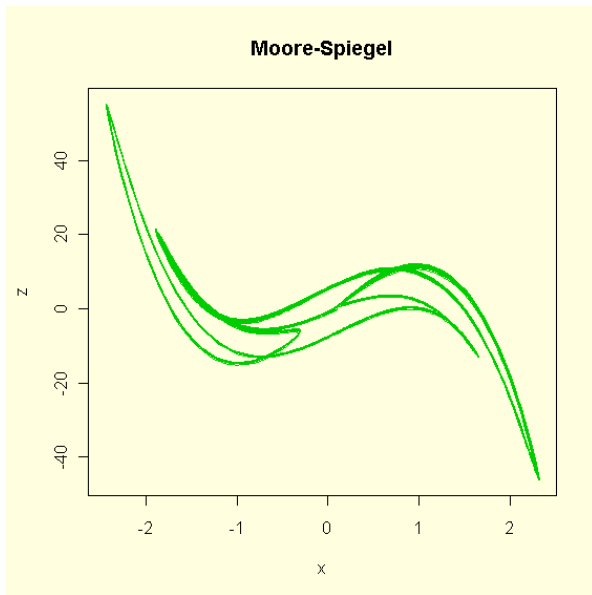
$$\frac{dy}{dz} = z$$

$$\frac{dz}{dt} = -z - (T - R + RX^2)y - Tx$$

Moore, D.W. & Spiegel, E.A.: *A thermally excited non-linear oscillator*. *Astrophys J.* 143 (1966) 871-887

```
library(deSolve)
params<-c(T=6,R=20)
moore<-function(t,y,p)
{
  with(as.list(p), {
    dx<-y[2]
    dy<-y[3]
    dz<--y[3]-(T-R+R*y[1]^2)*y[2]-T*y[1]
    list(c(dx,dy,dz))
  })
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,100,0.01)
initial<-c(0.1,0,0)
resu<-lsoda(initial,tid,moore,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(resu[,2],resu[,3],xlab="x",ylab="y",type="l",
col=4,main="Moore-Spiegel")
plot(resu[,2],resu[,4],xlab="x",ylab="z",type="l",
col=3,main="Moore-Spiegel")
#3D rotér og zoom med rgl
library(rgl)
plot3d(resu[,2],resu[,3],resu[,4],xlab="x",
ylab="y",zlab="z",type="l",col=4)
```





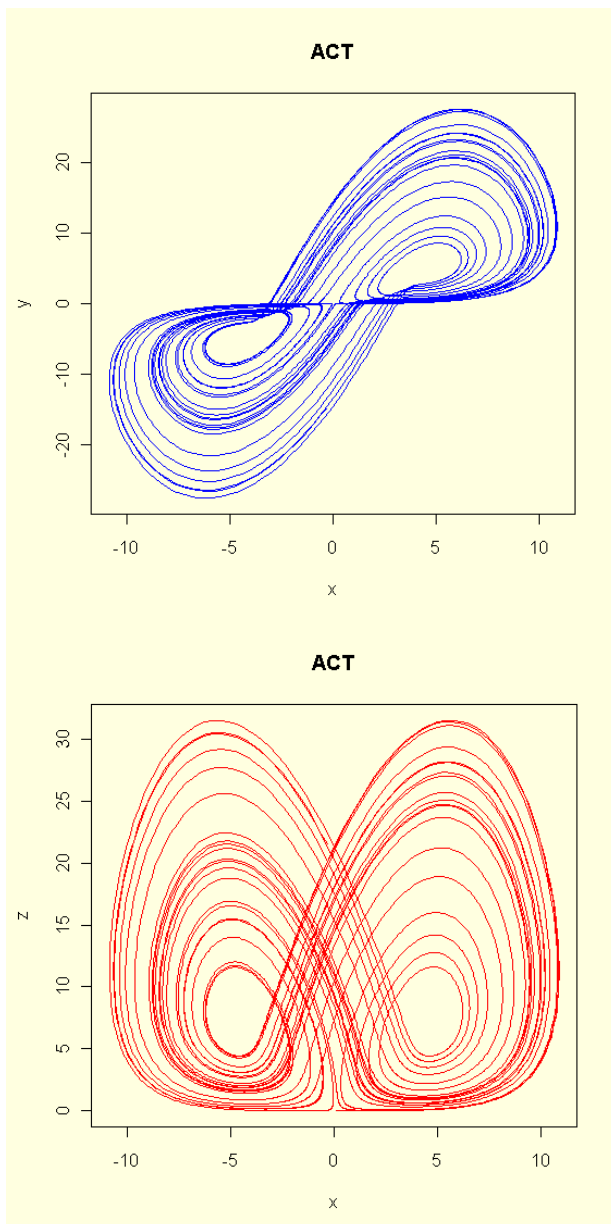
## ACT

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= -4ay + xz + my^3 \\ \frac{dz}{dt} &= -daz + xy + bz^2 \end{aligned}$$

Arnéodo, A., Couillet, P. & Tresser, C.: A possible new mechanism for the onset of turbulence. Phys.Lett. A 81(1981)197-201.

```
library(deSolve)
params<-c(a=1.8,b=-0.07,d=1.5,m=0.02)
act<-function(t,y,p)
{
  with(as.list(p), {
    dx<-a*(y[1]-y[2])
    dy<--4*a*y[2]+y[1]*y[3]+m*y[1]^3
    dz<--d*a*y[3]+y[1]*y[2]+b*y[3]^2
    list(c(dx,dy,dz))
  })
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,100,0.01)
initial<-c(0.1,0,0)
resu<-lsoda(initial,tid,act,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(resu[,2],resu[,3],xlab="x",ylab="y",type="l",
col=4,main="ACT")
plot(resu[,2],resu[,4],xlab="x",ylab="z",type="l",
col=3,main="ACT")
```

```
#3D rotér og zoom med rgl  
library(rgl)  
plot3d (resu[,2],resu[,3],resu[,4],xlab="x",  
ylab="y",zlab="z",type="l",col=4)
```



# Dissipative avbildninger

## Hénon-avbildning

En Hénon-avbildning er:

$$X_{n+1} = 1 - 1.4X_n^2 + 0.3Y_n$$

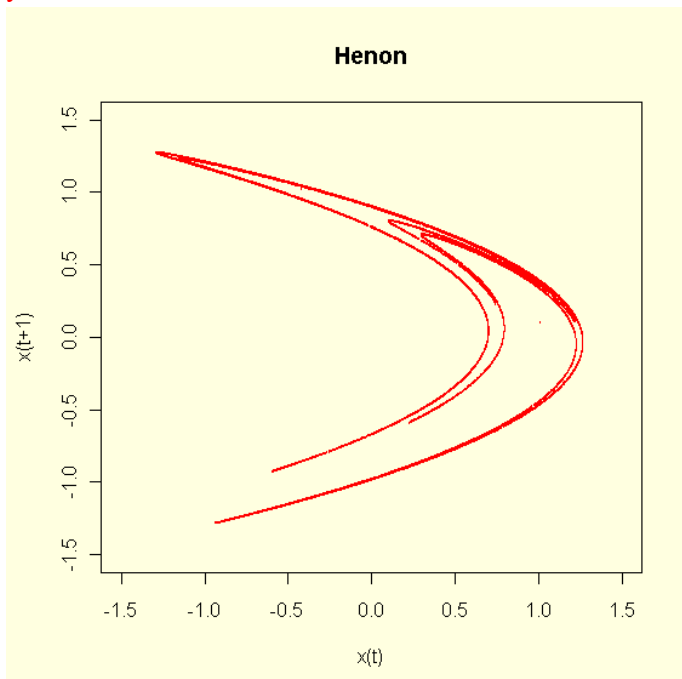
$$Y_{n+1} = X_n$$

Hénon, M. *A two-dimensional mapping with a strange attractor.*  
Comm.Math.Phys. 50 (1976) 69-77.

Hvis vi setter inn for  $Y_n$ :

$$X_{n+1} = 1 - 1.4X_n^2 + 0.3X_{n-1}$$

```
n<-20000
#lager en vektor med null
X<-rep(0,n)
Y<-rep(0,n)
par(bg="lightyellow")
plot(-1.5:1.5,-1.5:1.5,type="n",xlab="x(t)",ylab="x(t+1)",
main="Henon")
X[1]<-0.1
Y[1]<-0.1
for (t in 2:n)
{
X[t]<-1-1.4*X[t-1]^2+0.3*Y[t-1]
Y[t]<-X[t-1]
points(X[t],Y[t],col="red",cex=0.1)
}
```



Jacobi-matrisen for Hénon-avbildningen blir:

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.8X & 0.3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lyapunov-eksponenten blir:

$$\lambda_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left( \frac{(-2.8X_n + y'_n)^2 + 1}{1 + Y'_n{}^2} \right)$$

hvor den deriverte er:

$$Y'_{n+1} = \frac{1}{(-2.8X_n + 0.3Y'_n)}$$

## Burgers avbildning

Vi har følgende:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= aX_n - Y_n^2 \\ Y_{n+1} &= bY_n + X_nY_n \end{aligned}$$

Whitehead, R.R. & MacDonald, N. (1984) *A chaotic mapping that displays its own homoclinic structure*. Physics D 13 (1984)401-407

**#Burgers map**

**n<-20000**

**a<-0.75**

**b<-1.75**

**#lager en vektor med null**

**X<-rep(0,n)**

**Y<-rep(0,n)**

**par(bg="lightyellow")**

**plot(-3:0.5,-1.5:1.5,type="n",xlab="",ylab="", main="Burgers map")**

**X[1]<--0.1**

**Y[1]<-0.1**

**for (t in 2:n)**

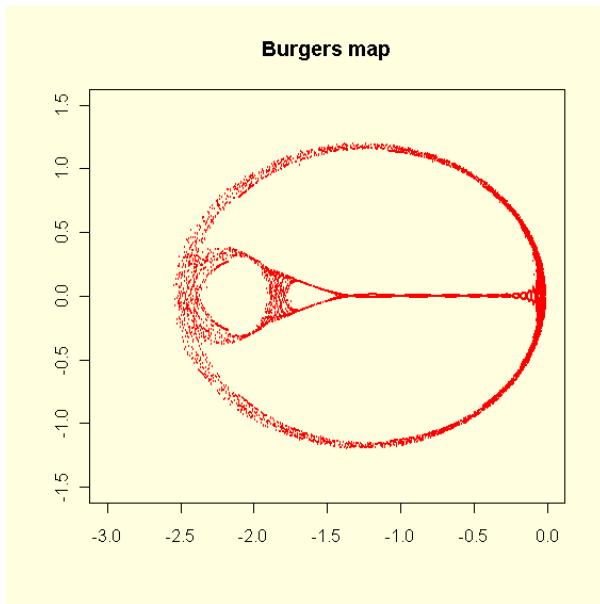
**{**

**X[t]<-a\*X[t-1]-Y[t-1]^2**

**Y[t]<-b\*Y[t-1]+X[t-1]\*Y[t-1]**

**points(X[t],Y[t],col="red",cex=0.1)**

**}**



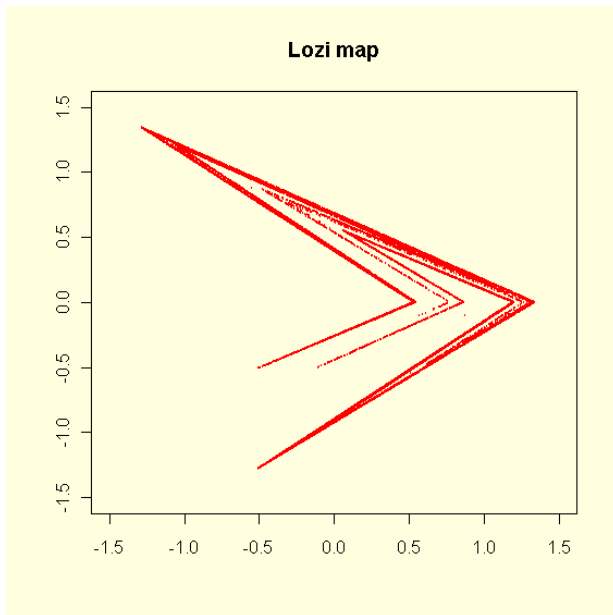
## Lozi avbildning

Vi har følgende:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 1 - a|X_n| + bY_n \\ Y_{n+1} &= X_n \end{aligned}$$

Lozi, R. *Un attracteur étrange? Du type attracteur de Hénon.* Journal de Physique (Paris) 39 (C5) (1978)9-10

```
#Lozi map
n<-20000
a<-1.7
b<-0.5
#lager en vektor med null
X<-rep(0,n)
Y<-rep(0,n)
par(bg="lightyellow")
plot(-1.5:1.5,-1.5:1.5,type="n",xlab="",ylab="", main="Lozi
map")
X[1]<--0.1
Y[1]<-0.1
for (t in 2:n)
{
X[t]<-1-a*abs(X[t-1])+b*Y[t-1]
Y[t]<-X[t-1]
points(X[t],Y[t],col="red",cex=0.1)
}
```



## Ingefærbrødmann avbildning

En avbildning som bevarer areal er:

$$X_{n+1} = 1 + |X_n| - Y_n$$

$$Y_{n+1} = X_n$$

Devaney, R.L. *A piecewise linear model for the zones of instability of an area-preserving map.* Physica D 10(1984) 287-305

Denne gir 6 heksagoner med periodiske baner.

```
#ingefærbrødmann
```

```
n<-20000
```

```
#lager en vektor med null
```

```
X<-rep(0,n)
```

```
Y<-rep(0,n)
```

```
par(bg="lightyellow")
```

```
plot(-3:8,-3:8,type="n",xlab="",ylab="",
main="Ingefærbrødmann")
```

```
X[1]<-0.5
```

```
Y[1]<-3.7
```

```
for (t in 2:n)
```

```
{
```

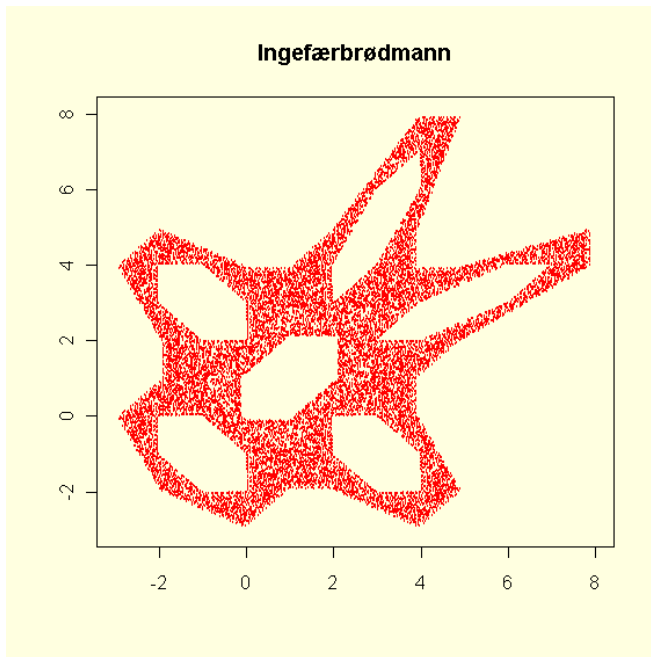
```
X[t]<-1+abs(X[t-1])-Y[t-1]
```

```
Y[t]<-X[t-1]
```

```
points(X[t],Y[t],col="red",cex=0.1)
```

```
}
```





## Predator-byttedyr

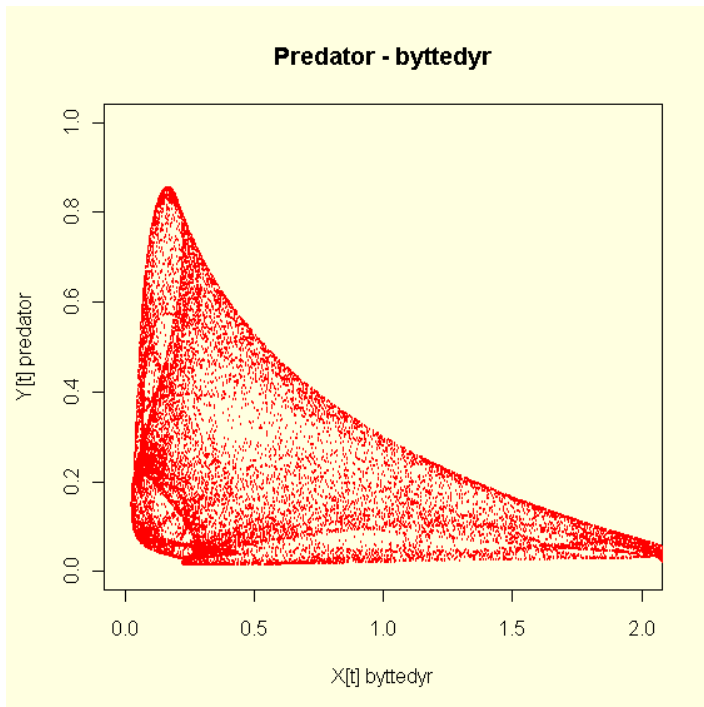
$$X_{n+1} = X_n \cdot \exp \left[ r \left( 1 - \frac{X_n}{K} \right) - \alpha Y_n \right]$$

$$Y_{n+1} = X_n [1 - \exp(-\alpha Y_n)]$$

hvor  $X_n$  er byttedyr og  $Y_n$  er predator

Beddington, J.R., Free, C.A. & Lawton, J.H. *Dynamic complexity in predator-prey models framed in difference equations*. Nature 255(1975) 58-60.

```
#predator - byttedyr
n<-20000
#lager en vektor med null
X<-matrix(NA,n,1)
Y<-matrix(NA,n,1)
par(bg="lightyellow")
plot(seq(0,2,0.2),seq(0,1,0.1),type="n",xlab="X[t]
byttedyr",ylab="Y[t] predator",
main="Predator - byttedyr")
X[1]<-0.5
Y[1]<-0.5
r<-3
K<-1
alfa<-5
for (t in 2:n)
{
a<-alfa*Y[t-1]
X[t]<-X[t-1]*exp((r*(1-X[t-1]/K))-a)
Y[t]<-X[t-1]*(1-exp(-a))
points(X[t],Y[t],col="red",cex=0.1)
}
```



## Sinai

$$X_{n+1} = X_n + Y_n + \delta \cos 2\pi Y_n \pmod{1}$$

$$Y_{n+1} = X_n + 2 \cdot Y_n \pmod{1}$$

Sinai, Ya.G. *Gibbs measures in ergodic theory*. Russ. Math. Surveys 27 (1972) 21-69

**#Sinai**

**n<-20000**

**#lager en vektor med null**

**X<-matrix(NA,n,1)**

**Y<-matrix(NA,n,1)**

**par(bg="lightyellow")**

**plot(0:1,0:1,type="n",xlab="X[t]",ylab="Y[t]",**  
**main="Sinai")**

**X[1]<-0.5**

**Y[1]<-0.5**

**delta<-0.1**

**for (t in 2:n)**

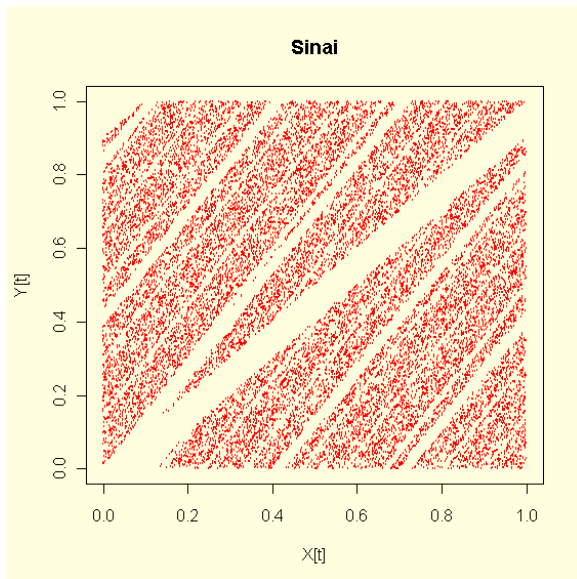
**{**

**X[t]<-(X[t-1]+Y[t-1]+delta\*cos(2\*pi)\*Y[t-1])%%1**

**Y[t]<-(X[t-1]+2\*Y[t-1])%%1**

**points(X[t],Y[t],col="red",cex=0.1)**

**}**



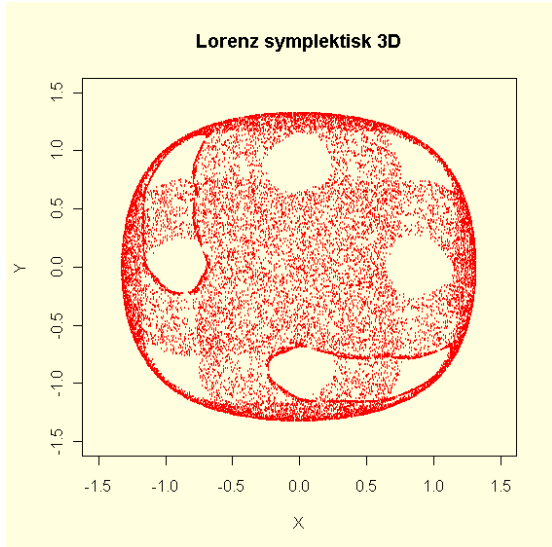
## Lorenz symplektisk 3D

Lorenz (1963) laget den symplektiske 3D-avbildningen

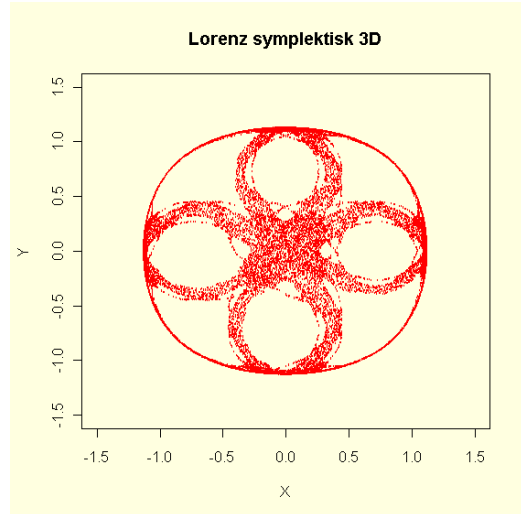
$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n Y_n - Z_n \\ Y_{n+1} &= X_n \\ Z_{n+1} &= Y_n \end{aligned}$$

```
#Lorenz symplektisk 3D
n<-20000
#lager en vektor med null
X<-rep(0,n)
Y<-rep(0,n)
Z<-rep(0,n)
par(bg="lightyellow")
plot(-1.5:1.5,-1.5:1.5,type="n",xlab="X",ylab="Y",
main="Lorenz symplektisk 3D")
X[1]<--1
Y[1]<-0.5
Z[1]<-0.5
for (t in 2:n)
{
X[t]<-X[t-1]*Y[t-1]-Z[t-1]
Y[t]<-X[t-1]
Z[t]<-Y[t-1]
points(X[t],Y[t],col="red",cex=0.1)
}
```

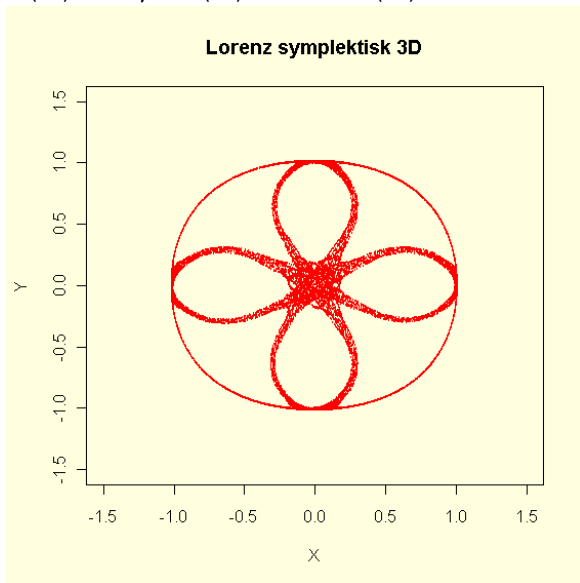
$$X(0) = -1, Y(0) = 0.5 = Z(0)$$



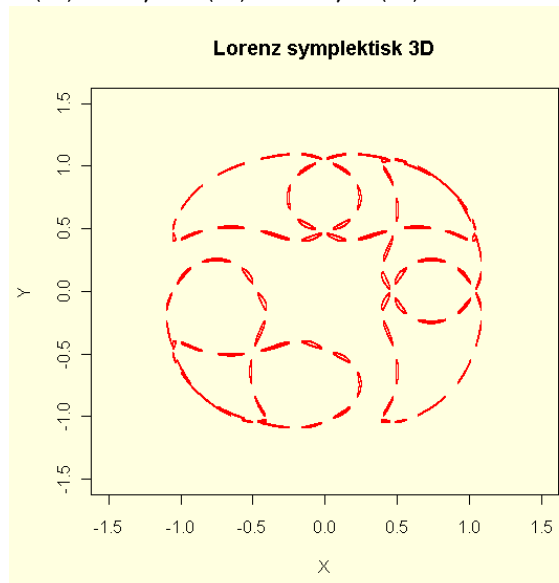
$$X(0) = -1, Y(0) = 0.3 = Z(0)$$



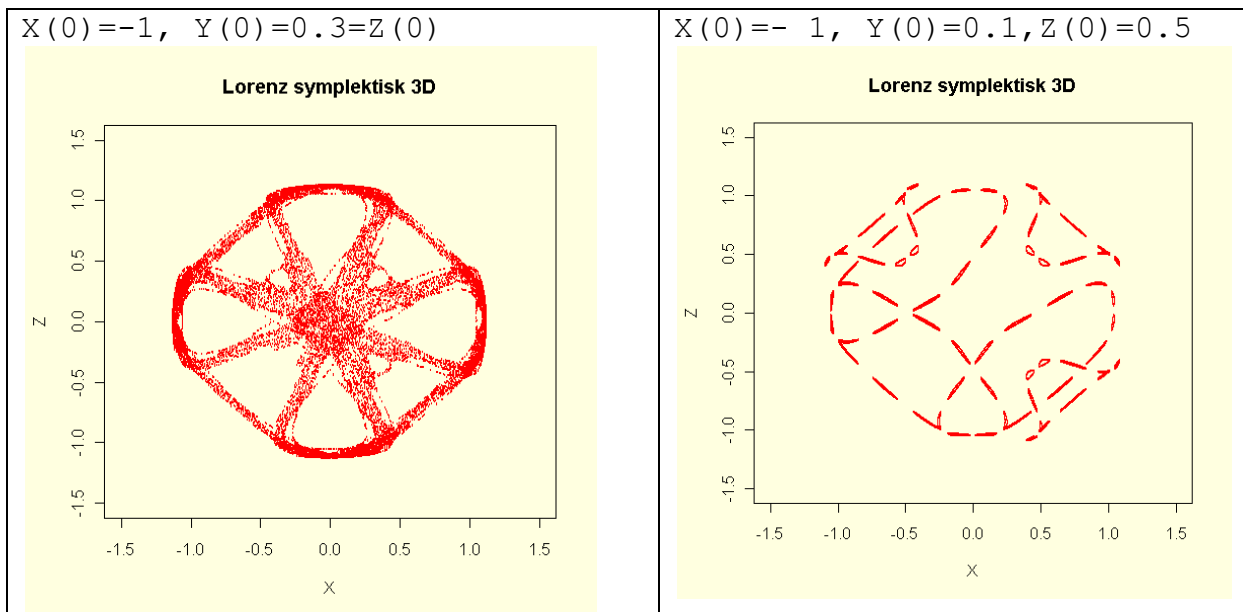
$$X(0) = -1, Y(0) = 0.1 = Z(0)$$



$$X(0) = -1, Y(0) = 0.1, Z(0) = 0.5$$



Vi kan plote X versus Z:



## Stabilitet og likevektspunkter

Det er viktig å kunne finne og identifisere likevekter i ordinære ikke-lineære differensialligninger. I lineære systemer er det en likevekt, i ikke-lineære systemer kan det være mange likevektspunkter, men kan lineariseres ved likevekt ved bruk av Jacobi-matriser.

Hvis vi har et todimensjonalt system:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y) \end{aligned}$$

Ved likevekt er  $dx/dt=0$  og  $dy/dt=0$

**Jacobi-matrisen** ( $J$ ) med de partiell-deriverte blir lik:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

En likevekt er lineær stabil hvis alle egenverdiene til Jacobi-matrisen har negative reelle verdier. En likevekt som er lineær stabil er assymptotisk stabil.

Vi kan trekke **egenverdien**  $\lambda$  fra hvert av prinsippal diagonalelementene og sette determinanten til matrisen lik 0:

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Som gir den karakteristiske ligningen:

$$(a - \lambda) \cdot (d - \lambda) - b \cdot c = 0$$

Som er en kvadratisk ligning som har løsningene for egenverdiene:

$$\lambda = \frac{a + d}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(a - d)^2 + 4 \cdot b \cdot c}$$

Løsningene for egenverdiene  $\lambda$  i to dimensjoner kan være positive eller negative, og hvis uttrykket under kvadratroten er negativ så kan løsningene være komplekse tall ( $\lambda = a \pm bi$ ), som danner et komplekst par. Løsningene kan også være reelle hvor  $b=0$  i det komplekse tallet. Vi kan se på løsningene for  $\lambda$  i et Argand plan (komplekst plan). Hvis alle løsningene for egenverdiene ligger vekk fra den imaginære akse ( $a=0$  for  $a \pm bi$ ) kalles systemet hyperbolsk. Hvis en av egenverdiene har ingen reell del så er systemet ikke-hyperbolsk. Vi kan nå studere hvordan egenverdiene beveger seg rundt i det komplekse planet og hvis egenverdiene krysser den reelle akse eller den imaginære akse i det komplekse planet så blir det en bifurkasjon.

Vi kan klassifisere stabiliteten ut fra egenverdiene:

**Reelle egenverdier** ( $b=0$ ): to positive (ustabil node), to negative (stabil node), en positiv og en negativ (sadelpunkt)

**Komplekse egenverdier** ( $a \pm bi$ ): en positiv og en negativ til høyre for den imaginære akse (ustabilt fokus), en negativ og en positiv til venstre for den imaginære akse (stabilt fokus), en positiv og en negativ liggende på den imaginære akse (senter).

Hvis vi har følgende generelle system av todimensjonale lineære differensialligninger med parameterverdier  $a$ ,  $b$ ,  $c$  og  $d$ .

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned}$$

Uttrykt i matriseform blir disse:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\dot{X} = A \cdot X$$

Koeffisientmatrisen  $A$  blir:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Hvis vi har en  $n \times n$  matrise  $A$  så vil sammenhengen mellom **egenverdien**  $\lambda$  og **egenvektoren**  $v$  være følgende:

$$Av = \lambda v$$

Som kan omskrives til:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

hvor  $I$  er identitetsmatrisen  $I_2$ .

Som gir:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

Sammenhengen mellom matrisen  $A$ , den **inverse matrisen**  $A^{-1}$  og identitetsmatrisen  $I$  er:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

En  $2 \times 2$  matrise er **singulær** når determinanten er lik 0.

Egenverdiene til en matrise  $A$  er gitt ved **den karakteristiske ligningen**:

$$\det(A - \lambda I)v = 0$$

Vi har videre **determinanten** til  $A$ :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Og derfor blir:

$$\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

**Trace til  $A$**  ( $\text{tr}(A)$ ) er summen av alle diagonalelementene i matrisen:

$$\text{tr}(A) = a + d$$

Vi har det karakteristiske polynomet til matrisen  $A$  ( $P_A(\lambda)$ ):

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

og generelt vil matrisen til polynomet bli:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

Egenverdien  $\lambda$  til matrisen  $A$  er roten til et polynom til matrisen  $A$ . Vi kaller røttene til den karakteristiske ligningen for **egenverdiene**  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$ :

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

Derved kan egenverdiene  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  til matrisen  $A$  uttrykkes i form av determinanten og trace til  $A$ :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ \text{tr}(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

Vi kan beregne **diskriminanten**  $D$  til en matrise  $A$ :

$$D = [tr(A)]^2 - 4 \cdot \det(A)$$

Hvis determinanten  $D=0$  så er egenverdiene til  $A$  reelle og like. Er  $D>0$  er egenverdiene reelle og forskjellige. Er  $D<0$  er egenverdiene komplekse tall i konjugate par.

Hvis egenverdiene til  $A$  er reelle og distinkte så kan vi finne egenverdiene  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  til  $A$  som blir lik røttene i det karakteristiske polynomet  $P_A(\lambda)$  ved å bruke:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A)$$

Som har løsningene for  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$ :

$$\frac{1}{2} \left( tr(A) \pm \sqrt{[tr(A)]^2 - 4 \cdot \det(A)} \right) = \frac{tr(A) \pm \sqrt{D}}{2}$$

Røttene er reelle og distinkte hvis diskriminanten  $D>0$

Hvis vi har funnet egenverdiene  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  kan vi finne egenvektorene  $v_1$  og  $v_2$  som hører sammen med disse egenverdiene ved hjelp av:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Noe som gir den generelle løsningen:

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot v_2$$

Initialbetingelsene  $x_0$  kan skrives som en kombinasjon av egenvektorer. Vi løser **initialverdiproblemet** ved å løse følgende ligning fordi  $e^0=1$ :

$$x_0 = c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2$$

Hvis vi lar  $C$  være en  $2 \times 2$  matrise hvor hver kolonne er egenvektorene  $v_1$  og  $v_2$ :

$$C = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

$C$  vil alltid være invertibel. Vi kan omskrive ligningen for initialverdiproblemet som:

$$X_0 = C \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

En unik løsning for å finne koeffisientene  $c_1$  og  $c_2$  blir:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot X_0$$

Denne løses ved at:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Hvis vi har reelle og like egenverdier:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

så blir det bare en lineær uavhengig egenvektor:

$$A \cdot v = \lambda_1 \cdot v$$

Hvis egenverdiene til  $A$  er kompleks:



$$\lambda = a + bi \quad b \neq 0$$

så blir:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Den tilsvarende egenvektoren:

$$v = w_1 + w_2 i$$

$\{w_1, w_2\}$  blir basis.

Multiplisering av vektorer i  $R^2$  gir rotasjon mot klokka på en sirkel med radius  $r$  og vinkel  $\theta$ .

$$(a, b) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta)$$

Da har vi:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

For komplekse tall benyttes ofte Eulers formel:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Ut fra om egenverdiene er reelle eller komplekse tall og fortegnene på egenverdiene så kan man si noe om stabiliteten ved likevektspunktene. Hyperbolsk eller ikke-hyperbolsk stabilitet med spiraler (fokus), radialpunkter (node) eller sadelpunkter.

Vi har maksimum eller minimum når den deriverte  $dx/dt=0$ . Når den deriverte er  $>0$  er det en stigende kurve og når den deriverte er  $<0$  er det en synkende kurve. Ved **vendepunkter** med vendetangenter er den andrederiverte lik 0. Når den **andrederiverte** er  $>0$  er det et minimum og når den andrederiverte er  $<0$  er det et maksimum.

For  $n=2$  har vi e.g.:

To negative egenverdier gir stabil node.

En positiv og en negativ egenverdi gir et sadelpunkt

To positive egenverdier gir en ustabil node.

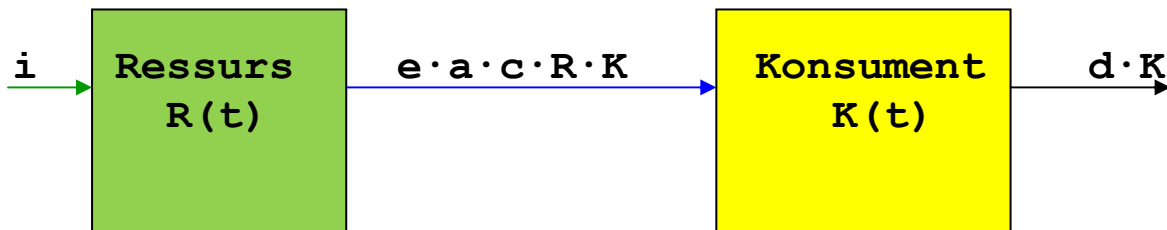
Hvis egenverdiene er komplekse tall (imaginære tall) vil det bli et fiksert tall som senter eller spiral. Komplekse tall kan vises grafisk i et Argand diagram hvor den horisontale x-aksen er den reelle delen av  $\lambda$  og y-aksen er den imaginære delen.

I et system med to variable e.g. Lotka-Volterra kan vi finne type likevekt ved å se på fortegnet og verdi til trace og determinant til Jacobimatrisen.

# Boksmodeller

## Ressurs-konsumentmodell

Vi har ressurser ( $R$ ) som blir konsumert ( $K$ ) og disse endrer seg over tid ( $dR/dt$  og  $dK/dt$ ). Vi lar  $i$  være konstant tilførsel av ressurser og  $d$  angir død av konsumentene ( $dK$ ).



$e$  er en omdanningsfaktor fra ressurs til konsument  
 $a$  er sannsynligheten for at konsument bruker ressurs  
 $c$  er kontaktrate mellom ressurs og konsument  
 $d$  er død av konsumenten, i.e. konstant per capita dødsrate  
 $i$  er immigrasjon eller tilførsel av ressurs, konstant ressurstillførsel.

Endring i ressursmengde over tid ( $dR/dt$ ) er lik funksjonen av tilførsel av  $R$  ( $f(R)$ ) og i dette tilfelle er  $f(R)=i$ . Tap av ressurs er en funksjon av både ressurs og konsument ( $f(R,K)$ ) og i dette tilfelle er  $f(R,K)=a \cdot c \cdot R \cdot K$

$$\frac{dR}{dt} = f(R) - f(R,K)$$
$$\frac{dR}{dt} = i - a \cdot c \cdot R \cdot K$$

Hvis  $f(R)=r \cdot R$  har vi en konstant vekst av ressurs og dette tilsvarende Lotka-Volterra predator-byttedyrmodell. Hvis  $f(R)=r \cdot R(1-R/K)$  vil veksten følge en logistisk funksjon. Endring i konsumentmengde ( $dK/dt$ ) er tilførsel av ressurser ( $e \cdot a \cdot c \cdot R \cdot K$ ) (type I ressurskonsumering) minus dødsrate ( $d \cdot K$ ):

$$\frac{dK}{dt} = e \cdot a \cdot c \cdot R \cdot K - d \cdot K$$

```
#Ressurs-konsumentmodell
```

```
#Parameterverdier p
```

```
p<-c(e=0.04,a=0.02,c=0.01,d=0.01,i=0.05)
```

```
ressurs<-function(t,x,p)
```

```
{
```

```
with(as.list(p), {
```

```
R<-x[1]
```

```
K<-x[2]
```

```
dRdt<-i-a*c*R*K
```

```
dKdt<-e*a*c*R*K-d*K
```

```
list(c(dRdt,dKdt))
```

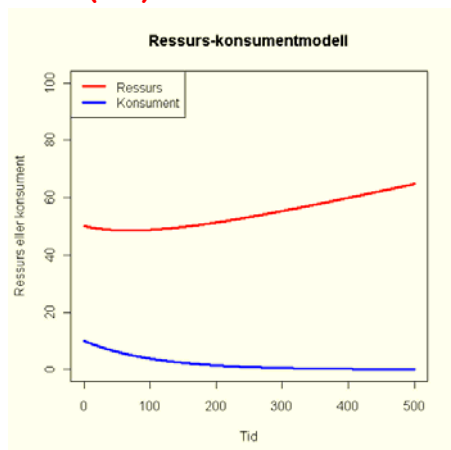
```
})
```

```
}
```

```

require(deSolve)
tid<-seq(0,500,0.1) #tid
start<-c(50,10) #start (R,K)
ut<-
as.data.frame(lsoda(start,tid,ressurs,params,rtol=1e-4))
plot(ut[,1],ut[,2],xlim=c(0,500),ylim=c(0,100),type="n",
ylab="Ressurs eller konsument",xlab="Tid",main="Ressurs-
konsumentmodell")
lines(ut[,1],ut[,2],col=2,lwd=3)
lines(ut[,1],ut[,3],col=4,lwd=3)
legend("topleft",c("Ressurs","Konsument"),col=c(2,4),
lwd=c(3,3))
head(ut)

```



Ressurs-konsumentmodell med økning i ressurser og ekstinksjon av konsumenten med følgende parameterverdier:  $c(e=0.04, a=0.02, c=0.01, d=0.01, i=0.05)$  og startverdi for ressurser=50 og konsument=10

## Epidemiologisk modell

Patogener som gir sykdom er vanligvis vertsspesifikke bakterier, virus eller sopp. Den enkleste type SIR-modell ser bare på tettheten per arealenhet av vertsorganismen. Antall verter  $N$  er gitt ved

$$N = S + I + R$$

hvor  $S$  er antall suseptible (motakelige),  $I$  er infekterte og  $R$  er antall resistente individer. Patogenet sprer seg fra infekterte til suseptible individer, og blir avhengig av hvor stor andel av individene som er infektert. Resistente individer sprer ikke patogenet og virker uttynnende. Den enkleste type modell ser bort fra imigrasjon og emigrasjon. Endringen per tidsenhet for  $S$ ,  $I$  og  $R$  blir på samme måte som for massevirkningslover i kjemi:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta IS$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

hvor beta ( $\beta$ ) er overføringskoeffisienten som angir hastigheten for økningen i antall infektete individer. Uttrykket  $\beta S$  er en overføringsfunksjon med lineær respons, og overføringshastigheten er antall nye infektete per tidsenhet. Her angir R både de resistente individene, men også dem som dør, siden vi opererer med konstant N. Gamma ( $\gamma$ ) er hastigheten som individene blir resistente, og er også den inverse av varigheten av sykdommen. Prevalens ( $I/N$ ) er antall syke individer dividert på antall individer i befolkningen. Man er ofte interessert i å vite når sykdommen bryter ut. Det betyr at  $dI/dt > 0$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I > 0$$

Vi dividerer på I og ser at sykdom bryter ut når tettheten av suseptible er større enn  $\gamma/\beta$ :

$$S > \frac{\gamma}{\beta}$$

Vaksinasjon reduserer antall S og beskytter også dem som ikke er vaksinert. Hvis man har en stor populasjon hvor  $N \approx S$  er det stor mulighet for utbrudd av sykdom, bl.a. problem med store monokulterer og tette populasjoner. Hvis  $N \approx S$  så blir den reproduktive raten for sykdommen (infeksjonskraften,  $r_0$ ) lik:

$$r_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$$

Husk at måleenhetene på hver side av likhetstegnet i differensialligningene må stemme overens.

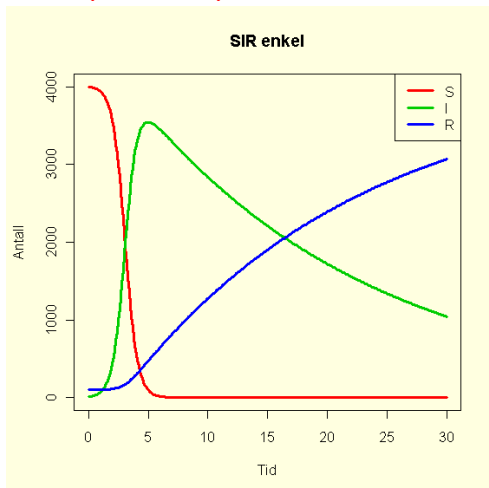
### #enkel SIR-modell

```
p<-c(b=0.0005,g=0.05) #parameterverdier
sir2<-function(t,x,p)
{
  with(as.list(p), {
    S<-x[1]
    I<-x[2]
    R<-x[3]
    dSdt<--b*I*S
    dIdt<-b*I*S-g*I
    dRdt<-g*I
    list(c(dSdt,dIdt,dRdt))
  })
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,30,0.1) #tid
start<-c(4000,10,100) #startverdi antall(S,I,R)
#lagrer resultatet i objekt result
```

```

result<-as.data.frame(lsoda(start,tid,sir2,p,rtol=1e-4))
par(bg="lightyellow")
plot(result[,1],result[,2],type="n",xlab="Tid",
ylab="Antall",main="SIR enkel")
lines(result[,1],result[,2],col=2,lwd=3)
lines(result[,1],result[,3],col=3,lwd=3)
lines(result[,1],result[,4],col=4,lwd=3)
legend("topright",c("S","I","R"),col=c(2,3,4),lwd=c(3,3,3))
head(result)

```

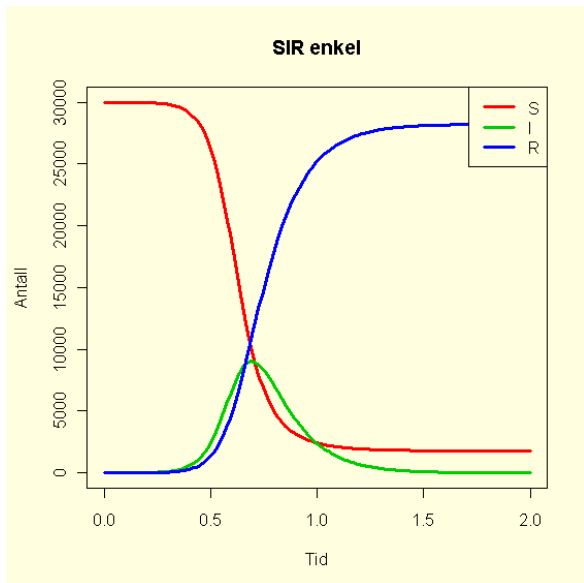


For eksempel en enkel ufarlig (rask resistens) infeksjon på campus hvor ingen i utgangspunktet er resistente.

```

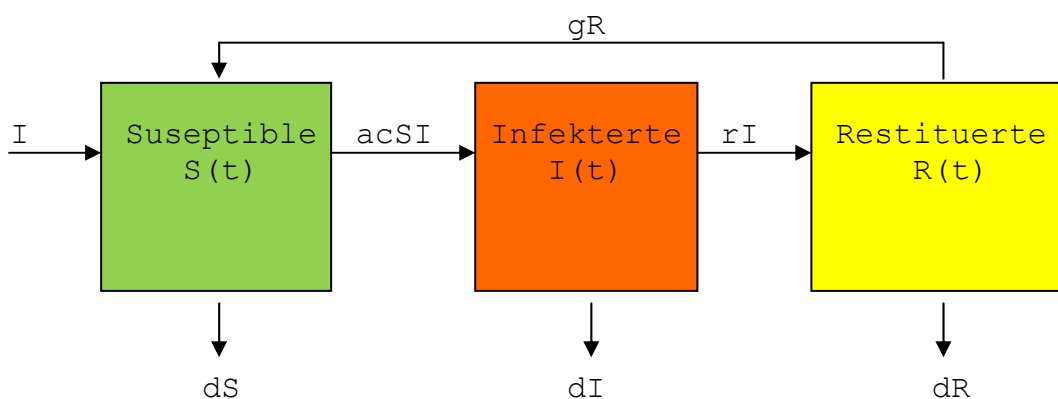
p<-c(b=0.0008,g=8)
sir2<-function(t,x,p)
{
with(as.list(p), {
S<-x[1]
I<-x[2]
R<-x[3]
dSdt<--b*I*S
dIdt<-b*I*S-g*I
dRdt<-g*I
list(c(dSdt,dIdt,dRdt))
})
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,2,0.01) #tid måneder
start<-c(3*1E4,1,0) #startverdi antall(S,I,R)
#lagrer resultatet i objekt result
result<-as.data.frame(lsoda(start,tid,sir2,p,rtol=1e-4))
par(bg="lightyellow")
plot(result[,1],result[,2],type="n",ylim=c(0,3*1E4),xlab="Tid",
,
ylab="Antall",main="SIR enkel")
lines(result[,1],result[,2],col=2,lwd=3)
lines(result[,1],result[,3],col=3,lwd=3)
lines(result[,1],result[,4],col=4,lwd=3)
legend("topright",c("S","I","R"),col=c(2,3,4),lwd=c(3,3,3))

```



Man kan også i stedet uttrykke antall tilfeller som en frekvens  $S/N$ ,  $I/N$  og  $R/N$ , hvor  $N=S+I+R$

En epidemiologisk modell (SIR-modell) for spredning av sykdom



hvor

$S$  er suseptible (mottakelige) individer som kan bli syke

$I$  er infekterte individer

$R$  er restituerte individer som har blitt friske, hvorav noen kan bli syke på nytt med rate  $g$

$a$  er sannsynligheten for overføring av sykdom. Infekterte individer kommer i kontakt med suseptible med rate  $c$  per friskt individ

$d$  er sannsynligheten for å dø, dødsrate

$i$  er konstant tilførsel av suseptible individer bl.a. ved fødsel og immigrasjon.

Endring i suseptible, infekterte og restituerte per tidsenhet blir henholdsvis  $dS/dt$ ,  $dI/dt$  og  $dR/dt$ .

$$\frac{dS}{dt} = i - d \cdot S - a \cdot c \cdot S \cdot I + g \cdot R$$

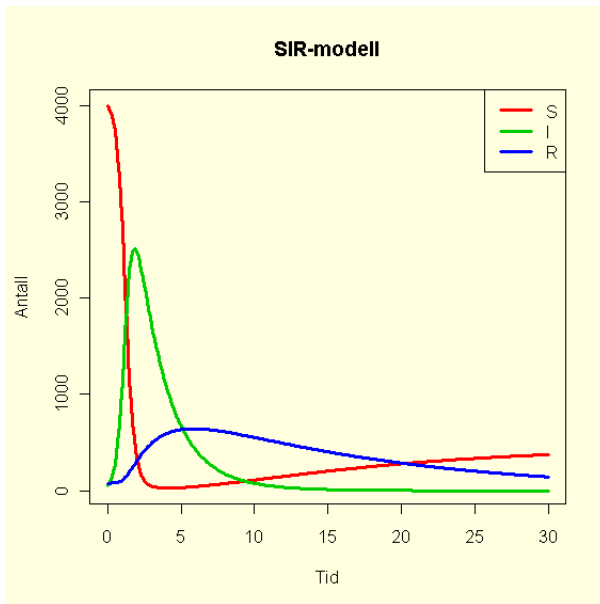
$$\frac{dI}{dt} = a \cdot c \cdot S \cdot I - d \cdot I - r \cdot I$$

$$\frac{dR}{dt} = r \cdot I - g \cdot R - d \cdot R$$

```

#Epidemiologisk SIR-modell
#Parameterverdier p
p<-
c(a=0.05,c=0.02,d1=0.001,d2=0.4,d3=0.02,i=0.05,g=0.05,r=0.1)
sir<-function(t,x,p)
{
with(as.list(p), {
S<-x[1] #suseptible
I<-x[2] #infekterte
R<-x[3] #resistente
dSdt<-i-d1*S-a*c*S*I+g*R
dIdt<-a*c*S*I-d2*I-r*I
dRdt<-r*I-g*R-d3*R
list(c(dSdt,dIdt,dRdt))
})
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,30,0.1)
start<-c(4000,50,80) #startantall (S,I,R)
ut<-
as.data.frame(lsoda(start,tid,sir,p,rtol=1e-4))
par(bg="lightyellow")
plot(ut[,1],ut[,2],type="n",
ylab="Antall",xlab="Tid",main="SIR-modell")
lines(ut[,1],ut[,2],col=2,lwd=3)
lines(ut[,1],ut[,3],col=3,lwd=3)
lines(ut[,1],ut[,4],col=4,lwd=3)
legend("topright",c("S","I","R"),col=c(2,3,4),lwd=c(3,3,3))
head(ut)

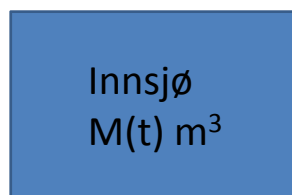
```



Den enkleste typen boksmoell er eksempel på en innsjø hvor det strømmer vann inn og ut. Endring i mengden vann i innsjøen  $dM/dt$  er lik mengden vann som renner inn i sjøen minus vann som renner ut:

$$\frac{dM}{dt} = I(t) - o(t)$$

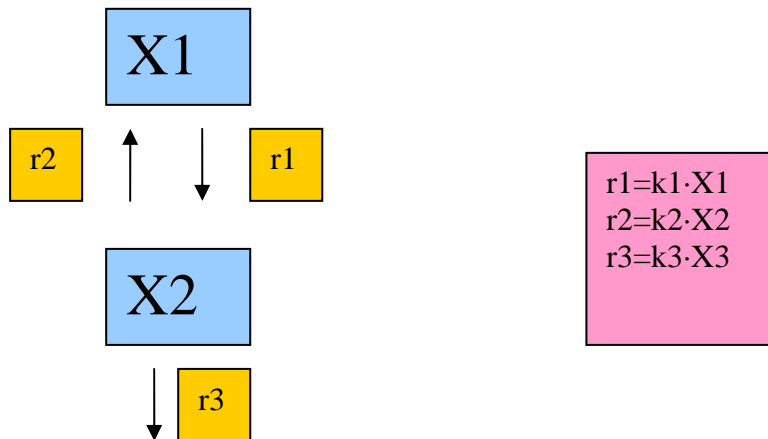
Vann inn  $I(t)$  m<sup>3</sup>/døgn



Vann ut  $o(t)$  m<sup>3</sup>/døgn



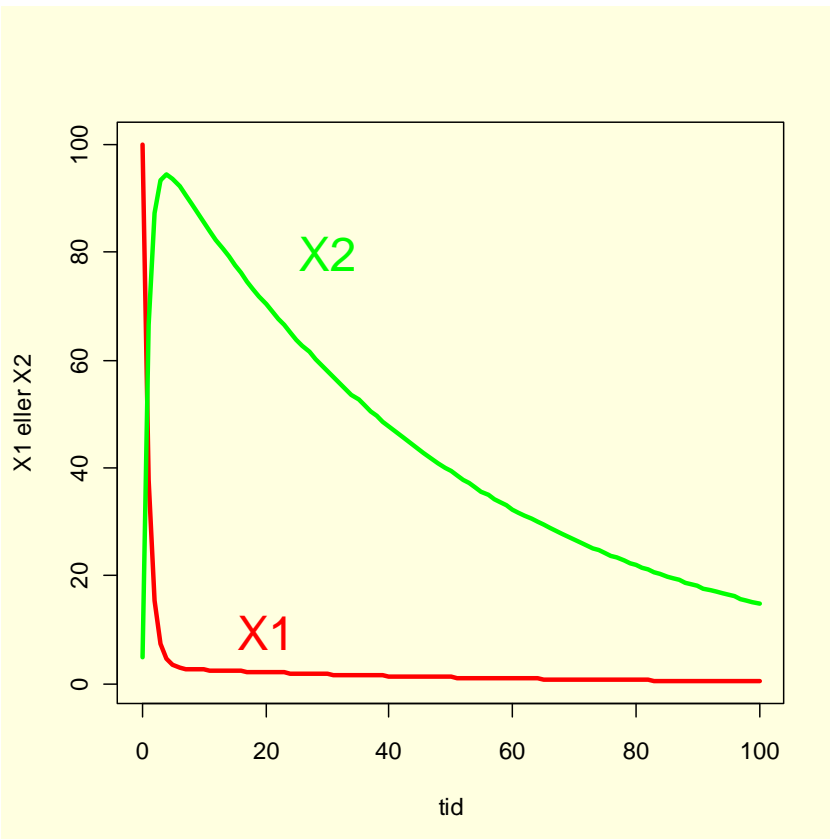
Anta at vi har et stoff X1 som omdannes til X2 med reaksjonsrate  $r_1$ ; og X2 omdannes til X1 med rate  $r_2$ , samt X2 forlater systemet med rate  $r_3$ . Anta at vi har tre hastighetskonstanter  $k_1$ ,  $k_2$  og  $k_3$ .



Dette kan formuleres som følgen de differensialligninger:

$$\frac{dx_1}{dt} = k_2 \cdot x_2 - k_1 \cdot x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = k_1 \cdot x_1 - k_2 \cdot x_2 - k_3 \cdot x_2$$



Parameterverdier  $k_1=1, k_2=0.03, k_3=0.02$  (`params<-c(k1=1,k2=0.03,k3=0.02)`) og startverdi 100 X1 og 5 X2 (`init.state<-c(100,5)`).

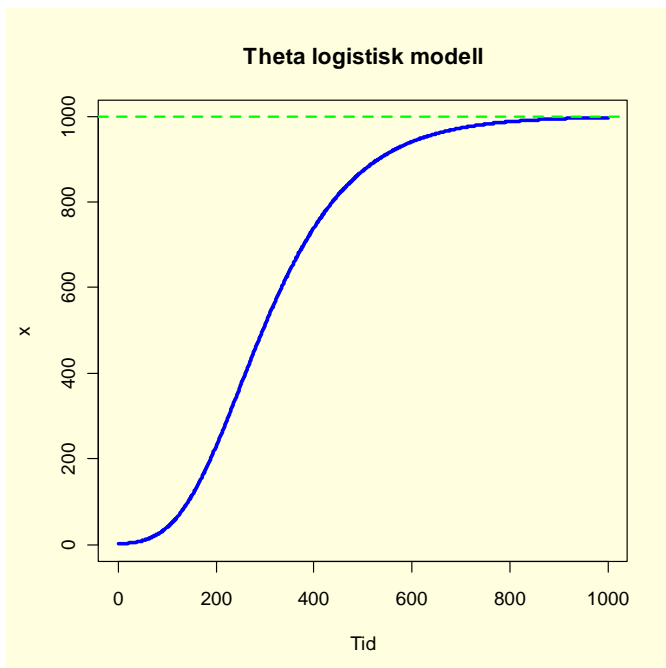
Benytter man konstanter med måleenheter er det viktig at måleenhetene for modellen blir riktig. Samme måleenheter på begge sider av likhetstegnet i ligningen. Denne boksmodellen kan utvides til å gjelde parasittervertsdyr.

## Theta-logistisk ligning

Vi har følgende theta( $\theta$ )-logistisk ligning:

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x \left( 1 - \left( \frac{x}{K} \right)^\theta \right)$$

Løses numerisk i lsoda med gitte parametere (`params<-c(r=0.4,K=1000,theta=0.02)`) og initialverdi (`init.state<-1`) som kan endres ettersom man tester modellen:



Figur 6. Numerisk løsning av Theta-logistisk modell med følgende verdier for konstanter:  $r=0.4, K=1000, \theta=0.02$ . Funksjonen nærer seg bærerkonsentrasjonen  $K=1000$

## Laplace-ligningen o.a.

Laplace-ligningen er en partiell differensialligning:

$$\frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(f(x,y))}{\partial y^2} = 0$$

Denne har mange løsninger:

$$f(x,y) = e^x \cdot \cos y$$

$$f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$$

$$f(x,y) = x + 2y$$

Andre eksempler på andre ordens differensialligninger er Besselligningen (F.W.Bessel (1784-1846)):

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + x \cdot \frac{\partial y}{\partial t} (x^2 - y^2) y = 0$$

og Legendreligningen:

$$(1 - x^2) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2x \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + a(a + 1) \cdot y = 0$$

Ofte kan andre ordens differensialligninger beskrives som en uavhengig variabel  $x$  og en avhengig variabel  $y$ , den førstederiverte  $dy/dx$  og den andrederiverte  $d(dy/dx)/dx$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = f(y', y, x) \quad \text{hvor } y' = \frac{dy}{dx} = z$$

Vi får i stedet en førsteordens ligning:

$$\frac{dz}{dx} = f(z, y, x)$$

## Todimensjonale likevekter

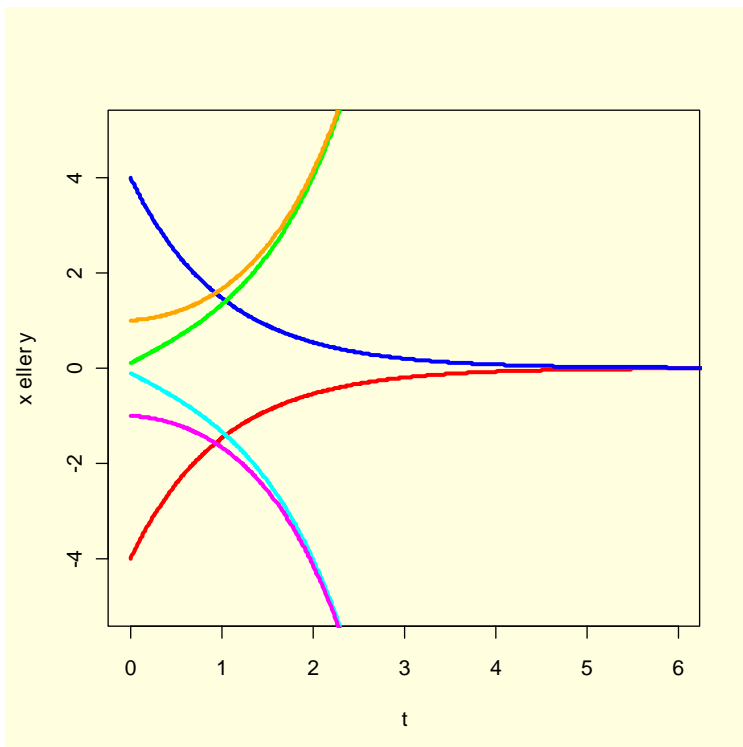
Løsning av ligningssystemet:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

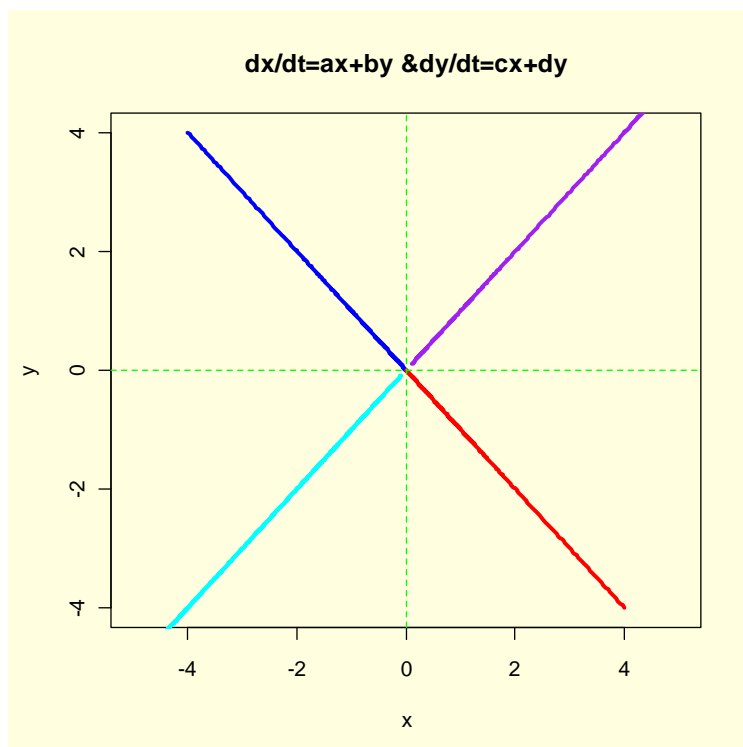
Det enkleste systemet av disse er hvor  $a=d=0$  og  $b=c=1$ , dvs.  $f=y$  og  $g=x$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x \end{aligned}$$



Figur. Tidsserieplot av  $dx/dt=ax+by$  og  $dx/dt=cx+dy$  hvor

$a=d=0$ ,  $b=c=1$ ,  $d=0$ , og startverdi  $(-4,4, \text{rød \& blå})$ ,  $(-0.1,-1, \text{cyan \& magenta})$  og  $(0.1 \text{ og } 1, \text{grønn \& oransje})$ . Sammenlign med stabil og ustabil manifold i fasediagrammet nedenfor



Figur. Fasediagram av  $dx/dt=y$  og  $dx/dt=x$  (hvor  $a=d=0$ ,  $b=c=1$ ,  $d=0$ ), og startverdi  $(-4,4, \text{blå})$ ,  $(4,-4, \text{rød})$ ,  $(-0.1,-0.1, \text{cyan})$  og  $(0.1,0.1, \text{purpur})$ . Den stabile retningen (stabil manifold) er øverst til venstre og nederst til høyre. Den ustabile retningen (ustabil manifold) er øverst til høyre og nederst til venstre, legg merke til de mye lavere initialverdiene må være for den ustabile manifolden for å kunne nærme seg origo.

Jacobimatrisen for dette tilfellet blir:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenverdiene til Jacobi-matrisen kan bestemmes fra:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Som gir den karakteristiske ligningen:

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

Som har løsningene for egenverdiene med reelle tall  $\lambda = \pm 1$ . Det betyr at  $b=0$  i det komplekse planet  $(a+bi)$  og løsningene blir liggende på den reelle akse på hver sin side av origo, noe som indikerer et sadelpunkt. Løsningene går i buer i de fire kvadratene i fasediagrammet med trajektorier for løsningene figuren over.

Generelt hvis alle egenverdiene er negative så er den en attraktor, er alle egenverdiene negative er det en repellor og der hvor noen er positive og noen negative er det et sadelpunkt.

Vi kan ut fra skalarene for egenverdiene  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  finne de tilsvarende **egenvektorene**  $v_1$  og  $v_2$ :

$$J \cdot v = \lambda \cdot v$$

Dette er det samme som den todimensjonale matrise-ligningen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Dette betyr det samme som de to ligningene:

$$a \cdot v_x + b \cdot v_y = \lambda \cdot v_x$$

$$c \cdot v_x + d \cdot v_y = \lambda \cdot v_y$$

Denne måten å gjøre det på gjør at egenvektoren til hver av egenverdiene uttrykkes som et forhold. I dette tilfellet hvor  $a=d=0$  og  $b=c=1$ . Vi setter inn dette i ligningene over og ser at for egenverdien  $\lambda=1$  blir  $v_x=v_y$  og for  $\lambda=-1$  blir  $v_x=-v_y$ .

Vinkelen theta ( $\theta$ ) mellom de to egenvektorene kan uttrykkes som

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{v_y}{v_x} \right)$$

Vi kan la de to egenvektorene danne et parallelogram hvor y-akseegenvektoren står i en vinkel  $\theta$  på den horisontale x-akseegenvektoren. Arealet  $A_0$  av parallelogrammet dannet av de to egenvektorene blir:

$$A_0 = v_x \cdot v_y \cdot \cos \theta$$

Hvis vi lar alle initialverdiene  $(x_0, y_0)$  ved tid 0 ( $t_0$ ) befinne seg innenfor parallelogrammet A så vil etter en tid  $t$  sidene av parallelogrammet ha økt med  $v e^{\lambda t}$  og arealet av parallelogrammet A har økt til:

$$A = v_x \cdot e^{\lambda_x t} \cdot v_y \cdot e^{\lambda_y t} \cdot \cos \theta = A_0 \cdot e^{(\lambda_x + \lambda_y)t}$$

Dette betyr at den relative økningen av arealet er lik summen av de to egenverdiene  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$ :

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{dt} = \lambda_1 + \lambda_2$$

Summen av egenverdiene er også lik summen av de prinsipale diagonalelementene i Jacobi-matrisen kalt **trace** ( $\text{tr}(J)$ )

$$\text{trace}(J) = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

Determinanten til Jacobimatrisen  $\det(J)$  er lik produktet av egenverdiene:

$$\det(J) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

Man kan klassifisere stabiliteten ved å lage et diagram med  $\det(J)$  på x-aksen og  $\text{tr}(J)$  på y-aksen.

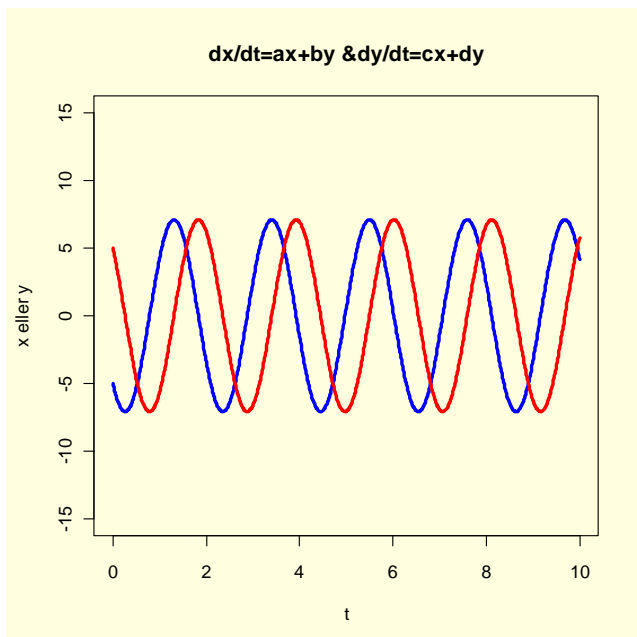
Ligningsystemet:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned}$$

med  $a=0$ ,  $b=-3$ ,  $c=3$ ,  $d=0$ , og startverdi  $(-5, 5)$ .

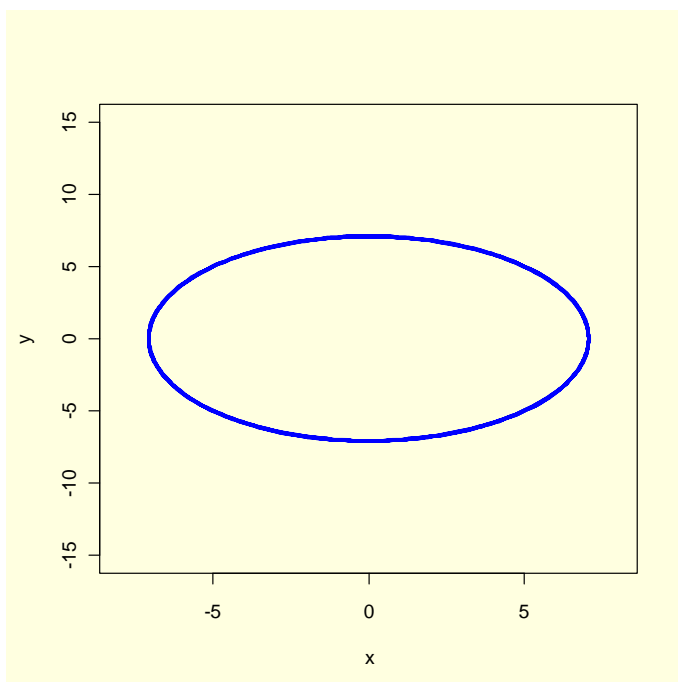
Løst med følgende R-script:

```
library(deSolve)
params<-c(a=0,b=-3,c=3,d=0)
diff<-function(t,y,p)
{
  dy1dt<-p["a"]*y[1]+p["b"]*y[2]
  dy2dt<-p["c"]*y[1]+p["d"]*y[2]
  list(c(dy1dt,dy2dt))
}
require(deSolve)
out.time<- seq(0,10,0.01)
init.state<-c(-5,5)
out.state<-as.data.frame(lsoda(init.state,out.time,diff,params,rtol=1e-4))
par(bg="lightyellow")
plot(out.state[,1],out.state[,2],xlim=c(0,10),ylim=c(-15,15),type="n",ylab="x eller
y",xlab="t", main="dx/dt=ax+by & dy/dt=cx+dy")
lines(out.state[,1],out.state[,2],col="blue",lwd=3)
lines(out.state[,1],out.state[,3],col="red",lwd=3)
```



Figur. Tidsserieplot av  $\frac{dx}{dt}=ax+by$  og  $\frac{dy}{dt}=cx+dy$  hvor  $a=0$ ,  $b=-3$ ,  $c=3$ ,  $d=0$ , og startverdi  $(-5,5)$

Hvis vi lager et fasediagram og plotter  $x$  mot  $y$ :



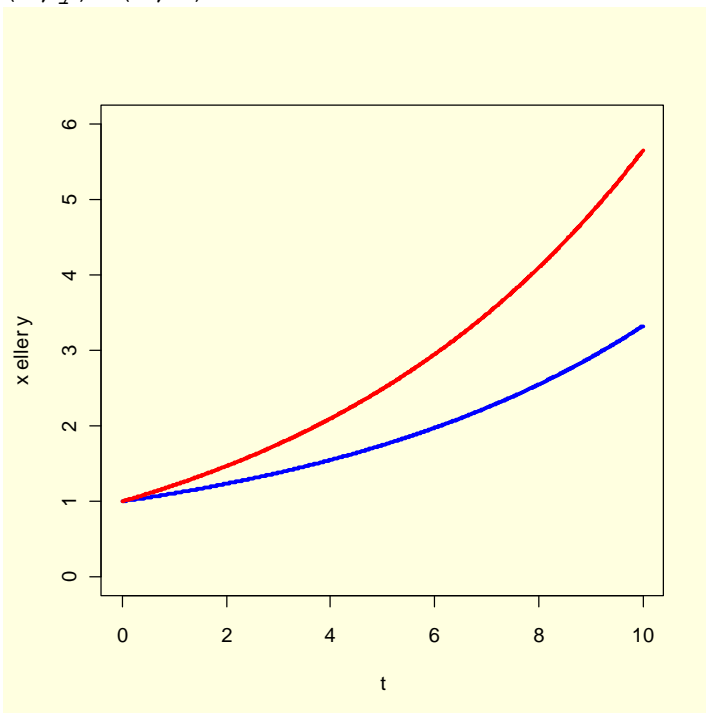
Figur. Fasediagram av  $\frac{dx}{dt}=ax+by$  og  $\frac{dy}{dt}=cx+dy$  hvor  $a=0$ ,  $b=-3$ ,  $c=3$ ,  $d=0$ , og startverdi  $(-5,5)$

Vi ser igjen på det todimensjonale system med andre konstanter:

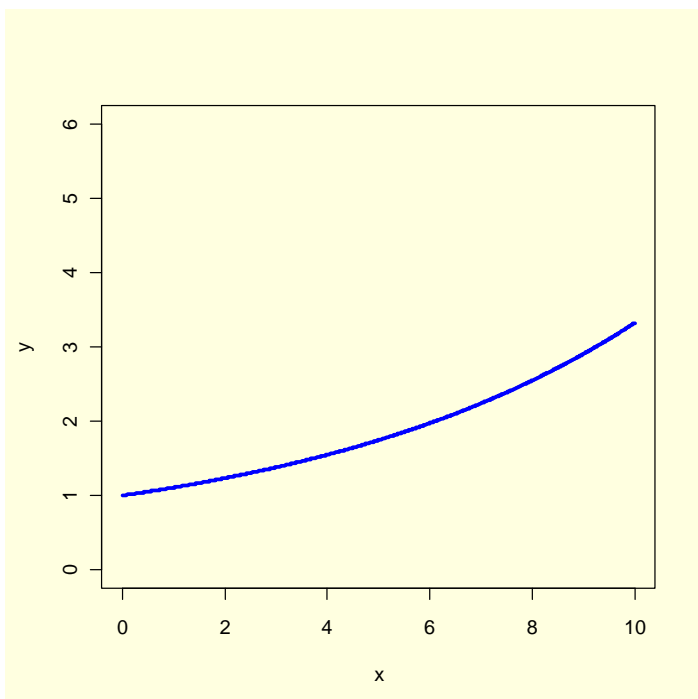
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned}$$



Numerisk løsning av ligningssystemet over med følgende konstanter  $a=0.05, b=0.05, c=0.1, d=0.1$  og startverdier  $(x, y) = (1, 1)$



Figur. Tidsserieplot av  $dx/dt=ax+by$  og  $dx/dt=cx+dy$  hvor  $a=0.05, b=0.05, c=0.1, d=0.1$  og startverdier  $(x, y) = (1, 1)$



Figur. Fasediagram av  $dx/dt=ax+by$  og  $dx/dt=cx+dy$  hvor  $a=0.05, b=0.05, c=0.1, d=0.1$  og startverdier  $(x, y) = (1, 1)$

Vi har et system av ligninger:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy\end{aligned}$$

Som vi kan uttrykke i form av matriser:

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

Hvor A og X er matriser. A er en 2x2 matrise

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ut fra fasediagrammene kan lineære differensialligninger deles i to hovedtyper: hyperbolske og ikke-hyperbolske.

Inndeling av **hyperbolske systemer** med reelle egenverdier:

**Sadel:** A har negative reelle egenverdier. Betyr også en asymptotisk stabil likevekt.

**Sink:** A har positive reelle egenverdier

**Kilde:** A har en positiv og en negativ egenverdi

Fasekurvene for kilde og sink ser like ut, men pilene på trajektoriene går hver sin vei.

Hvis  $dX/dt=AX$  er en kilde vil  $dX/dt=-AX$  være en sink. Hvis egenverdiene til A har en positiv reell egenverdi har vi en ustabilitet.

Vi kan foreta en ytterligere inndeling av Sink:

**Spiral sink** - egenverdiene er negative komplekse tall

**Nodal sink** - reelle ulike og negative egenverdier

**Uekte nodal sink** - reelle like negative egenverdier og en uavhengig egenvektor

**Fokus sink** - reelle like negative egenverdier og to uavhengige egenvektorer

På samme måte kan vi dele inn i spiral kilde, nodal kilde, uekte nodal kilde og fokus kilde, men motsatt fortegn på egenverdiene.

Vi kan også bruke determinant, trace og diskriminant til matrisen A til å avgjøre om det er hyperbolske eller ikke-hyperbolske systemer og type faseportrett.

Determinanten til A:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Hvis determinanten til A ( $\det A$ ) er:

Negativ  $\rightarrow$  sadelpunkt

0  $\rightarrow$  Ikke hyperbolsk

Positiv  $\rightarrow$  Undersøk  $\text{tr}(A)$

Trace til A er summen av diagonalelementene i matrisen:

$$\text{tr} A = a + d$$

Hvis  $\text{tr}(A)$  er:

Positiv  $\rightarrow$  kilde

0  $\rightarrow$  ikke-hyperbolsk

Negativ  $\rightarrow$  Sink

Vi kan også undersøke diskriminanten D til A:

$$D = [\text{tr}(A)]^2 - 4 \cdot \det(A)$$

Hvis D er:

Negativ  $\rightarrow$  spiral

Positiv  $\rightarrow$  node

0  $\rightarrow$  Undersøk om A er en multippel av I. Hvis Nei  $\rightarrow$  uekte node, hvis Ja  $\rightarrow$  fokus

**Ikke-hyperbolske systemer** oppstår når A har 0 egenverdier ( $\det(A)=0$ ) eller når A har imaginære egenverdier ( $\det(A)=0$  og  $\text{tr}(A) \neq 0$ )

Ikke-hyperbolske systemer kan deles i

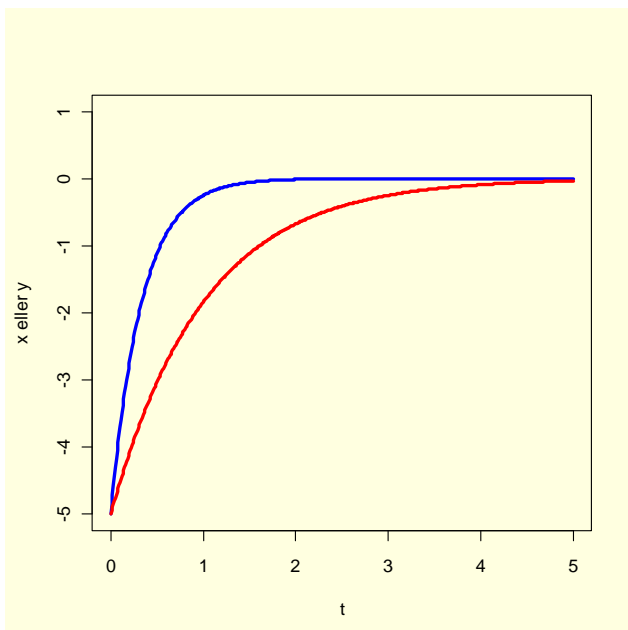
**Senter** -rent imaginære egenverdier forskjellig fra 0

**Sadelnode** - en enkel 0 egenverdi

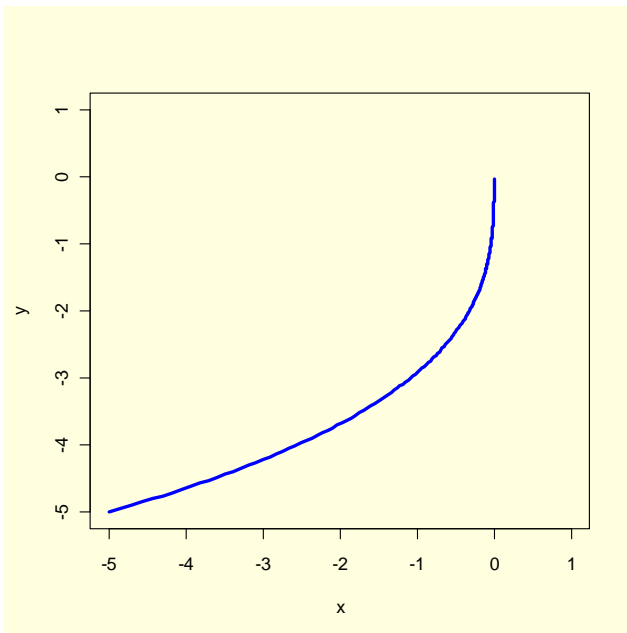
**Skjær** - dobbel 0 egenverdi, en uavhengig egenvektor

Vi har ligningssystemet med  $a=-3$ ,  $b=0$ ,  $c=0$  og  $d=-1$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned}$$



Figur. Tidsserieplot for For  $a=-3$ ,  $b=0$ ,  $c=0$  og  $d=-1$ , med initialverdier  $(-5,-5)$ .  $dx/dt$  er blå og  $dy/dt$  er rød.



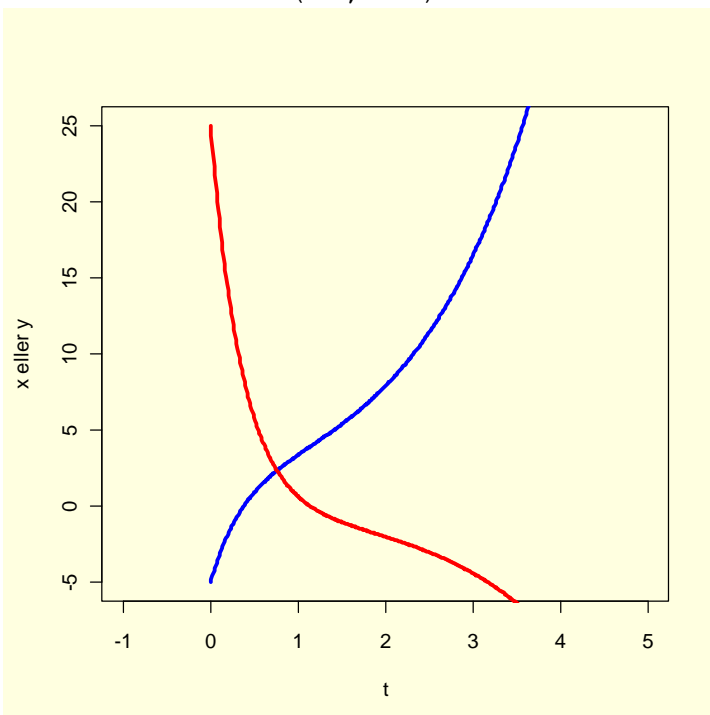
Figur Fasediagram for data i Figuren foran.  $a=-3$ ,  $b=0$ ,  $c=0$  og  $d=-1$ , med initialverdier  $(-5, -5)$ . Viser at det går mot stabilitet 0.

Koeffisientmatrisen  $A$  for ligningssystemet over:

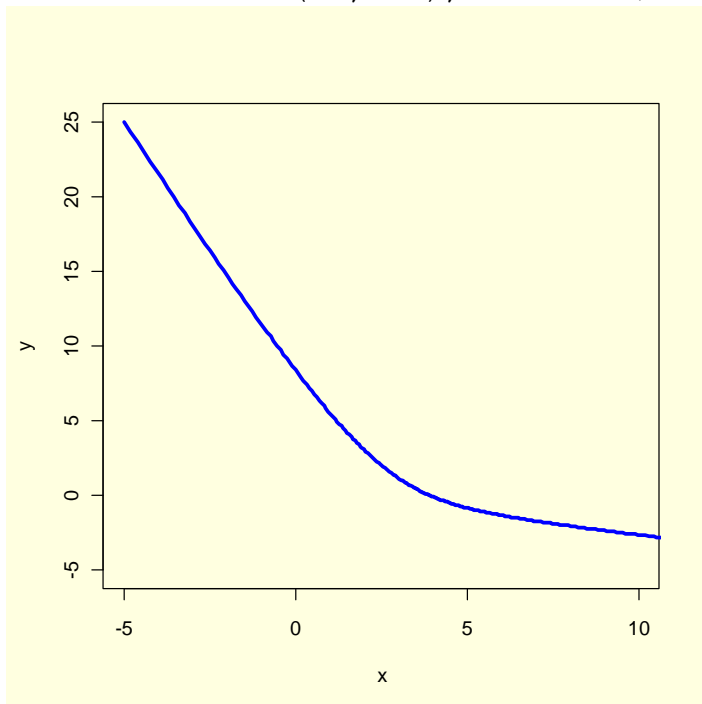
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Har egenverdier  $\lambda_1 = -1$  og  $\lambda_2 = -3$  og egenvektorene  $v_1 = (0 \ -1)$  og  $v_2 = (-1 \ 0)$ ,  $\text{tr}(A) = -4$ ,  $\det(A)=3$ ,  $D = 4$ . Vi konkluderer med at vi har en sink og node.

Vi lager et nytt ligningssystem med  $a=1$ ,  $b= 1$ ,  $c=-1$ ,  $d=-3$  med initialverdier  $(-5, 25)$ .



Figur 9. Tidsserieplot for  $a=1$ ,  $b=1$ ,  $c=-1$ ,  $d=-3$  med initialverdier  $(-5, 25)$ , hvor  $dx/dt$  er blå og  $dy/dt$  er rødt



Figur 10. Faseplot for  $a=1$ ,  $b=1$ ,  $c=-1$ ,  $d=-3$  med initialverdier  $(-5, 25)$ .

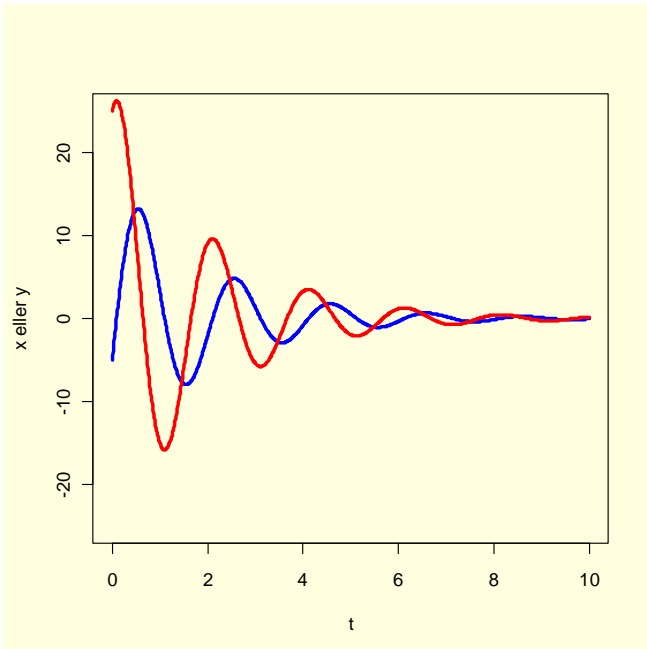
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

A har egenverdier  $\lambda_1 = -2.7320508$  og  $\lambda_2 = 0.7320508$  og egenvektorene  $v_1 = (-0.2588190 \ 0.9659258)$  og  $v_2 = (0.9659258 \ -0.2588190)$ ,  $\text{tr}(A) = -2$ ,  $\det(A) = -2$ ,  $D = 8$ .

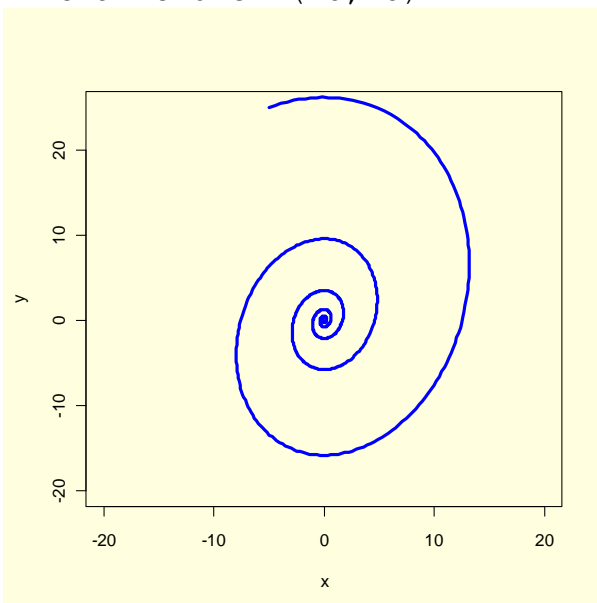
Vi lager et nytt ligningssystem:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned}$$

$a=-1$ ,  $b=2$ ,  $c=-5$ ,  $d=0$ , med initialverdier  $(-5, 25)$ :



Figur 11. Tidsserieplot.  $a=-1$ ,  $b=2$ ,  $c=-5$ ,  $d=0$ , med initialverdier  $(-5,25)$

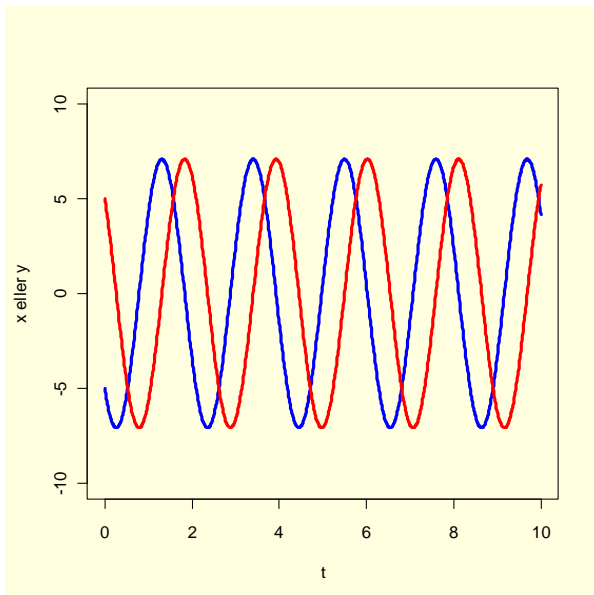


Figur 12. Fasediagram  $a=-1$ ,  $b=2$ ,  $c=-5$ ,  $d=0$ , med initialverdier  $(-5,25)$  som nærmer seg  $(0,0)$

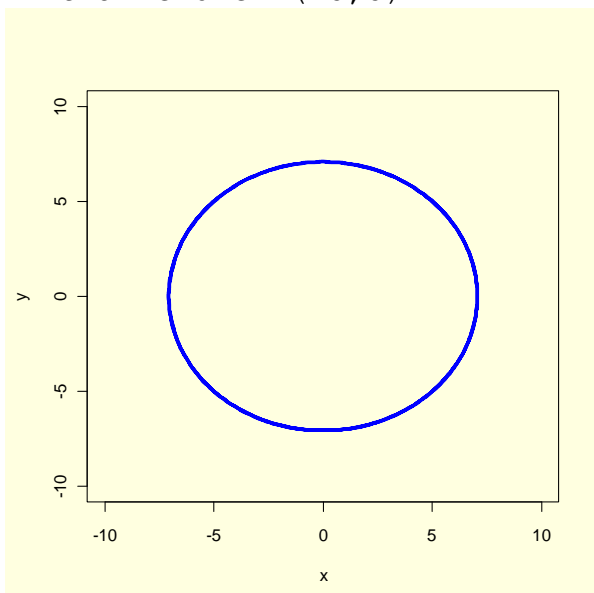
### Ikke-hyperbolsk

Ligningssystem  $a=0$ ,  $b=-3$ ,  $c=3$ ,  $d=0$  med startverdi  $(-5,5)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned}$$



Figur 13. Tidsserieplot.  $a=0$ ,  $b=-3$ ,  $c=3$ ,  $d=0$ , med initialverdier  $(-5,5)$



Figur 13. Fasediagram  $a=0$ ,  $b=-3$ ,  $c=3$ ,  $d=0$ , med initialverdier  $(-5,5)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

A har imaginære egenverdier  $\lambda_1 = 0+3i$  og  $\lambda_2 = 0-3i$  og egenvektorene  $v_1 = (0.7071068+0.0000000i \ 0.0000000-0.7071068i)$  og  $v_2 = (0.7071068+0.0000000i \ 0.0000000+0.7071068i)$ ,  $\text{tr}(A) = 0$ ,  $\det(A) = 9+0i$ .

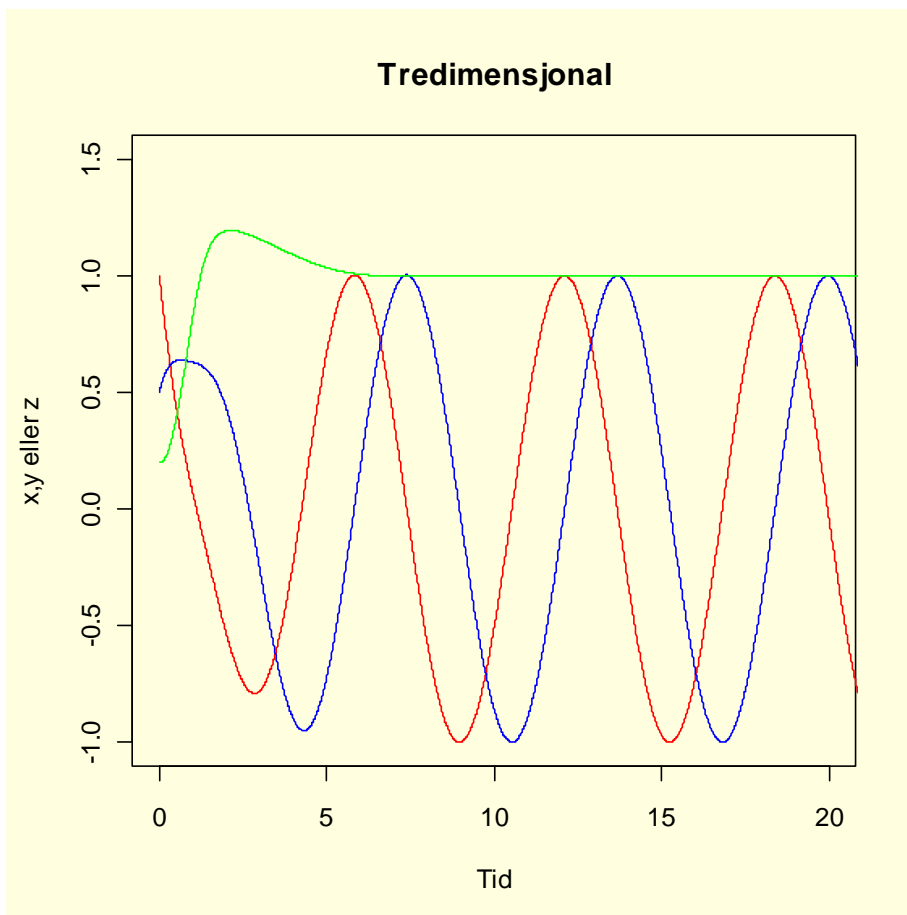
Anta at vi har A med imaginære egenverdier  $\sigma \pm \tau$

$$A = \begin{pmatrix} \sigma & -\tau \\ \tau & \sigma \end{pmatrix}$$

## Differensialligninger i 3 dimensjoner

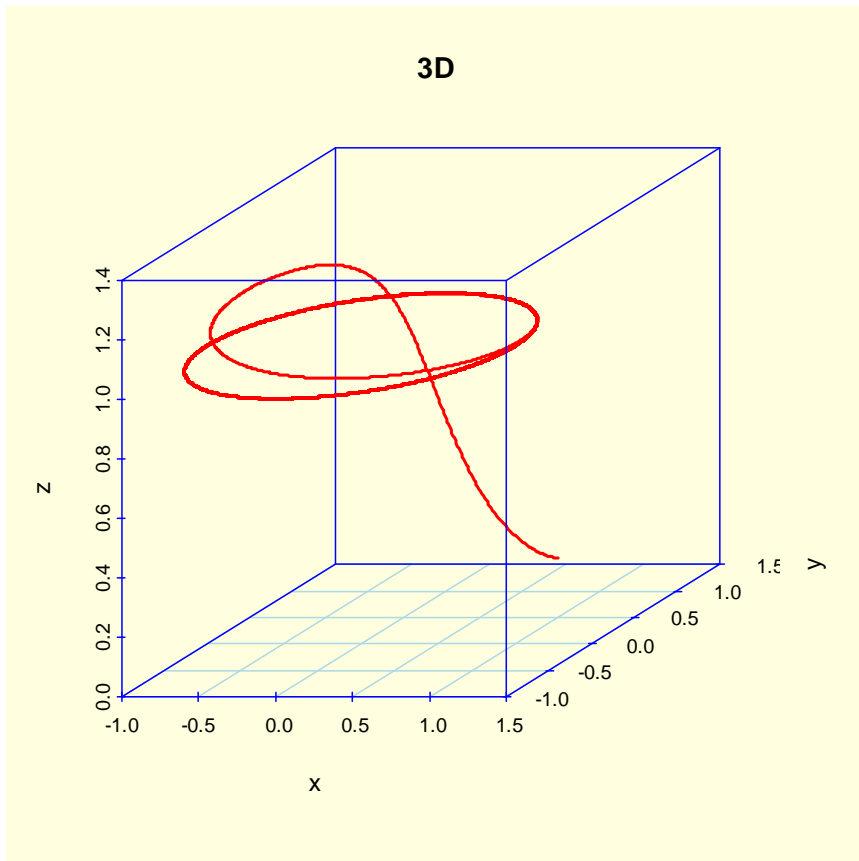
Vi har 3 differensialligninger som gir periodiske løsninger

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x - y + x \cdot z \\ \frac{dy}{dt} &= x - y - y \cdot z \\ \frac{dz}{dt} &= 1 + z - x^2 - y^2 - z^3\end{aligned}$$



Figur 14. Tidsserieplot med startbetingelser (1, 0.5, 0.2) med periodisk løsning for x, y og z





Figur 14. Tidsserieplot med startbetingelser (1, 0.5, 0.2) med periodisk løsning for x, y og z

```

params<-
tredim<-function(t,x,p)
{
dxdt<--x[1]-x[2]+x[1]*x[3]
dydt<-x[1]-x[2]+x[2]*x[3]
dzdt<-1+x[3]-x[1]^2-x[2]^2-x[3]^3
list(c(dxdt,dydt,dzdt))
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,100,0.01)
init.state<-c(1,0.5,0.2)
out.state<-lsoda(init.state,out.time,tredim,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
require(scatterplot3d)
scatterplot3d(out.state[,2],out.state[,3],out.state[,4],type="l",
xlab="x",ylab="y",zlab="z",main="3D",color="red",col.axis="blue",
col.grid="lightblue",)

```

Hvis vi har en  $n \times n$  matrise  $A$  så vil sammenhengen mellom **egenverdien**  $\lambda$  og **egenvektoren**  $v$  være følgende:

$$Av = \lambda v$$

Som kan omskrives til:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

hvor  $I$  er identitetsmatrisen.

Som gir:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

Sammenhengen mellom matrisen  $A$ , den **inverse matrisen**  $A^{-1}$  og identitetsmatrisen  $I$  er:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Vi har videre **determinanten til  $A$** :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Og derfor blir:

$$\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

**Trace til  $A$**  ( $\text{tr}(A)$ ) er summen av alle diagonalelementene i matrisen:

$$\text{tr}(A) = a + d$$

Vi har **polynomet til matrisen  $A$**  ( $P_A(\lambda)$ ):

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

og generelt vil matrisen til polynomet bli:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

Eigenverdien  $\lambda$  til matrisen  $A$  er roten til et polynom til matrisen  $A$ . Vi kaller røttene eigenverdiene  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$ :

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

Derved kan eigenverdiene  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  til matrisen  $A$  uttrykkes i form av determinanten og trace til  $A$ :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ \text{tr}(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

Vi kan beregne **diskriminanten**  $D$  til en matrise  $A$ :

$$D = [\text{tr}(A)]^2 - 4 \cdot \det(A)$$

Hvis determinanten  $D=0$  så er eigenverdiene til  $A$  reelle og like. Er  $D>0$  er eigenverdiene reelle og forskjellige. Er  $D<0$  er eigenverdiene komplekse tall i konjugate par.

Vi kan finne røttene (eigenverdiene  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$ ) ved å bruke:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

Som har løsningene for  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$ :

$$\frac{1}{2} \left( \text{tr}(A) \pm \sqrt{[\text{tr}(A)]^2 - 4 \cdot \det(A)} \right) = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{D}}{2}$$

Hvis vi har funnet eigenverdiene  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  kan vi finne egenvektorene  $v_1$  og  $v_2$  som hører sammen med disse eigenverdiene ved hjelp av:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

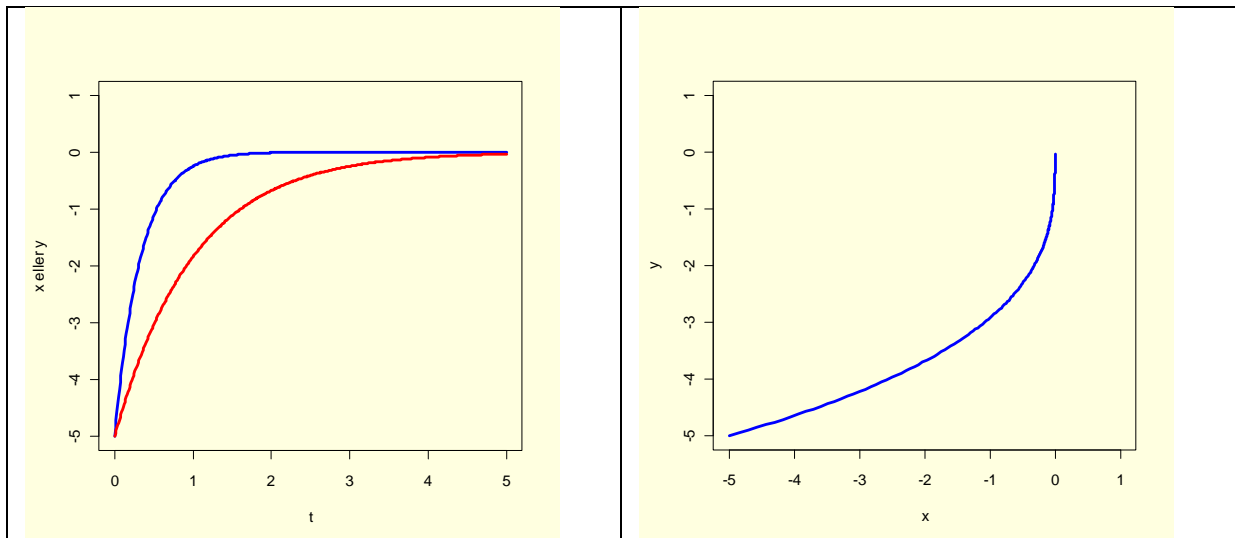
Vi går tilbake til eksemplet:

Vi har følgende generelle system av differensialligninger

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

For  $a=-3$ ,  $b=0$ ,  $c=0$  og  $d=-1$ , med initialverdier  $(-5, -5)$ .



$$\frac{dx}{dt} = -3x$$

$$\frac{dy}{dt} = -y$$

Koeffisientmatrisen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

blir for ligningen over lik:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A har egenverdier  $\lambda_1 = -3$  og  $\lambda_2 = -1$  og egenvektorene  $v_1 = (1 \ 0)$  og  $v_2 = (0 \ 1)$ ,  $\text{tr}(A) = -4$ ,  $\det(A) = 3$ ,  $D = 4$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = (-3) \cdot (-1) = 3 = \det(A)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -3 + (-1) = -4 = \text{tr}(A)$$

$$\text{tr}(A)^2 - 4 \cdot \det(A) = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4 = D$$

$$(\text{tr}(A) \pm \sqrt{D})/2 = ((-4) \pm \sqrt{4})/2 = ((-4) \pm 2)/2 = -1 \text{ og } -3 = \lambda_1 \text{ og } \lambda_2$$

Den inverse matrisen  $A^{-1}$  ganger matrisen A blir lik identitetsmatrisen (diagonalen med 1 og resten lik 0):

$$A \cdot A^{-1} = I = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En generell løsning av ligningssystemet:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Er lik:

$$X(t) = \alpha_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2$$

En generell løsning av denne er:

$$X(0) = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2$$

Hvis vi nå lar matrisen A inneholde egenvektorene  $v_1$  og  $v_2$  får vi:

$$A = (v_1 \ v_2)$$
$$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = X(0)$$

Matrisen A bestående av egenvektorene er alltid inverterbar blir en løsning:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot X(0)$$

Hvor:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Derved kan man bestemme skalarene  $\alpha_1$  og  $\alpha_2$  som inngår i den generelle løsningen av differensialligningene.

For egenvektorene  $v_1 = (1 \ 0)$  og  $v_2 = (0 \ 1)$  blir dette:

$$X(t) = \alpha_1 \cdot e^{-3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La A være en matrise som består av egenvektorene:

$$A = (v_1 v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ved initialbetingelsene:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = X(0)$$
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot X(0)$$

Vi hadde initialbetingelsene  $(-5, -5)$ :

$$X(0) = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Derved blir  $\alpha_1 = -5$  og  $\alpha_2 = -5$

$$X(t) = -5 \cdot e^{-3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Uttrykt som koordinater:

$$x(t) = -5 \cdot e^{-3t}$$
$$y(t) = -5 \cdot e^{-t}$$

## Andre ordens reaksjon

Hvis  $a$  og  $b$  er to reaktanter i en reaksjon med en bestemt konsentrasjon, og det dannes mengden  $x$  per tidsenhet med en hastighetskonstant  $k$  for reaksjonen har vi:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

Vi kan ta det enkleste hvor mengden  $a$  og  $b$  er like,  $a=b$

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)^2$$

Atskiller variablene:

$$\frac{dx}{(a-x)^2} = k \cdot dt$$

Vi tar integralet på begge sider, og integrerer med substitusjon hvor  $u=(a-x)$  og  $du=dx$

$$\int \frac{dx}{(a-x)^2} = \int k \cdot dt = \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} = \frac{1}{(a-x)} = kt + C$$

Når  $x=0$ ,  $t=0$  har vi  $C=1/a$

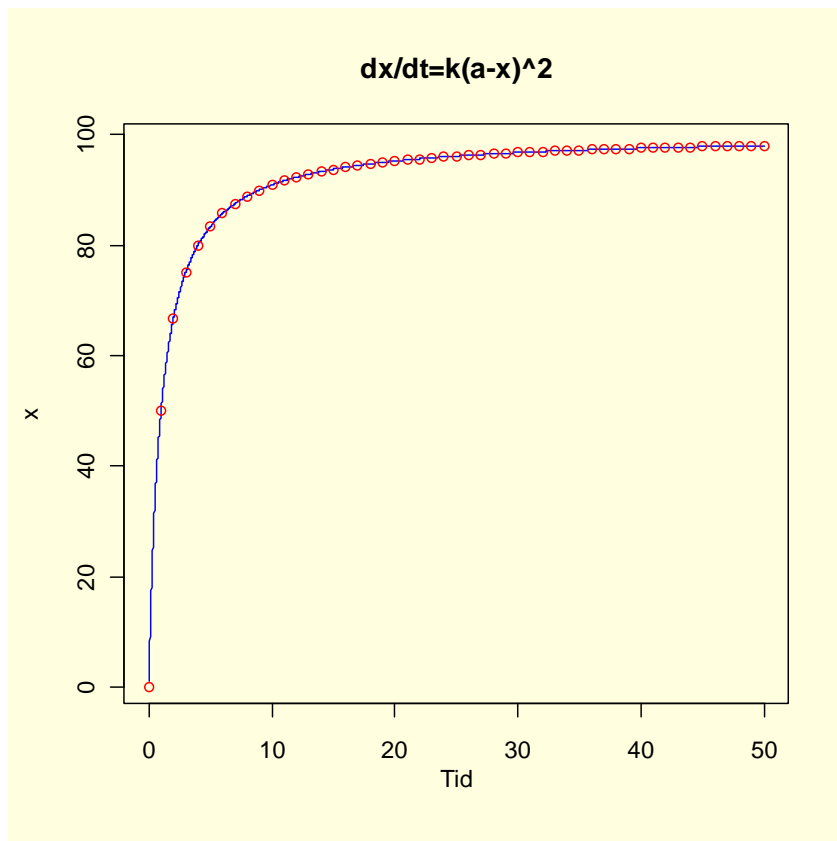
$$\frac{1}{(a-x)} - \frac{1}{a} = kt$$

$$k = \frac{x}{at(a-x)}$$

$$x = \frac{ka^2t}{1+kat}$$

Eksempel på løsning ved hjelp av deSolve i R:

```
library(deSolve)
params<-c(a=100,k=0.01)
orden<-function(t,x,p)
{
  dxdt<-p["k"]*((p["a"]-x[1])^2)
  list(dxdt)
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,50,0.01)
init.state<-1
out.state<-
as.data.frame(lsoda(init.state,out.time,orden,params,rtol=1e-4))
par(bg="lightyellow")
plot(out.state[,1],out.state[,2],type="n",col="blue",xlab="Tid",
      ylab="x",main="dx/dt=k(a-x)^2")
lines(out.state[,1],out.state[,2],col="blue")
k<-0.01
a<-100
t<-seq(0,50,1)
points(t,(k*a^2*t)/(1+k*a*t),col="red")
```

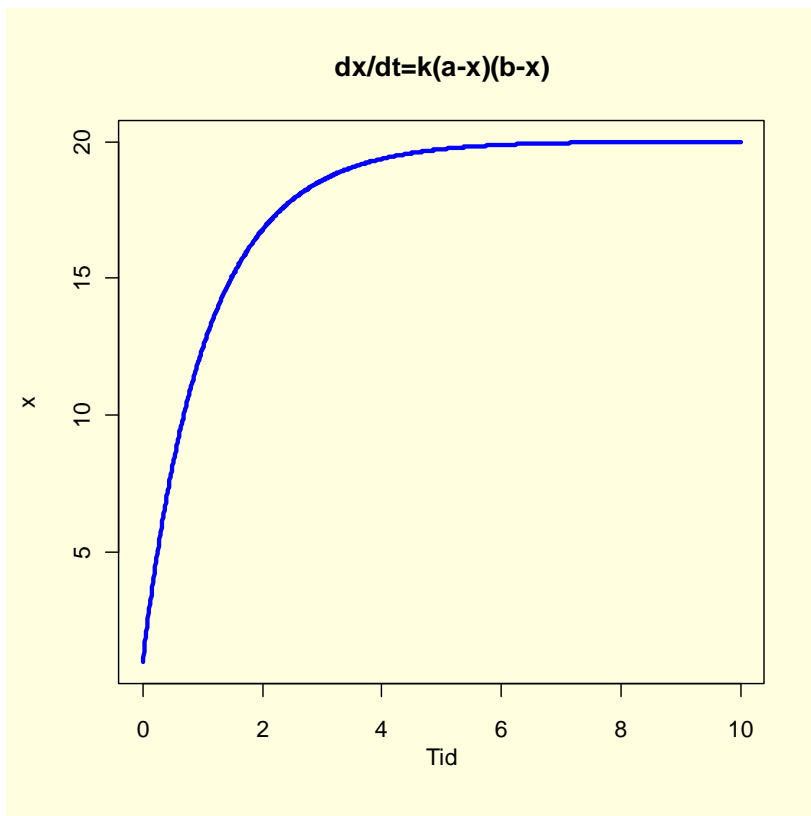


Figur. Numerisk og analyttisk løsning av andre ordens reaksjon hvor  $a=b=100$  og  $k=0.01$ . God overensstemmelse med analyttisk og numerisk løsning av ligningen.

```

library(deSolve)
params<-c(a=100,b=20,k=0.01)
orden<-function(t,x,p)
{
  dxdt<-p["k"]*((p["a"]-x[1])*(p["b"]-x[1]))
  list(dxdt)
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,10,0.01)
init.state<-1
out.state<-
as.data.frame(lsoda(init.state,out.time,orden,params,rtol=1e-4))
par(bg="lightyellow")
plot(out.state[,1],out.state[,2],type="n",col="blue",xlab="Tid",
      ylab="x",main="dx/dt=k(a-x)(b-x)")
lines(out.state[,1],out.state[,2],lwd=3,col="blue")

```



Figur. Numerisk løsning av andre ordens reaksjon,  $a=100, b=20, k=0.01$

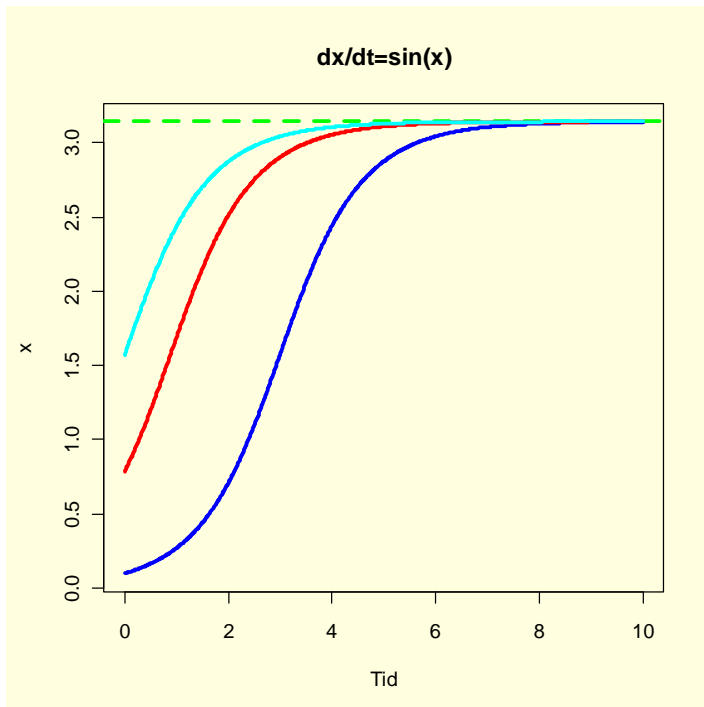
## Grafisk framstilling av løsning av differensialligninger

Vi skal se på differensialligningen:

$$\frac{dx}{dt} = \sin x$$

Denne har den numeriske løsningen:

```
library(deSolve)
params<-c
eksp<-function(t,x,p)
{
  dxdt<-sin(x[1])
  list(dxdt)
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,10,0.01)
init.state<-0.1
out.state<-as.data.frame(lsoda(init.state,out.time,eksp,params,rtol=1e-4))
par(bg="lightyellow")
plot(out.state[,1],out.state[,2],type="n",col="blue",xlab="Tid",ylab="x",main="dx/dt=sin(x)")
lines(out.state[,1],out.state[,2],col="cyan",lwd=3)
abline(h=pi,col="green",lty=2,lwd=3)
```

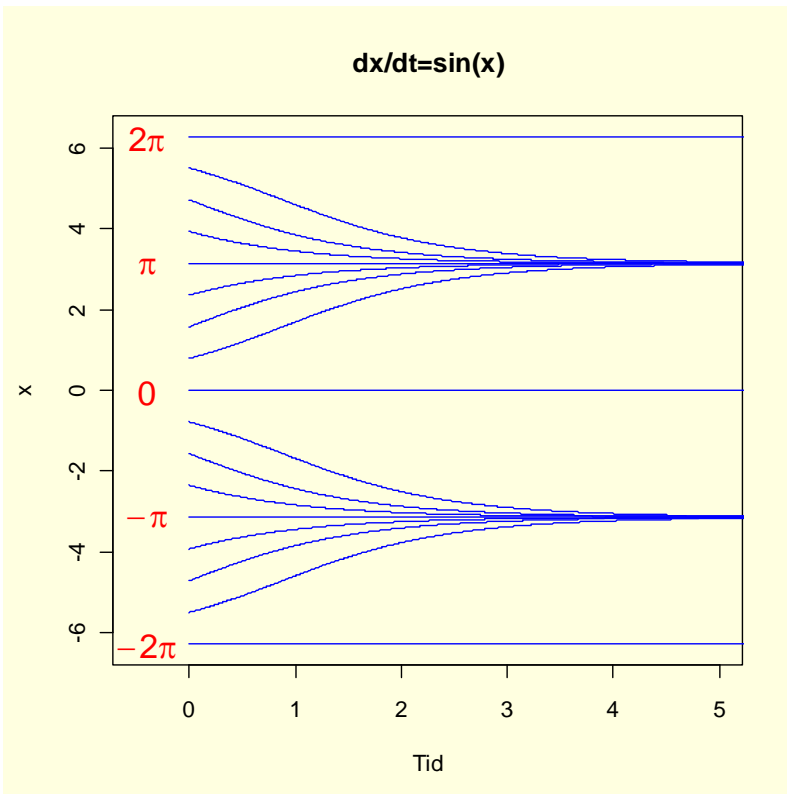


Figur. Løsning av  $dx/dt=\sin x$ . Initialverdier 0.1 (blå),  $\pi/4$  (rød) og  $\pi/2$  (cyan). Løsningen nærmer seg  $\pi$  (grønn striplet linje)

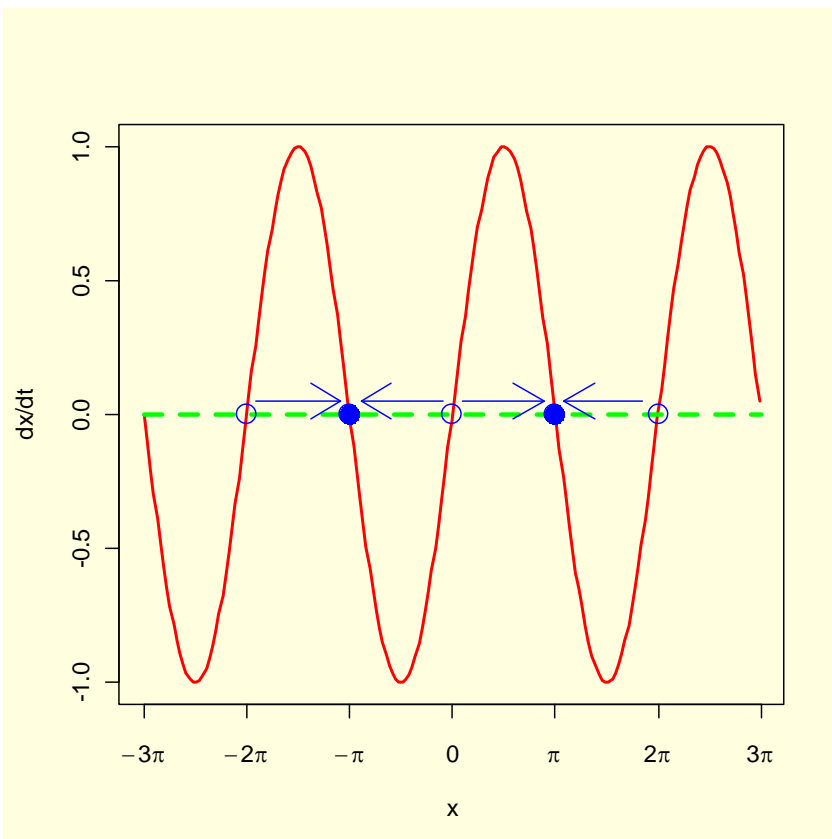
Vi kan se nærmere på dette:

```
library(deSolve)
params<-c
eksp<-function(t,x,p)
{
  dxdt<-sin(x[1])
  list(dxdt)
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,10,0.01)
s<-seq(-2*pi,2*pi,pi/4)
plot(out.state[,1],out.state[,2],ylim=c(-2*pi,2*pi),xlim=c(-
0.5,5),type="n",col="blue",xlab="Tid",ylab="x",main="dx/dt=sin(x)")
for(i in 1:17){
  init.state<-s[i]
  out.state<-as.data.frame(lsoda(init.state,out.time,eksp,params,rtol=1e-4))
  lines(out.state[,1],out.state[,2],col="blue")
}
text(-0.4,2*pi,expression(2*pi),col="red",cex=1.5)
text(-0.4,pi,expression(pi),col="red",cex=1.5)
text(-0.4,-pi,expression(-pi),col="red",cex=1.5)
text(-0.4,-2*pi,expression(-2*pi),col="red",cex=1.5)
text(-0.4,0,"0",col="red",cex=1.5)
```





Figur. Numerisk løsning av  $dx/dt=\sin(x)$  med intialverdier som varierer fra  $2\pi$  til  $-2\pi$ , hvor  $\pi$  og  $-\pi$  er stabile punkter hvor vektorfeltet nærmer seg, kalt sink eller attraktor, mens  $2\pi, 0$  og  $-2\pi$  er ustabile punkter kalt repeller eller kilder.



Figur. Vektorfeltet framkommer ved at man beveger seg langs x-aksen, men hvor hastigheten endrer seg avhengig av  $dx/dt = \sin(x)$ . Over x-aksen er  $dx/dt > 0$  og man beveger seg mot høyre, under x-aksen er  $dx/dt < 0$  og man beveger seg mot venstre. Vi ser da samling ved tette punkter, og det kan flyte i begge retninger ved de åpne punktene. Se pilene.

```
x<-seq(-3*pi,3*pi,0.1)
par(bg="lightyellow")
plot(x,sin(x),col="red",lwd=2,type="l",xaxt="n",xlab="x",ylab="dx/dt")
lines(c(-3*pi,3*pi),c(0,0),col="green",lwd=3,lty=2)
axis(1,at=c(-3*pi,-2*pi,-pi,0,pi,2*pi,3*pi),labels=expression(-3*pi,-2*pi,-pi,0,pi,2*pi,3*pi))
points(pi,0,pch=19,col="blue",cex=2)
points(-pi,0,pch=19,col="blue",cex=2)
points(2*pi,0,pch=1,col="blue",cex=2)
points(-2*pi,0,pch=1,col="blue",cex=2)
points(0,0,pch=1,col="blue",cex=2)
arrows(-6,0.05,-3.4,0.05,col="blue")
arrows(0.3,0.05,2.8,0.05,col="blue")
arrows(-0.3,0.05,-2.8,0.05,col="blue")
arrows(5.8,0.05,3.4,0.05,col="blue")
```

## Rabinovich-Fabrikant

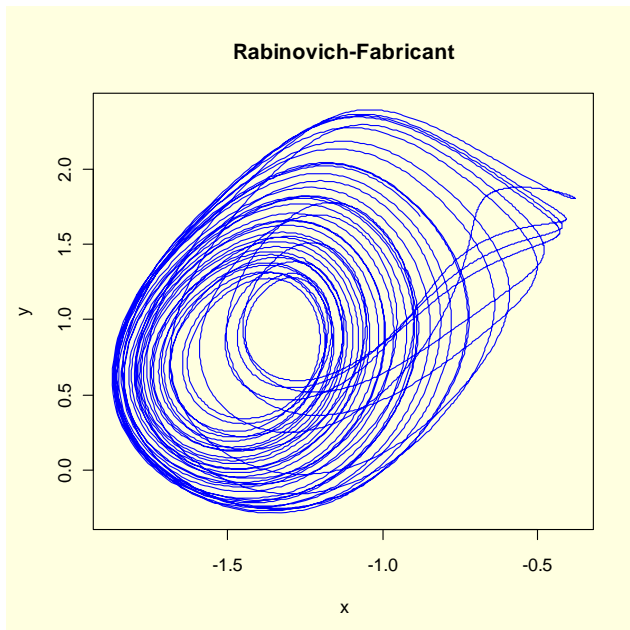
$$\frac{dx}{dt} = y \cdot (z - 1 + x^2) + \gamma \cdot x$$

$$\frac{dy}{dt} = x \cdot (3z + 1 - x^2) + \gamma \cdot y$$

$$\frac{dz}{dt} = -2z \cdot (\alpha + x \cdot y)$$

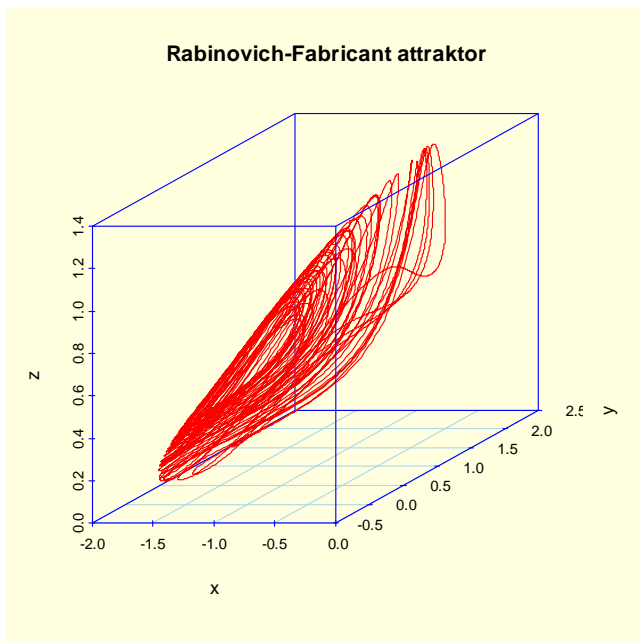
Rabinovich, M.I. & Fabrikant, A.L. *Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media*. Soviet Physics JETP 50 (1979) 311-317

```
library(deSolve)
params<-c(g=0.87,a=1.1)
rabinovich<-function(t,x,p)
{
dxdt<-x[2]*(x[3]-1+x[1]^2)+p["g"]*x[1]
dydt<-x[1]*(3*x[3]+1-x[1]^2)+p["g"]*x[2]
dzdt<-2*x[3]*(p["a"]+x[1]*x[2])
list(c(dxdt,dydt,dzdt))
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,200,0.1)
init.state<-c(-1,0,0.5)
out.state<-lsoda(init.state,out.time,rabinovich,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(out.state[,2],out.state[,3],type="n",ylab="y",xlab="x",main="Rabinovich-Fabrikant")
lines(out.state[,2],out.state[,3],col="blue")
```



Figur. Fasediagram Rabinovich-Fabrikant attraktor med  $\gamma=0.87, \alpha=1.1$ , initialverdier  $(-1, 0, 0.5)$ , tid  $(0, 100, 0.01)$

```
require(scatterplot3d)
scatterplot3d(out.state[,2],out.state[,3],out.state[,4],type="l",
xlab="x",ylab="y",zlab="z",main="Rabinovich-Fabrikant attraktor",color="red",col.axis="blue",
col.grid="lightblue",)
```



Figur. Tredimensjonal Rabinovich-Fabrikant attraktor med  $\gamma=0.87, \alpha=1.1$ , initialverdier  $(-1, 0, 0.5)$ , tid  $(0, 100, 0.01)$

## Moore-Spiegel oscillator

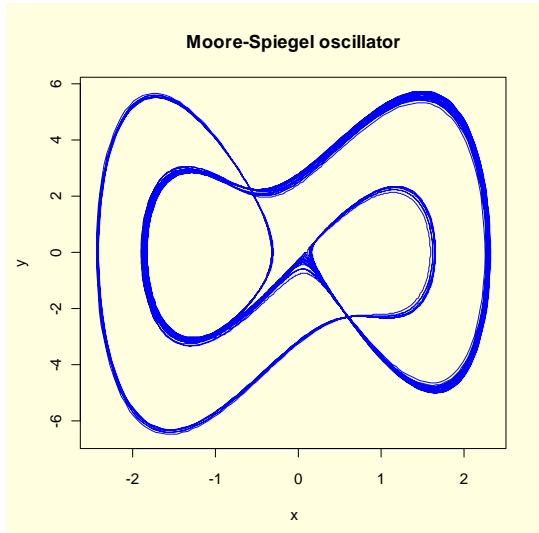
$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = z$$

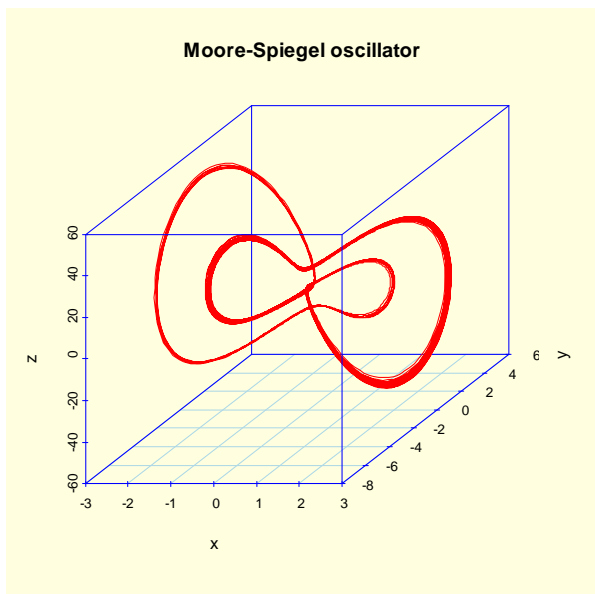
$$\frac{dz}{dt} = -z - (T - R + R \cdot x^2) \cdot y - T \cdot x$$

Moore, D.W. & Spiegel, E.A. *A thermally excited non-linear oscillator*. *Astrophysical Journal* 143 (1966) 871-887.

```
library(deSolve)
params<-c(T=6,R=20)
moore<-function(t,x,p)
{
  dxdt<-x[2]
  dydt<-x[3]
  dzdt<-x[3] - (p["T"]-p["R"]+p["R"]*x[1]^2)*x[2]-p["T"]*x[1]
  list(c(dxdt,dydt,dzdt))
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,200,0.1)
init.state<-c(0.1,0,0)
out.state<-lsoda(init.state,out.time,moore,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(out.state[,2],out.state[,3],type="n",ylab="y",xlab="x",main="Moore-Spiegel oscillator")
lines(out.state[,2],out.state[,3],col="blue")
```



Figur. Moore-Spiegel oscillator med  $T=6$ ,  $R=20$ , initialverdier  $(0.1, 0, 0)$  og tid  $(0, 100, 0.01)$



Figur. 3D Moore-Spiegel oscillator med  $T=6$ ,  $R=20$ , initialverdier  $(0.1, 0, 0)$  og tid  $(0, 100, 0.01)$

## Sprott

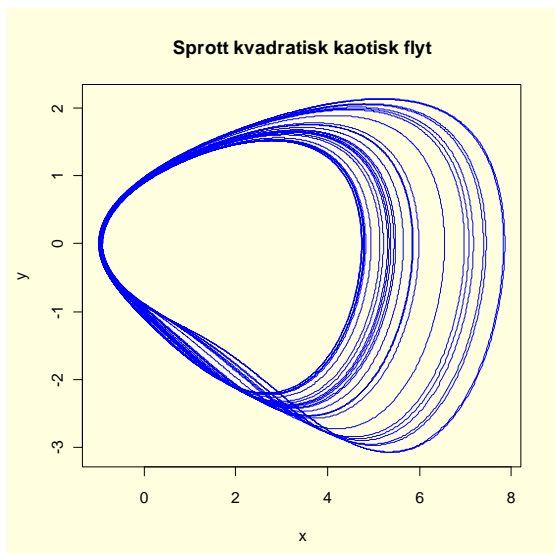
$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = z$$

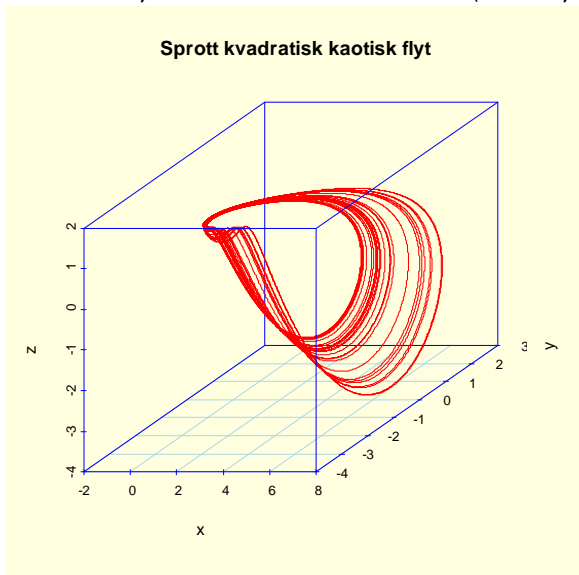
$$\frac{dz}{dt} = -a \cdot z + y^2 - x$$

Sprott, J.C. *Simplest dissipative chaotic flow*. Physics Letters A 228 (1997) 271-274

```
library(deSolve)
params<-c(a=2.017)
sprott<-function(t,x,p)
{
  dxdt<-x[2]
  dydt<-x[3]
  dzdt<-p["a"]*x[3]+x[2]^2-x[1]
  list(c(dxdt,dydt,dzdt))
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,300,0.01)
init.state<-c(-0.9,0,0.5)
out.state<-lsoda(init.state,out.time,sprott,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(out.state[,2],out.state[,3],type="n",ylab="y",xlab="x",main="Sprott kvadratisk kaotisk flyt")
lines(out.state[,2],out.state[,3],col="blue")
```



Figur. Fasediagram Sprott enklest kvadratisk kaotisk flyt med  $a=2.017$ , initialverdier  $(-0.9, 0, 0.5)$  og tid  $(0, 300, 0.01)$



Figur. 3D fasediagram Sprott enklest kvadratisk kaotisk flyt med  $a=2.017$ , initialverdier  $(-0.9, 0, 0.5)$  og tid  $(0, 300, 0.01)$

## Malasoma

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = z$$

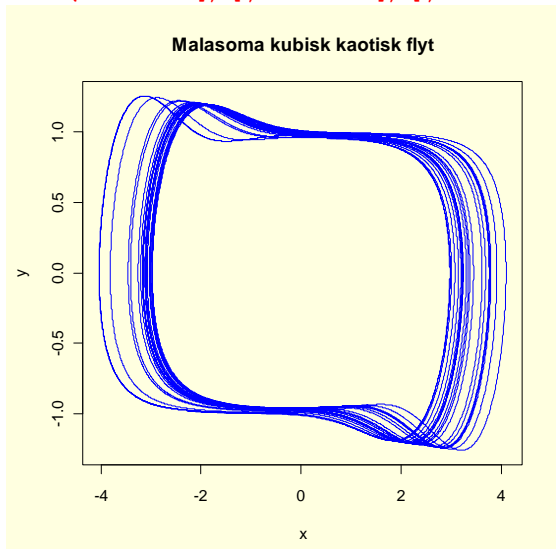
$$\frac{dz}{dt} = -a \cdot z + x \cdot y^2 - x$$

Malasoma, J.-M. *What is the simplest dissipative chaotic jerk equation which is parity invariant.* Physics Letters A 264 (2000) 3383–389.

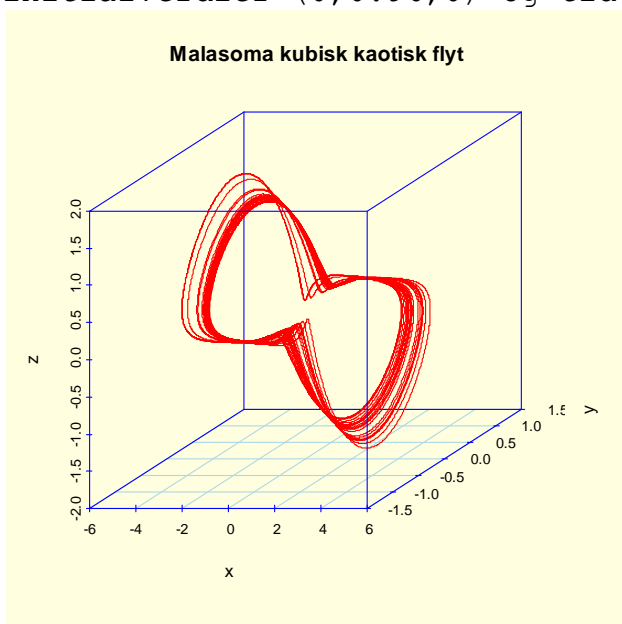
```

library(deSolve)
params<-c(a=2.028)
malasoma<-function(t,x,p)
{
  dxdt<-x[2]
  dydt<-x[3]
  dzdt<--p["a"]*x[3]+x[1]*x[2]^2-x[1]
  list(c(dxdt,dydt,dzdt))
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,300,0.01)
init.state<-c(0,0.96,0)
out.state<-lsoda(init.state,out.time,malasoma,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(out.state[,2],out.state[,3],type="n",ylab="y",xlab="x",main="Malasoma kubisk kaotisk flyt")
lines(out.state[,2],out.state[,3],col="blue")

```



Figur. Fasediagram Malasoma kubisk kaotisk flyt med  $a=2.028$ , initialverdier  $(0,0.96,0)$  og tid  $(0,300,0.01)$



Figur. 3D fasediagram Malasoma kubisk kaotisk flyt med  $a=2.028$ , initialverdier  $(0,0.96,0)$  og tid  $(0,300,0.01)$

## Linz

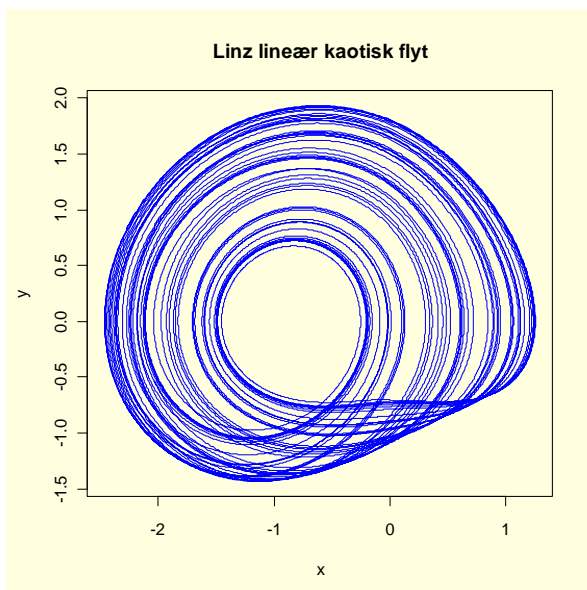
$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = z$$

$$\frac{dz}{dt} = -a \cdot z - y + |x| - 1$$

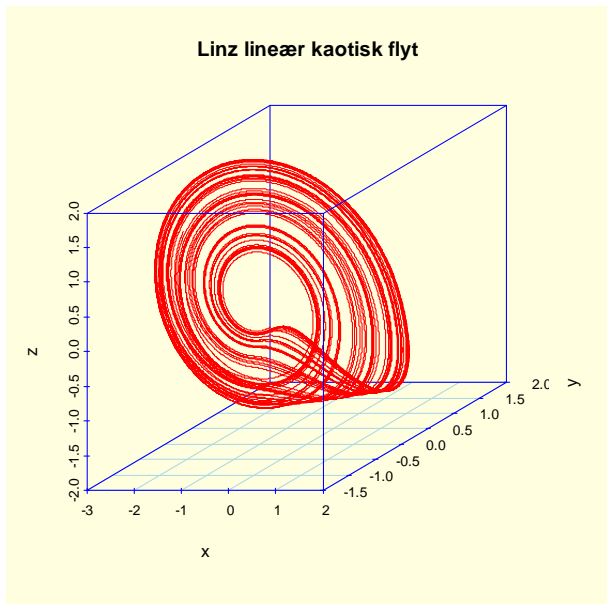
Linz, S.J. & Sprott, J.C. *Elementary chaotic flow*. Physics Letters A 259(1999)240-245.

```
library(deSolve)
params<-c(a=0.6)
linz<-function(t,x,p)
{
  dxdt<-x[2]
  dydt<-x[3]
  dzdt<-p["a"]*x[3]-x[2]+abs(x[1])-1
  list(c(dxdt,dydt,dzdt))
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,300,0.01)
init.state<-c(0,-0.7,0)
out.state<-lsoda(init.state,out.time,linz,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(out.state[,2],out.state[,3],type="n",ylab="y",xlab="x",main="Linz lineær kaotisk flyt")
lines(out.state[,2],out.state[,3],col="blue")
```



Figur. Fasediagram Linz lineær kaotisk flyt med  $a=0.6$ , initialverdier  $(0,-0.7,0)$  og tid  $(0,300,0.01)$





Figur. 3D fasediagram Linz lineær kaotisk flyt med  $a=0.6$ , initialverdier  $(0, -0.7, 0)$  og tid  $(0, 300, 0.01)$

## 3D-torus

Vi har følgende tre ikke-lineære differensialligninger som gir kvasiperiodiske løsninger. Eksempel fra Langford, W.F. *Numerical studies of torus bifurcations*, Birkhäuser 1984.

$$\frac{dx_1}{dt} = (x_3 - 0.7)x_1 - 3.5x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3.5x_1 + (x_3 - 0.7)x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0.6 + x_3 - 0.33x_3^3 - (x_1^2 + x_2^2)(1 + 0.25x_3)$$

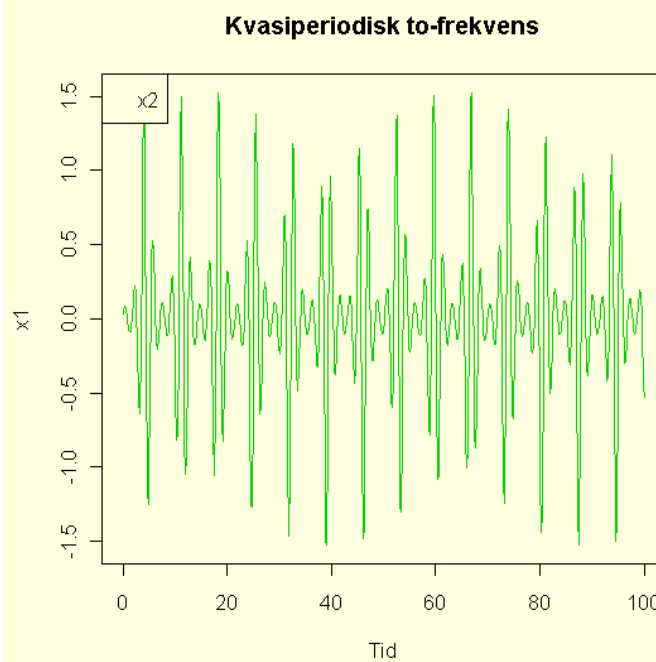
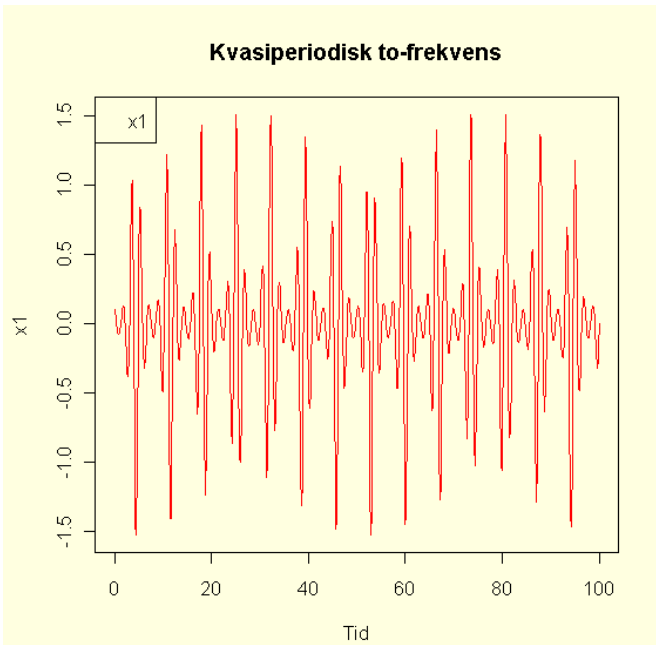
### #3D-Torus

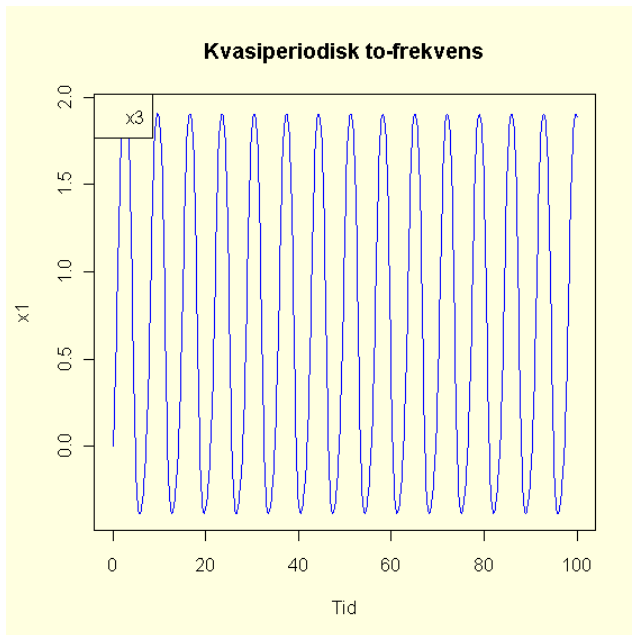
```

params<-c()
torus<-function(t,y,p)
{
with(as.list(p), {
dx<-((y[3]-0.7)*y[1])-3.5*y[2]
dy<-3.5*y[1]+(y[3]-0.7)*y[2]
dz<-0.6+y[3]-0.33*(y[3]^3)-(y[1]^2+y[2]^2)*(1+0.25*y[3])
list(c(dx,dy,dz))
})
}
tid<-seq(0,100,0.1)
initial<-c(0.1,0.03,0.001) #startbetingelser

```

```
resul<-lsoda(initial,tid,torus,params,rtol=1e-4)
plot(resul[,1],resul[,2],xlab="Tid",ylab="x",type="l",col=3,
main="Kvasiperiodisk to-frekvens")
legend("topleft",c("x1"))
```



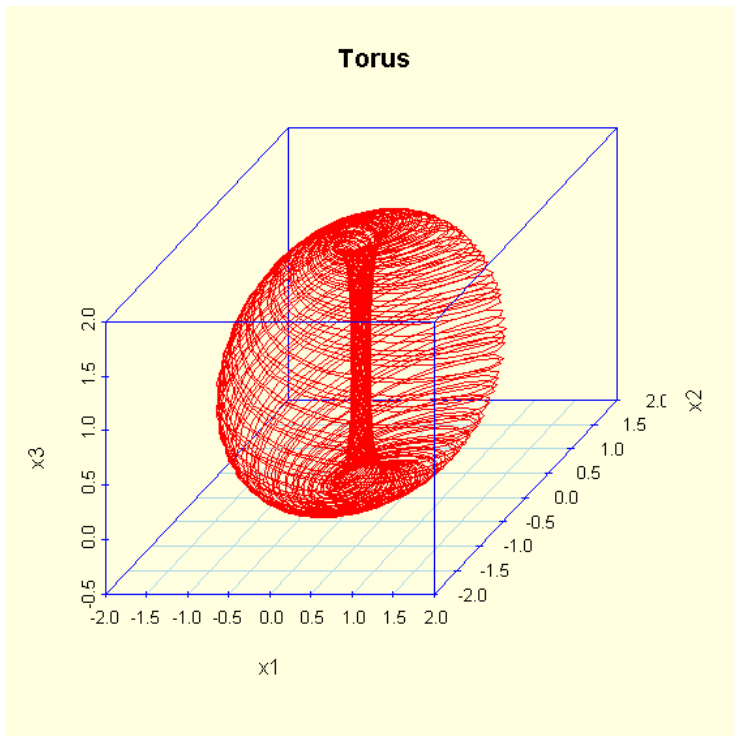


### #3D-Torus

```

params<-c()
torus<-function(t,y,p)
{
with(as.list(p), {
dx<-((y[3]-0.7)*y[1])-3.5*y[2]
dy<-3.5*y[1]+(y[3]-0.7)*y[2]
dz<-0.6+y[3]-0.33*(y[3]^3)-(y[1]^2+y[2]^2)*(1+0.25*y[3])
list(c(dx,dy,dz))
})
}
tid<-seq(0,300,0.1)
initial<-c(0.1,0.03,0.001)
resul<-lsoda(initial,tid,torus,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
require(scatterplot3d)
scatterplot3d(resul[,2],resul[,3],resul[,4],type="l",
xlab="x1",ylab="x2",zlab="x3",main="Torus",color=2,
col.axis="blue", col.grid="lightblue")

```

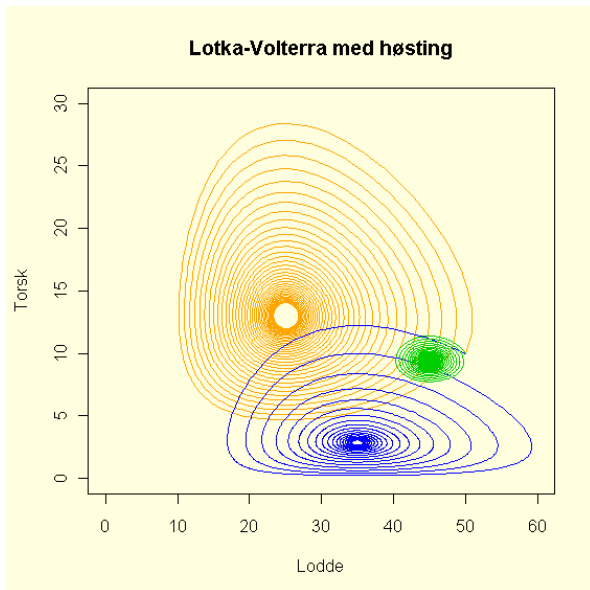


## Lotka-Volterra med høsting

Lotka-Volterra med høsting med to høstingsintensiteter  $h_1$  og  $h_2$ .

$$\frac{dB}{dt} = r \cdot B \cdot \left( \frac{K - B}{K} \right) - b \cdot B \cdot P - h_1 \cdot B$$

$$\frac{dP}{dt} = c \cdot B \cdot P - d \cdot P - h_2 \cdot P$$



Lotka-Volterra med høsting.  $h_1=h_2=0$  (oransje),  $h_1=0.3, h_2=0.2$  (blå),  $h_1=0.10, h_2=0.40$  (grønn). Vi ser hvordan likevektstilstanden endrer seg. Ved for høy høsting av byttedyr (lodde) kollapser begge bestandene. Høsting i et system med e.g. torsk (predator) og lodde (byttedyr). Systemet stabiliserer seg med mindre torsk og mer lodde. Vi kan gjøre samme resonnering i en fiskdam hvor vi har en bestand med fisk (predator) som spiser mygglarver (byttedyr).

#### #Lotka-Volterra med høsting

```
p<-c(r=0.4,K=1000,b=0.03,c=0.02,d=0.5,h1=0.1,h2=0.4)
lovol.model <-function(t,x,p)
{
  with(as.list(p), {
    B<-x[1]
    P<-x[2]
    dbdt<-r*B*(K-B)/K-b*B*P-h1*B
    dpdt<-c*B*P-d*P-h2*P
    list(c(dbdt,dpdt))
  })
}
require(deSolve)
tid<-seq(0,500,0.1) #tid
init<-c(50,10) #startbetingelser
out<-as.data.frame(lsoda(init,tid,lovol.model,p,rtol=1e-4))
plot(out[,2],out[,3],type="n",ylim=c(0,30),xlim=c(0,60),ylab="
Torsk",xlab="Lodde",
main="Lotka-Volterra med høsting")
lines(out[,2],out[,3],col=3)
```

## Lotka-Volterra med 3 næringsstrinn

Vi kan lage en næringskjedemodell med tre trinn. Et byttedyr og to predatorer P og P2. Dette tilsvarer e.g. vegetasjon-hare-gaupe, eller meitemark-trost-hauk

$$\frac{dB}{dt} = r \cdot B - b \cdot B \cdot P$$
$$\frac{dP}{dt} = c \cdot B \cdot P - d \cdot P - e \cdot P \cdot P2$$
$$\frac{dP2}{dt} = g \cdot P \cdot P2 - f \cdot P2$$

r - vekstraten for byttedyr uten predator tilstede

b - effekten av predator på byttedyr

d - dødsrate for predator i fravær av byttedyr

c - effektivitet og formeringsrate hos predator

e - effekten av predasjon fra P2 på P

f - naturlig dødsrate fra predator P2

g- effektivitet og formeringsrate av predator P2 i nærvær av P

### #Lotka-Volterra med 3 næringsstrinn

```
p<-c(r=0.05,b=0.03,c=0.02,d=0.1,e=0.02,f=0.1,g=0.04)
```

```
lovol3<-function(t,x,p)
```

```
{
```

```
  with(as.list(p), {
```

```
    B<-x[1]
```

```
    P<-x[2]
```

```
    P2<-x[3]
```

```
    dbdt<-r*B-b*B*P
```

```
    dpdt<-c*B*P-d*P-e*P*P2
```

```
    dp2dt<-g*P*P2-f*P2
```

```
    list(c(dbdt,dpdt,dp2dt))
```

```
  })
```

```
}
```

```
require(deSolve)
```

```
time<-seq(0,500,0.1) #tid
```

```
start<-c(50,5,10) #startbetingelser (B,P,P2)
```

```
ut<-as.data.frame(lsoda(start,time,lovol3,p,rtol=1e-4))
```

```
plot(ut[,1],ut[,2],xlim=c(0,500),ylim=c(0,50),type="n",ylab="Antall",xlab="Tid",
```

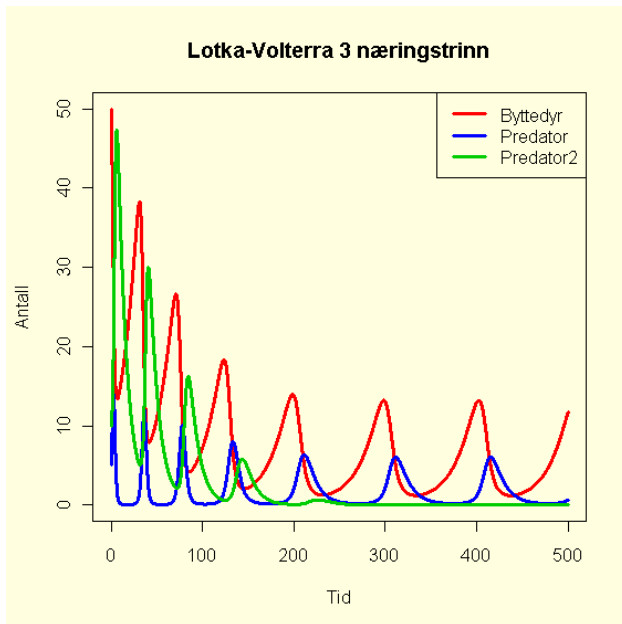
```
main="Lotka-Volterra 3 næringsstrinn")
```

```
lines(ut[,1],ut[,2],col=2,lwd=3)
```

```
lines(ut[,1],ut[,3],col=4,lwd=3)
```

```
lines(ut[,1],ut[,4],col=3,lwd=3)
```

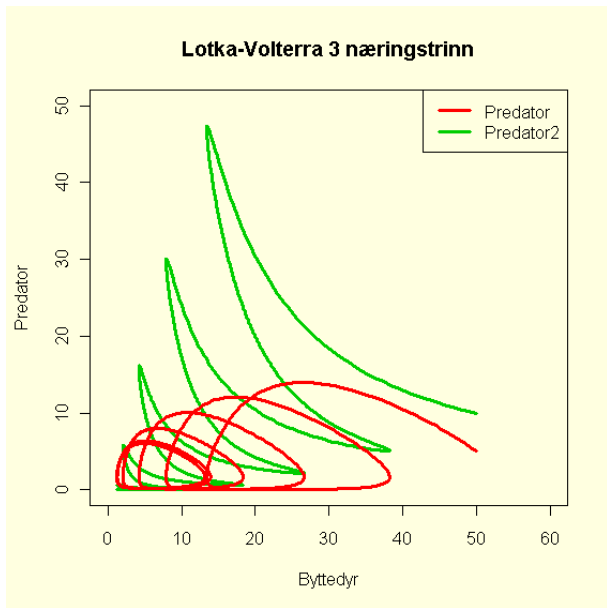
```
legend("topright",c("Byttedyr","Predator","Predator2"),col=c(2,4,3),lwd=c(3,3,3))
```



Tidsseriediagram med Lotka-Volterra i 3 næringstrinn  
 $r=0.05, b=0.03, c=0.02, d=0.1, e=0.02, f=0.1, g=0.04$ . Initialverdi  
 (5, 50, 10)

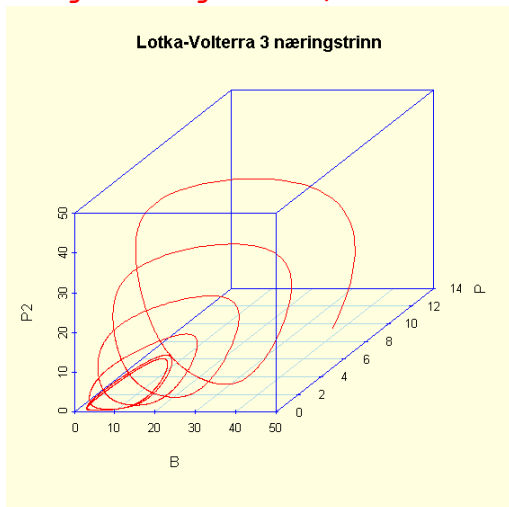
#### #Lotka-Volterra med 3 næringstrinn

```
p<-c(r=0.05,b=0.03,c=0.02,d=0.1,e=0.02,f=0.1,g=0.04)
lovol3<-function(t,x,p)
{
  with(as.list(p), {
    B<-x[1]
    P<-x[2]
    P2<-x[3]
    dbdt<-r*B-b*B*P
    dpdt<-c*B*P-d*P-e*P*P2
    dp2dt<-g*P*P2-f*P2
    list(c(dbdt,dpdt,dp2dt))
  })
}
require(deSolve)
time<-seq(0,500,0.1) #tid
start<-c(50,5,10) #startbetingelser (B,P,P2)
ut<-as.data.frame(lsoda(start,time,lovol3,p,rtol=1e-4))
par(bg="lightyellow")
plot(ut[,2],ut[,3],xlim=c(0,60),ylim=c(0,50),type="n",ylab="Predator",xlab="Byttedyr",
main="Lotka-Volterra 3 næringstrinn")
lines(ut[,2],ut[,3],col=2,lwd=3)
legend("topright",c("Predator","Predator2"),col=c(2,3),lwd=c(3,3))
```



Fasediagram med Lotka-Volterra i 3 næringsstrinn  
 $r=0.05, b=0.03, c=0.02, d=0.1, e=0.02, f=0.1, g=0.04$ . Initialverdi  
 $(B, P, P2) = (5, 50, 10)$

```
require(scatterplot3d)
scatterplot3d(ut[,2],ut[,3],ut[,4],type="l", xlab="B",ylab="P",zlab="P2",
main="Lotka-Volterra 3 næringsstrinn",color=2,col.axis=4,
col.grid="lightblue")
```



Figur. Fasediagram med Lotka-Volterra i 3 næringsstrinn  
 $r=0.05, b=0.03, c=0.02, d=0.1, e=0.02, f=0.1, g=0.04$ . Initialverdi  
 $(5, 50, 10)$

Ligningen

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 1$$

har analytisk løsning  $x=\tan(t)$  og blir uendelig når  $t=\pi/2$  (en singularitet)

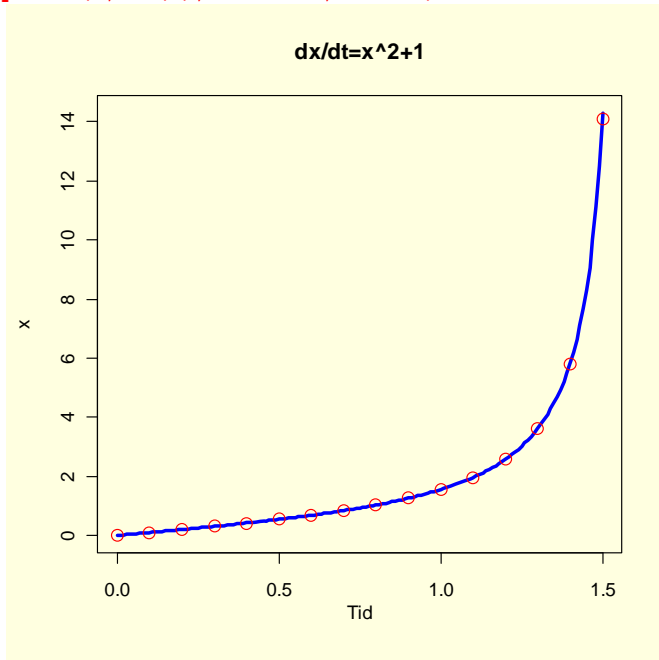
```
library(deSolve)
params<-
eksp<-function(t,x,p)
{
dxdt<-x[1]^2+1
```



```

list(dxdt)
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,1.5,0.01)
init.state<-0.001
out.state<-as.data.frame(lsoda(init.state,out.time,eksp,params,rtol=1e-4))
par(bg="lightyellow")
plot(out.state[,1],out.state[,2],type="n",col="blue",xlab="Tid",
",ylab="x",main="dx/dt=x^2+1")
lines(out.state[,1],out.state[,2],col="blue",lwd=3)
t<-seq(0,1.5,0.1)
points(t,tan(t),col="red",cex=1.5)

```



Figur. Numerisk og analytisk løsning av  $dx/dt=x^2+1$

## Stabilitet og bifurkasjon

### Ressurskonkurransen og alternative stabile stadier

I et økosystem kan det være to eller flere stabile likevekter gitt ett sett av ytre omgivelsesfaktorer. Økosystemet kan skifte fra et til et annet via fysiske forstyrrelser i det ytre miljø eller demografiske tilfeldigheter (stokastisitet) som endringer i fødsel eller død i små populasjoner. En art kan undertrykke en eller flere andre arter. Dynamikken i et økosystem kan beskrives av et faselandskap med topper (ustabile maksimumspunkter), dalbunner (stabile minimumspunkter) eller ustabile sadelpunkter. Ikke alle ressursene i et økosystem er tilgjengelig for alle artene. Noen ressurser er det stor konkurranse om, for planter gjelder dette lys, mineralnæring og vann. Ved forskyvning av likevekten fra et system til et annet, bistabile stadier, kommer ikke systemet tilbake til sin opprinnelige tilstand langs samme vei, det er hysteres. Sumpplanter som takrør

(*Phragmites*), sivaks (*Scirpus*), starr (*Carex*), snelle (*Equisetum*) er overvannsarter fortar all CO<sub>2</sub>-assimilasjon via bladverk over vannet, og har luftvev ned til rotstokken.

De ekte vannplantene (limnofyter) deles i flytebladsplanter (nymphaeider) med bladverk som flyter på vannflaten som nøkkerose (*Nymphaea*) og tjønnaks (*Potamogeton*), festet til bunnen, eller frittlevende som andemat eller den nitrogenfikserende vannbregnen *Azolla*. Undervannsplanter (eloider) har forgreinetete tynne blad og har hele bladmassen nedsenket i vann, for eksempel noe arter tjønnaks og blærerot. Isoetider er rosettplanter festet til bunnsedimentet som brasmegrass (*Isoetes*) og botnegras (*Lobelia*).

Tette matter med flytebladplanter som dekker overflaten til ferskvann har stor økologisk konsekvens, bidrar til hypoksis/anoksis i vannmassene og påvirker biomassen til andre arter i vannet. Spesielt har dette vist seg som et stort problem i tropiske områder med vannhyasinter, vannplantene *Salvinia molesta*, *Eichhornia crassipes* og *Pistia stratiotes*. Økende grad av eutrofiering har sannsynligvis bidratt til spredning av flytebladsplanter. Scheffer og medarbeidere har funnet indikasjoner på at antropogen eutrofiering av vann kan gi oppblomstring av flytebladsplanter. Når flyteplante blir den dominerende arten vil de skygge vekk arter som lever nede i vannet, enten makrofytter som er festet til bunnen eller frittlevende alger. Alle økosystemer er i kontinuerlig endring grunnet forandring i næringstilgangen, klimaendringer, habitatfragmentering og biotisk utnyttelse. Men skulle forvente at endringene skjedde gradvis, men forsøk og modeller har vist at stabile stadier kan bli avbrutt av plutselige raske endringer som ender i en alternativ stabil likevektstilstand (Scheffer et al. 2001). Disse nye stabile tilstandene som oppstår kan være vanskelig å bringe tilbake til opprinnelsen, og er karakterisert av hysteresis. Eksempler på bistabile tilstander/likevekter er:

- skoglandskap - ørken
- lynghei - buskvegetasjon
- skoglandskap - grasslette
- levende korallrev - algebegrodd korallrev.

Konkurransen om næring og lys i samme nisjeakse kan resultere i selvorganisering av arter (Scheffer & van Nes 2006). Hva skjer hvis stabile stadier med flytebladsplanter eller neddykkete planter invaderes av den andre arten? Dannes det bistabile stadier? Skyldes eventuell manglende invasjonssuksess mangel på næring eller er det andre faktorer? Ifølge Scheffer et al. 2003 har vi følgende modell for konkurranse mellom flytebladsplanter for eksempel andemat (*Lemna sp.*) og neddykkete planter for eksempel vasspest (*Elodea sp.*). Neddykkete planter festet til bunnen kan ta opp mineralnæring og CO<sub>2</sub> både fra bunnsedimentene og de frie vannmasser. Disse får forskjellig respons i forhold til

planteplankton som lever i de frie vannmasser og må hente all CO<sub>2</sub> og mineralnæring fra vannmassene.

Litteratur:

Scheffer, M., Szabó, S., Gragnani, A, van Nes, E.H., Rinaldi, S., Kautsky, N., Nordberg, J., Roijackers, R.M.M. & Franken, R.J.M.: *Floating plant dominance as a stable state*. PNAS 100 (2003) 4040-4045.

Scheffer, M., Carpenter, S., Foley, J.A., Folke, C. & Walker, B.: *Catastrophic shifts in ecosystems*. Nature 413/11.october (2001) 591-596.

Scheffer, M. & van Nes, E.H.: *Self-organized similarity, the evolutionary emergence of groups of similar species*. PNAS 103 (2006) 6230-6235.

Scheffer og medarbeidere har laget følgende modell for endring i biomasse for flyteplante over tid  $dF/dt$  (F- floating):

$$\frac{dF}{dt} = r_f \cdot F \cdot \frac{n}{n + h_f} \cdot \frac{1}{1 + a_f \cdot F} - l_f \cdot F$$

Endring i biomasse over tid for nedsenket/neddykket plante  $dS/dt$  (S -submerged):

$$\frac{dS}{dt} = r_s \cdot S \cdot \frac{n}{n + h_s} \cdot \frac{1}{1 + a_s \cdot S + b \cdot F + W} - l_s \cdot S$$

Næringsbegrensning er funksjon av konsentrasjonen av uorganisk nitrogen, og som minsker som funksjon av plantebiomassen.

Næringsbegrensningsfaktoren  $n$  blir følgende:

$$n = \frac{N}{1 + q_s \cdot S + q_f \cdot F}$$

Var	Verdi	Enhet	Variabeltype
F		g dw m <sup>-2</sup>	Biomasse flyteplante
S		g dw m <sup>-2</sup>	Biomasse neddykket plante
N		mg N liter <sup>-1</sup>	Total konsentrasjon av N i vannet (uten planter)
n		mg N liter <sup>-1</sup>	Konsentrasjon av uorganisk N
a <sub>f</sub>	0.01	(g dw m <sup>-2</sup> ) <sup>-1</sup>	Skyggingseffekt: F på seg selv
a <sub>s</sub>	0.01	(g dw m <sup>-2</sup> ) <sup>-1</sup>	Skyggingseffekt: S på seg selv
b	0.02	(g dw m <sup>-2</sup> ) <sup>-1</sup>	Skyggeeffekt: F på S
h <sub>f</sub>	0.2	mg N liter <sup>-1</sup>	Halvmetningskonsentrasjon for F
h <sub>s</sub>	0.0	mg N liter <sup>-1</sup>	Halvmetningskonsentrasjon for S
l <sub>f</sub>	0.05	dag <sup>-1</sup>	Tapsprosesser (respirasjon etc) for F
l <sub>s</sub>	0.05	dag <sup>-1</sup>	Tapsprosesser (respirasjon etc) for S
q <sub>f</sub>	0.005	(g dw m <sup>-2</sup> ) <sup>-1</sup>	Effekten av F på N-konsentrasjonen
q <sub>s</sub>	0.075	(g dw m <sup>-2</sup> ) <sup>-1</sup>	Effekten av S på N-konsentrasjonen
r <sub>f</sub>	0.5	dag <sup>-1</sup>	Maksimal vekstrate flyteplante
r <sub>s</sub>	0.5	dag <sup>-1</sup>	Maksimal vekstrate neddykket plante
W	0	-	Lysreduksjon i vannsøylen

Etter Scheffer et al. 2003. Parameterverdiene kan endres i utprøving av modellen

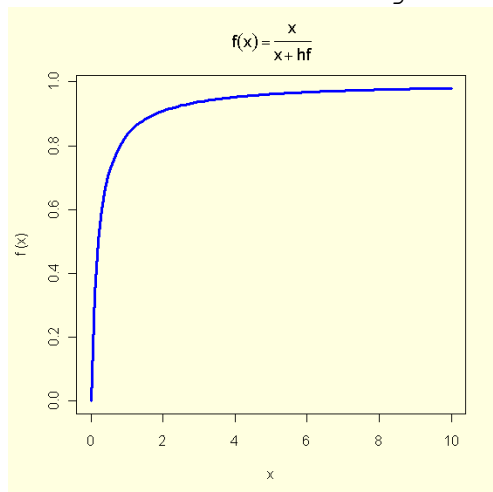
Lysbegrensningsfaktor hvor  $1/a_f$  og  $1/a_s$  er tetthet av henholdsvis flyteplante og neddykket plante hvor vekstraten er redusert med 50 % grunnet intraspesifikk konkurranse om lys. Den deriverte  $dF/dt$  som viser veksten av flyteplante blir tangenten til vekstfunksjonen. Følgende del av  $dF/dt$  blir et produksjonsledd som viser økning i biomasse, hvor  $r_f$  er maksimal vekstrate per capita for flyteplante, her satt 0.5 dvs. 50% per dag, en dobling i biomasse i løpet av ca. 1.4 dager;  $r_f F$  og  $r_s S$  gir eksponensiell vekst men denne blir modifisert av tilgangen på nitrogen ( $n$ ) og lys.

$$r_f \cdot F \cdot \frac{n}{n + h_f} \cdot \frac{1}{1 + a_f \cdot F}$$

Fra denne trekkes biomassetap per dag  $l_f F$  og  $l_s S$ , som er et tetthetsavhengig tap som skyldes respirasjon eller død: Når variabel  $l_f$  settes 0.05 betyr dette et tap på 5% per dag. Uttrykket for nitrogen i vannsøylen:

$$\frac{n}{n + h_f}$$

gir en kurve som en rektangulær hyperbel, type II funksjonell respons, som går gjennom origo og nærmer seg asymptotisk til 1, en metningsfunksjon. Ttilsvarende Michaelis-Menten-kurve hvor halvmetningskonstanten  $h_f$  tilsvarer  $K_m$ =konsentrasjonen som gir halvparten av maksimalverdi  $V_{max}$ , Monod-kurve, hvor  $n$  er næringstilgang på x-aksen og y-akse går fra 0-1). Når  $n$  er liten er vekstraten kontrollert av næringstilgang, hvor vi har satt inn  $h_f=0.2$  som konstant i modellen. Hvis  $h=0$  er det ingen nitrogenbegrensning. For makrofytter festet til bunnen som henter all sin næring fra sedimentene blir  $h_s=0$ .



```
hf<-0.2
f<-function(x) x/(x+hf)
curve(f,0,10,type="l",col=4,lwd=3,
main=expression(f(x)==frac(x,x+hf)))
```

Opptaket av nitrogen er bestemt av

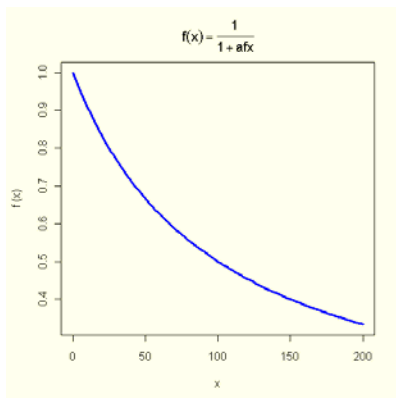
$$\frac{1}{1 + q_s \cdot S + q_f \cdot F}$$

hvor  $1/q$  er en halvmetningskonstant, og  $q$  er per captia hastighet som plantene fjerner nitrogen.

Uttrykket for lysbegrenset vekst:

$$\frac{1}{1 + a_f \cdot F}$$

er en tetthetsavhengig respons med funksjonsform som en hyperbel som starter ved 1 på y-aksen og nærmer seg assymptotisk til  $F$  for x-aksen når  $F$  stiger. Dette uttrykket får lav verdi når  $F$  er stor. Vekstraten reduseres når  $F$  blir stor, hvor halvmetningsparameter settes i modellen  $a_f=0.01$ , og viser tettheten av planter når veksten er halvparten av maksimum. Parameter  $b$  er skyggingseffekten av flyteplanter og  $W$  er lyset som blir absorbert i vannkolonnen. Denne settes  $W=0$  i modellen, altså bare for rosettplanter festet til bunnen.  $W$  blir forskjellig fra 0 hvis det er planteplankton i vannmassene.



**af<-0.01**

**f<-function(x) 1/(1+af\*x)**

**curve(f, 0, 200, type="l", col=4, lwd=3, main=expression(f(x)==frac(1,1+af\*x)))**

Analoge resonnementer blir det for  $dS/dt$  hvor tapsleddet er  $I_s \cdot S$ . Produksjonsleddet er omtrent det samme, men det bringes inn noen nye parametere.

Vekstleddet for  $S$  med økning i biomasse blir analogt som for  $F$ :

$$r_s \cdot S \cdot \frac{n}{n + h_s}$$

Nedgangen i vekst for  $S$  blir gitt ved:

$$\frac{1}{1 + a_s \cdot S + b \cdot F + W}$$

Variabel  $b \cdot F$  angir skyggeeffekt.

Reduksjon av lys i vannsøylen følger Beer-Lamberts lov, men i følgende eksempel settes  $W=0$ .

Det er viktig at det er samme måleenheter på begge sider av differensialligningen.

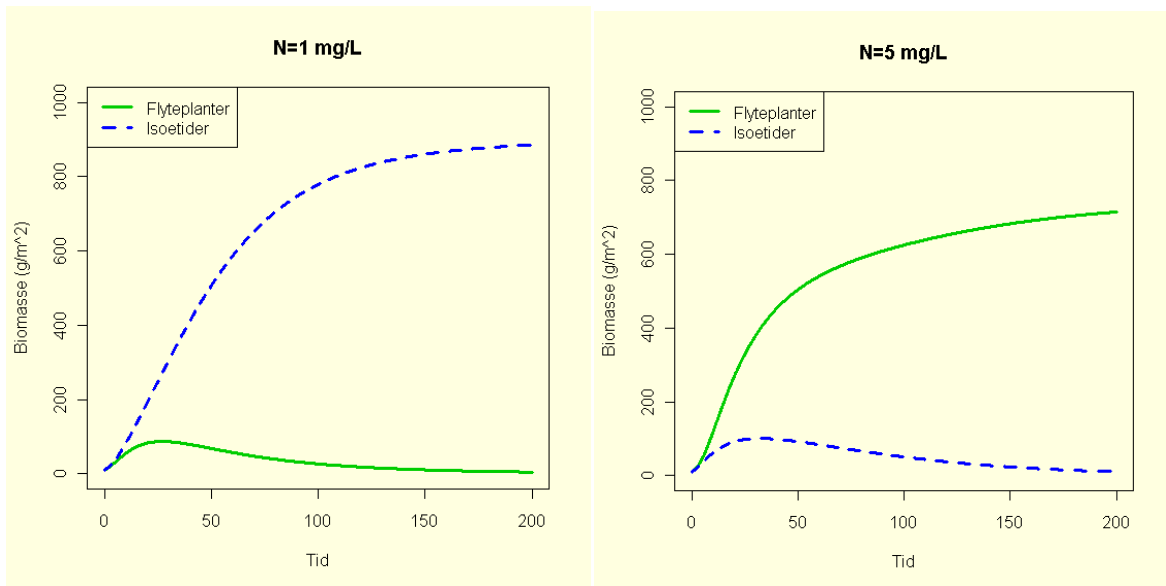
$$\frac{dF}{dt} = r_f \cdot F \cdot \frac{n}{n+h_f} \cdot \frac{1}{1+a_f \cdot F} - l_f \cdot F$$

$$= \frac{1}{\text{dag}} \cdot \frac{g}{m^2} \cdot \frac{\frac{mg N}{L}}{\frac{mg N}{L} + \frac{1}{\frac{mg N}{L}}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{g}{m^2}} \cdot \frac{g}{m^2}} - \frac{1}{\text{dag}} \cdot \frac{g}{m^2} = \frac{g}{m^2 \cdot \text{dag}}$$

Tilsvarende kan gjøres for dS/dt.

### #Scheffer modell

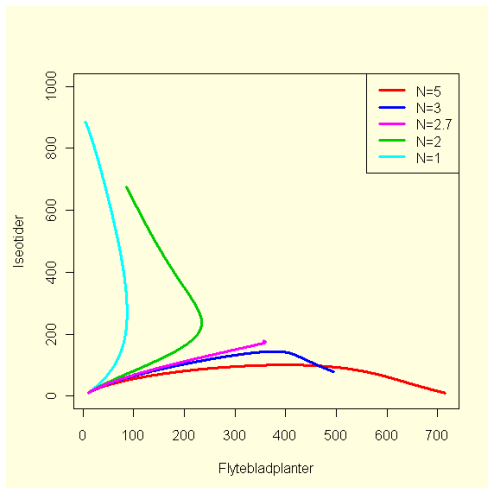
```
p<- c(N=1,af = 0.01,as=0.01,b= 0.02,hf=0.2,hs=0.0,lf=0.05,
ls = 0.05,qf=0.005,qs=0.075,rf=0.5,W=0,rs=0.5)
scheffer <- function(t, x, p)
{
with(as.list(p), {
F<-x[1] #flyteplanter F
S<-x[2] #iseotider S
n<- N/(1+qf*F+qs*S)
dFdt<-rf*F*(n/(n+hf))*(1/(1+ af*F))-lf*F
dSdt<-rs*S*(n/(n+hs))*(1/(1+as*S+b*F+W))-lf*S
list(c(dFdt, dSdt))
})
}
require(deSolve)
tid<- seq(0,200,0.1) #tid dager
start<-c(10,10) #startverdier (F,S)
ut<-lsoda(start,tid,scheffer,p,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(ut[,1],ut[,2],type="n",ylim=c(0,1000),ylab="Biomasse
(g/m^2)",
xlab="Tid",main="N=1 mg/L")
lines(ut[,1],ut[,2],col=3,lwd=3)
lines(ut[,1],ut[,3],col=4,lwd=3,lty=2)
legend("topleft",c("Flyteplanter","Isoetider"),col=c(3,4),lty=
c(1,2),lwd=c(3,3))
head(ut)
```



Ved lav konsentrasjon av uorganisk nitrogen dominerer de neddykkete plantene, ved høy N-konsentrasjon dominerer flytebladplantene. Startverdi  $10 \text{ g m}^{-2}$  for begge typer planter. Ifølge modellen skjer det et katastrofeskipt for  $N \approx 2.7 \text{ mg L}^{-1}$ .

#### #Scheffer modell fasediagram

```
p<- c(N=2.7,af =0.01,as=0.01,b= 0.02,hf=0.2,hs=0.0,lf=0.05,
ls = 0.05,qf=0.005,qs=0.075,rf=0.5,W=0,rs=0.5)
scheffer <- function(t, x, p)
{
with(as.list(p), {
F<-x[1] #flyteplanter F
S<-x[2] #isotider S
n<- N/(1+qf*F+qs*S)
dFdt<-rf*F*(n/(n+hf))*(1/(1+ af*F))-lf*F
dSdt<-rs*S*(n/(n+hs))*(1/(1+as*S+b*F+W))-lf*S
list(c(dFdt, dSdt))
})
}
require(deSolve)
tid<- seq(0,200,0.1) #tid dager
start<-c(10,10) #startverdier (F,S)
ut<-lsoda(start,tid,scheffer,p,rtol=1e-4)
plot(ut[,2],ut[,3],type="n",ylim=c(0,1000),ylab="Iseotider",
xlab="Flytebladplanter")
lines(ut[,2],ut[,3],col=6,lwd=3)
legend("topright",c("N=5","N=3","N=2.7","N=2","N=1"),col=c(2,4,
6,3,5),lwd=c(3,3,3,3,3))
```



Vi kan lage en løkke og sette den assymptotiske verdien for biomassen av flytebladsplanter og iseotider og plotte disse. Først starter vi ved lav N og øker denne:

**#tom matrise M for lagring av maks biomasse**

```
M<-matrix(c(0,0,0),10,3)
```

**#varierer N=0.5-5 g/L**

```
for(i in 1:10) {
```

```
p<- c(N=0+i/2,af =0.01,as=0.01,b= 0.02,hf=0.2,hs=0.0,lf=0.05,
```

```
ls = 0.05,qf=0.005,qs=0.075,rf=0.5,W=0,rs=0.5)
```

```
scheffer <- function(t, x, p)
```

```
{
```

```
with(as.list(p), {
```

```
F<-x[1] #flyteplanter F
```

```
S<-x[2] #iseotider S
```

```
n<- N/(1+qf*F+qs*S)
```

```
dFdt<-rf*F*(n/(n+hf))*(1/(1+ af*F))-lf*F
```

```
dSdt<-rs*S*(n/(n+hs))*(1/(1+as*S+b*F+W))-lf*S
```

```
list(c(dFdt, dSdt))
```

```
})
```

```
}
```

```
require(deSolve)
```

```
tid<- seq(0,200,0.1) #tid dager
```

```
start<-c(10,10) #startverdier (F,S)
```

```
ut<-lsoda(start,tid,scheffer,p,rtol=1e-4)
```

```
M[i,1]<-i/2
```

```
M[i,2]<-ut[2000,2]
```

```
M[i,3]<-ut[2000,3]
```

```
}
```

```
colnames(M)<-c("N", "F", "S")
```

```
plot(M[,1],M[,2],type="l",col=3,lwd=3,xlab="N, mg/L",
```

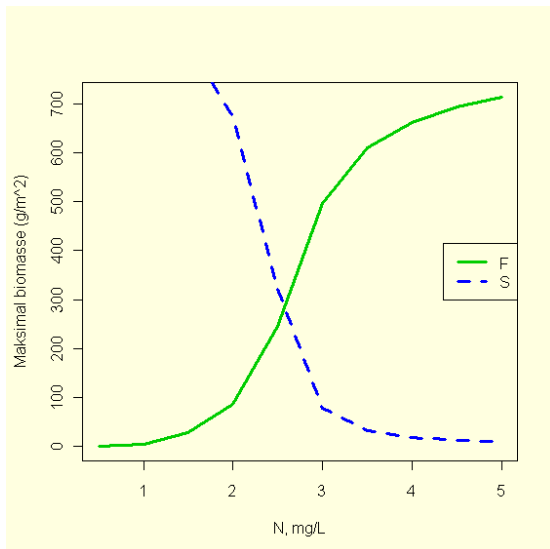
```
ylab="Maksimal biomasse (g/m^2)")
```

```
lines(M[,1],M[,3],col=4,lty=2,lwd=3)
```

```
legend("right",c("F", "S"),col=c(3,4),lwd=c(3,3),lty=c(1,2))
```

```
M
```





	N	F	S
[1,]	0.5	0.1326678	898.892171
[2,]	1.0	4.3624951	885.093608
[3,]	1.5	28.4395019	823.663650
[4,]	2.0	86.3457470	673.830568
[5,]	2.5	245.4573116	321.555879
[6,]	3.0	495.6066388	77.677012
[7,]	3.5	609.6934906	31.668599
[8,]	4.0	661.7968261	18.546599
[9,]	4.5	692.8222964	12.936951
[10,]	5.0	714.4489073	9.947798

Vi ser at det skjer et faseskifte ved  $N \approx 2.7$  g/L for lik startmengde  $(F, S) = (10, 10)$

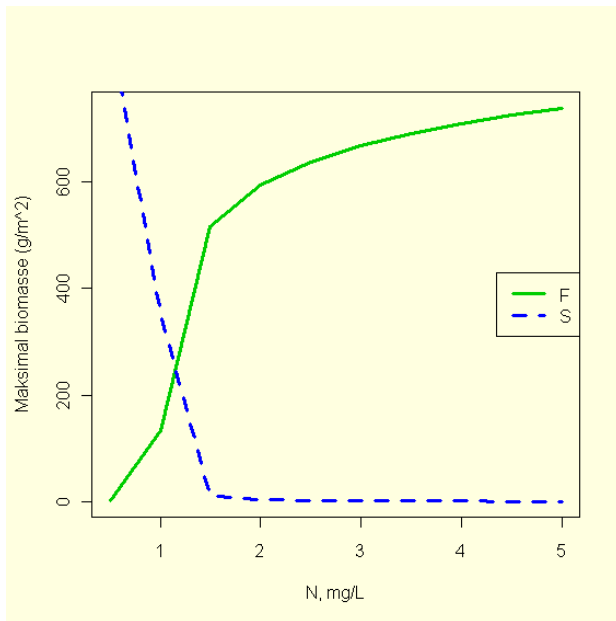
Nå kan vi i stedet starte ved en stor mengde flyteplanter i forhold til isetotider, startverdi  $(F, S) = (100, 10)$

```
#tom matrise X for lagring av maks biomasse
X<-matrix(c(0,0,0),10,3)
#varierer N=0.5-5 g/L
for(i in 1:10) {
p<- c(N=0+i/2,af =0.01,as=0.01,b= 0.02,hf=0.2,hs=0.0,lf=0.05,
ls = 0.05,qf=0.005,qs=0.075,rf=0.5,W=0,rs=0.5)
scheffer <- function(t, x, p)
{
with(as.list(p), {
F<-x[1] #flyteplanter F
S<-x[2] #isetotider S
n<- N/(1+qf*F+qs*S)
dFdt<-rf*F*(n/(n+hf))*(1/(1+ af*F))-lf*F
dSdt<-rs*S*(n/(n+hs))*(1/(1+as*S+b*F+W))-lf*S
list(c(dFdt, dSdt))
})
}
require(deSolve)
tid<- seq(0,200,0.1) #tid dager
start<-c(100,10) #startverdier (F,S) start høyF
ut<-lsoda(start,tid,scheffer,p,rtol=1e-4)
X[i,1]<-i/2
```

```

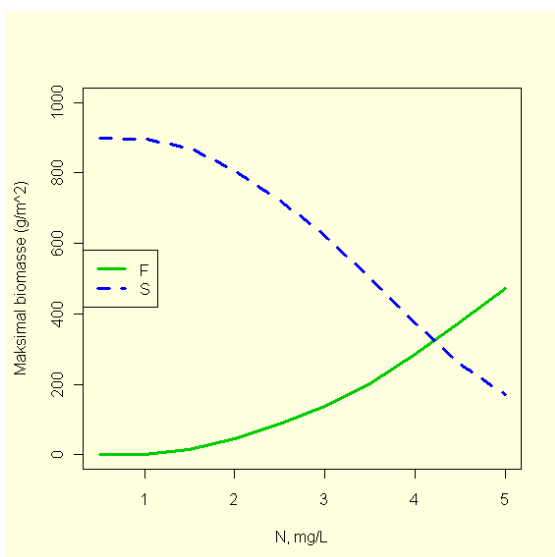
X[i,2]<-ut[2000,2]
X[i,3]<-ut[2000,3]
}
colnames(X)<-c("N", "F", "S")
par(bg="lightyellow")
plot(X[,1],X[,2],type="l",col=3,lwd=3,xlab="N, mg/L",
ylab="Maksimal biomasse (g/m^2)")
lines(X[,1],X[,3],col=4,lty=2,lwd=3)
legend("right",c("F", "S"),col=c(3,4),lwd=c(3,3),lty=c(1,2))
X

```



Vi ser at faseskiftet kommer ved en mye lavere N-konsentrasjon når utgangspunktet er en større mengde flytebladsplanter i forhold til isoetider.

Nedenfor er situasjonen hvis vi motsatt starter med høy konsentrasjon med isoetider  $(F,S)=(10,100)$  så kommer faseskiftet først ved høyere konsentrasjon av N



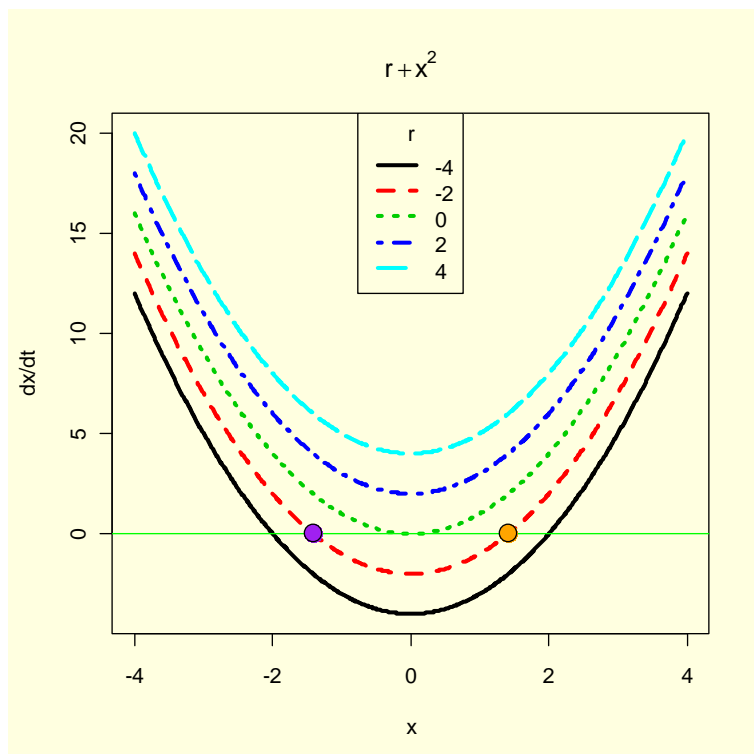
## Eksempel 1

Eksempler hentet fra Strogatz (1994).

Vi skal se nærmere på stabiliteten for differensialligningen som viser **fold bifurkasjon**:

$$\frac{dx}{dt} = r + x^2$$

```
x<-seq(-4,4,0.01)
r<-seq(-4,4,2)
funkt<-outer(x,r, function(x,r)r+x^2)
par(bg="lightyellow")
matplot(x,funkt,type="l",lwd=3,ylab="dx/dt",main=expression(r+x^2))
legend("top",as.character(r),title="r",lty=1:5,col=1:6,lwd=3)
abline(h=0,col="green")
```



Figur. Funksjonen  $dx/dt=r+x^2$  for forskjellige verdier av  $r$ .  
. For  $r=-2$  er det satt inn punkt for stabil likevekt (purpur) og ustabil likevekt (oransje)

Vi finner røttene for  $r=-2$  med `library(rootSolve)`:

```
require(rootSolve)
funkt<-function(x,r=-2)r+x^2
likevekt<- uniroot.all(funkt,c(-4,4))
likevekt
[1] -1.414209  1.414209
points(likevekt,y<-rep(0,length(likevekt)),pch=21,cex=2,
bg=c("purple","orange"))
```

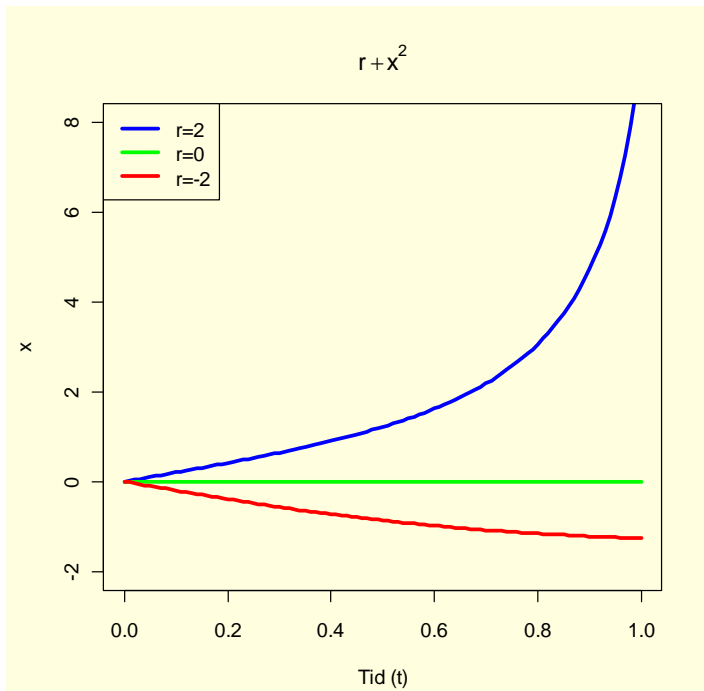
Numerisk løsning:

```
library(deSolve)
params<-c(r=2)
funkt<-function(t,x,p)
{
  dxdt<-p["r"]+x^2
```

```

list(dxdt)
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,1,0.01)
init.state<-0.01
out.state<-
as.data.frame(lsoda(init.state,out.time,funk,params,rtol=
1e-4))
par(bg="lightyellow")
plot(out.state[,1],out.state[,2],type="l",ylim=c(-2,8),xlim=c(0,1),lwd=3,xlab="Tid (t)",
ylab="x",col="blue",main=expression(r+x^2))
lines(out.state[,1],out.state[,2],lwd=3,col="red")

```



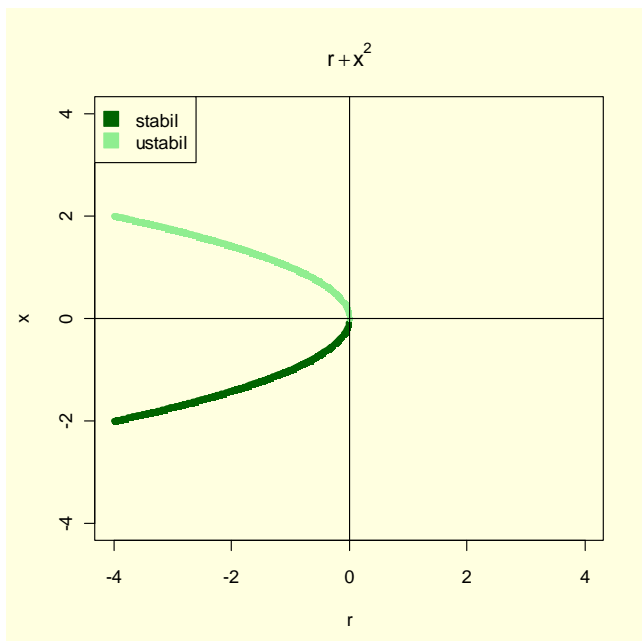
Figur. Tidsseriediagram for  $dx/dt=r+x^2$  for  $r=2, r=0, r=-2$ .

Vi kan lage et bifurksjonsdiagram

```

r2<- seq(-4,4,0.01)
par(bg="lightyellow")
plot(0,xlim=range(r2),ylim=c(-4,4),type="n",xlab="r",ylab="x",
main=expression(r+x^2))
stabilitet<-function(r)
{
rot<- uniroot.all(funk,c(-4,4),r=r)
eig<- vector()
for(i in 1:length(rot))
eig[i]<- sign(gradient(funk,rot[i],r=r))
return(list(rot=rot,eigen=eig))
}
for(r in r2){
stab<- stabilitet(r)
points(rep(r,length(stab$rot)),stab$rot,pch=20,
col=c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2],
bg=c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2])
}
legend("topleft",pch=22,pt.cex=2,c("stabil","ustabil"),
col=c("darkgreen","lightgreen"),pt.bg=c("darkgreen","lightgreen"))
abline(h=0)
abline(v=0)

```



Figur. Fold-bifurkasjonsdiagram for  $dx/dt=r+x^2$ .

I tillegg til fold-bifurkasjon for **endimensjonal flyt** i likevektspunktene som i dette eksemplet, finnes det transkritisk bifurkasjon og høgaffel bifurkasjon som vi skal se på nedenfor. For to- eller flerdimensjonale systemer finnes det andre typer bifurkasjoner e.g. sadelnode bifurkasjoner. I todimensjonale systemer finnes e.g. grensesyklus (limit syklus) i van der Pol osillator.

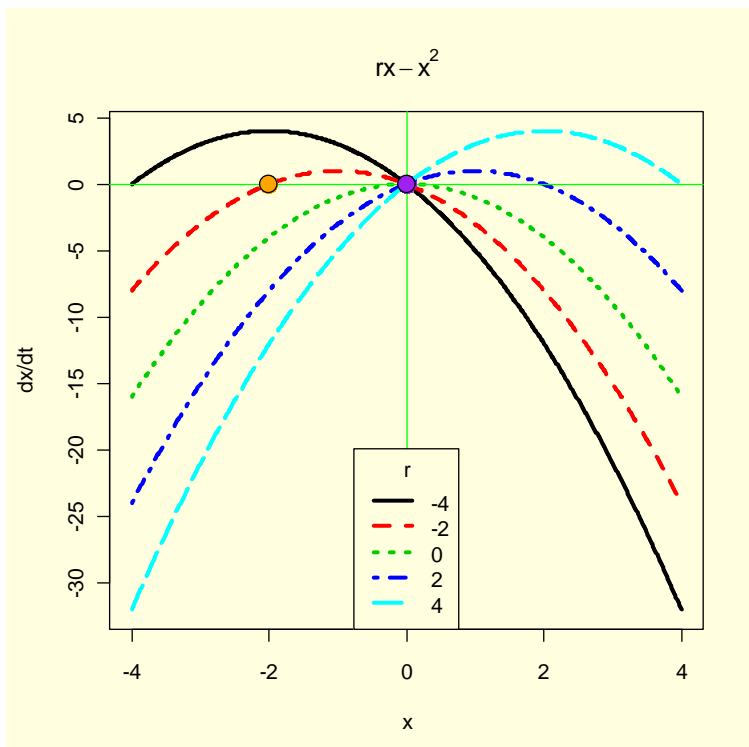
## Eksempel 2

Vi har ligningen som vi kjenner igjen fra den logistiske vekstkurven for vekst av en art:

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x - x^2$$

Denne har alltid et fast punkt hvor populasjonen er lik 0, uansett størrelsen på veksthastigheten  $r$ , men stabiliteten av dette punktet endrer seg med verdien av  $r$ . Den logistiske ligningen har **transkritisk bifurkasjon**.

```
x<-seq(-4,4,0.01)
r<-seq(-4,4,2)
funkt<-outer(x,r, function(x,r)r*x-x^2)
par(bg="lightyellow")
matplot(x,funkt,type="l",lwd=3,ylab="dx/dt",main=expression(r*x-x^2))
abline(h=0,col="green")
abline(v=0,col="green")
legend("bottom",as.character(r),title="r",lty=1:5,col=1:6,lwd=3)
```



Figur. Ligningen  $dx/dt=rx-x^2$  for forskjellige verdier av  $r$ . For alle verdier av  $r$  er  $x=0$  et likevektspunkt. For  $r<0$  er det et ustabil punkt ved  $x=r$ , og når  $r$  nærmer seg origo fra den negative siden faller det sammen med det ene faste punktet når  $r=0$ . Når  $r>0$  blir origo et ustabil punkt og skjæringspunktet  $x=r$  blir et stabilt punkt. Stabilitetspunkter for  $r=-2$  er innsatt hvor gult punkt er ustabil ( $x=-2$ ) og purpurfarget punkt er stabilt ( $x=0$ ). Tenk flyt langs  $x$ -aksen, og når den deriverte er positiv (kurven er over  $x$ -aksen og gir flyt til høyre) og når den deriverte er negativ (kurven under  $x$ -aksen) så er det flyt til venstre.

Vi finner røttene for  $r=-2$  med `library(rootSolve)`:

```
require(rootSolve)
funkt<-function(x,r=-2)r*x-x^2
likevekt<- uniroot.all(funkt,c(-4,4))
likevekt
[1] -2 0
points(likevekt,y<-rep(0,length(likevekt)),pch=21,cex=2,
bg=c("orange","purple"))
```

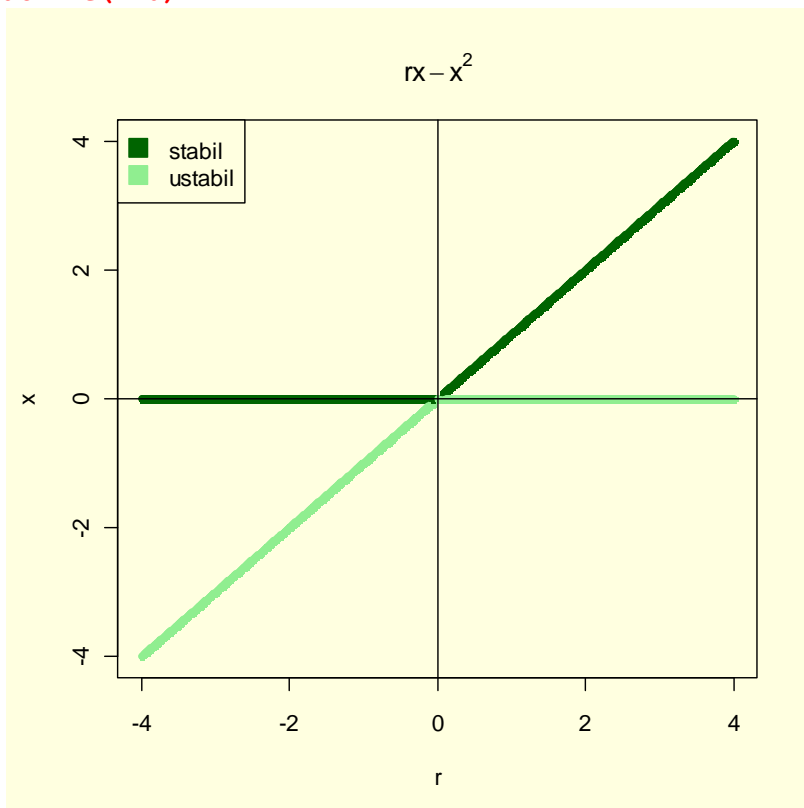
Vi lager et bifurkasjonsdiagram:

```
require(rootSolve)
r2<- seq(-4,4,0.01)
par(bg="lightyellow")
plot(0,xlim=range(r2),ylim=c(-4,4),type="n",xlab="r",ylab="x",
main=expression(r*x-x^2))
stabilitet<-function(r)
{
rot<- uniroot.all(funkt,c(-4,4),r=r)
eig<- vector()
for(i in 1:length(rot))
eig[i]<- sign(gradient(funkt,rot[i],r=r))
return(list(rot=rot,eigen=eig))
}
```

```

}
for (r in r2) {
stab<- stabilitet(r)
points(rep(r,length(stab$rot)),stab$rot,pch=20,
col=c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2],
bg =c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2])
}
legend("topleft",pch=22,pt.cex=2,c("stabil","ustabil"),
col=c("darkgreen","lightgreen"),pt.bg=c("darkgreen","lightgreen"))
abline(h=0)
abline(v=0)

```



Figur. Transkritisk bifurkasjonsdiagram for  $dx/dt=rx-x^2$  med  $r$  som uavhengig variabel og  $x$  avhengig variabel med faste punkter  $x=0$  og  $x=r$ . Transkritiske bifurkasjoner er ustabile. Vi skal se nærmere på dette i eksempel 7, hvor man legger til en imperfektparameter  $h$  hvor ligningen i dette tilfellet blir  $dx/dt=h+rx-x^2$ .

### Eksempel 3

Vi finner høygaffel-bifurkasjon for ligningen:

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x - x^3$$

Dette er en type som er vanlig hvis det er høyre-venstre symmetri i systemet, hvor faste punkter forekommer eller forsvinner som symmetriske par

```

x<-seq(-4,4,0.01)
r<-seq(-4,4,2)
funkt3<-outer(x,r,function(x,r)r*x-x^3)
par(bg="lightyellow")
matplot(x,funkt3,type="l",lwd=3,ylab="dx/dt",main=expression(r*x-x^3))
abline(h=0,col="green")
abline(v=0,col="green")

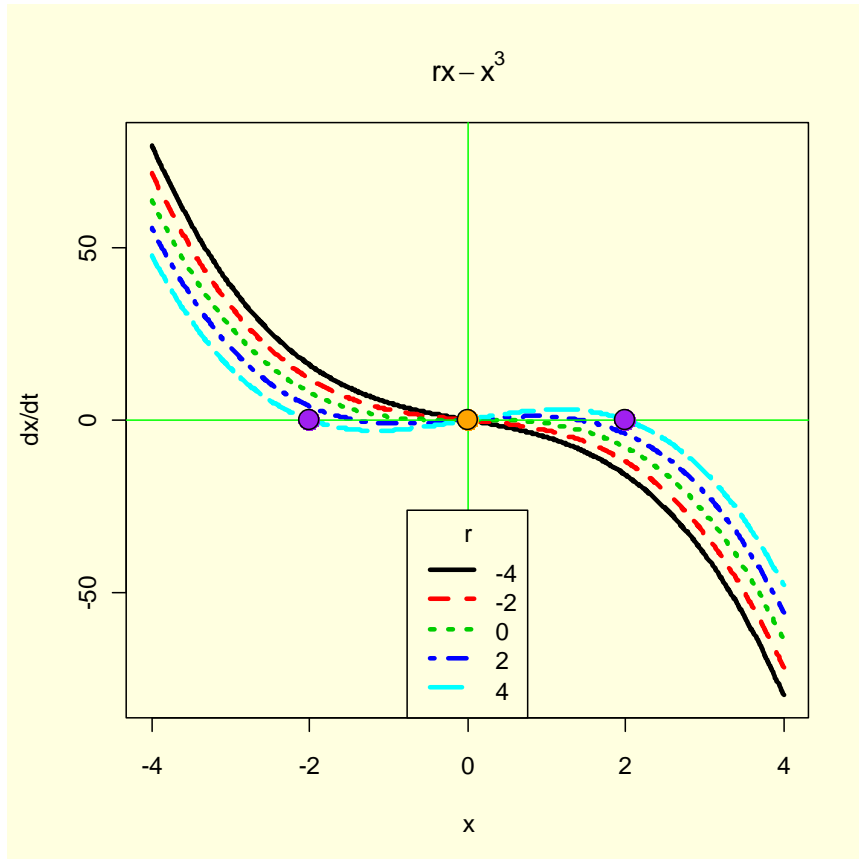
```

```

legend("bottom",as.character(r),title="r",lty=1:5,col=1:6,lwd=3)

require(rootSolve)
funkt3<-function(x,r=4)r*x-x^3
likevekt<- uniroot.all(funkt3,c(-4,4))
likevekt
points(likevekt,y<-rep(0,length(likevekt)),pch=21,cex=2,
bg=c("purple","orange"))

```



Figur. Funksjonen  $dx/dt=rx-x^3$  for forskjellige verdier av  $r$ . Likevektspunkter er satt inn for  $r=4$ , to stabile punkter ved  $x=-2$  og  $x=2$ , og et ustabil punkt for  $x=0$ . Fra vektorfeltene ser man at for  $r<0$  er det bare ett likevektspunkt og det er stablet, det samme gjelder for  $r=0$ , men allikvel mindre stablet enn for  $r<0$ . For  $r>0$  blir origo ustabil likevektspunkt, og det kommer to nye stabile likevektspunkter for  $x=\pm\sqrt{r}$

Bifurkasjonsdiagram:

```

require (rootSolve)
r2<- seq(-4,4,0.01)
par (bg="lightyellow")
plot(0,xlim=range(r2),ylim=c(-4,4),type="n",xlab="r",ylab="x",
main=expression(r*x-x^3))
stabilitet<-function (x)
{
rot<- uniroot.all(funkt3,c(-4,4),r=r)
eig<- vector()
for (i in 1:length(rot))
eig[i]<- sign(gradient(funkt3,rot[i],r=r))
return(list(rot=rot,eigen=eig))
}
for (r in r2) {
stab<- stabilitet(r)
points(rep(r,length(stab$rot)),stab$rot,pch=20,
col=c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2],

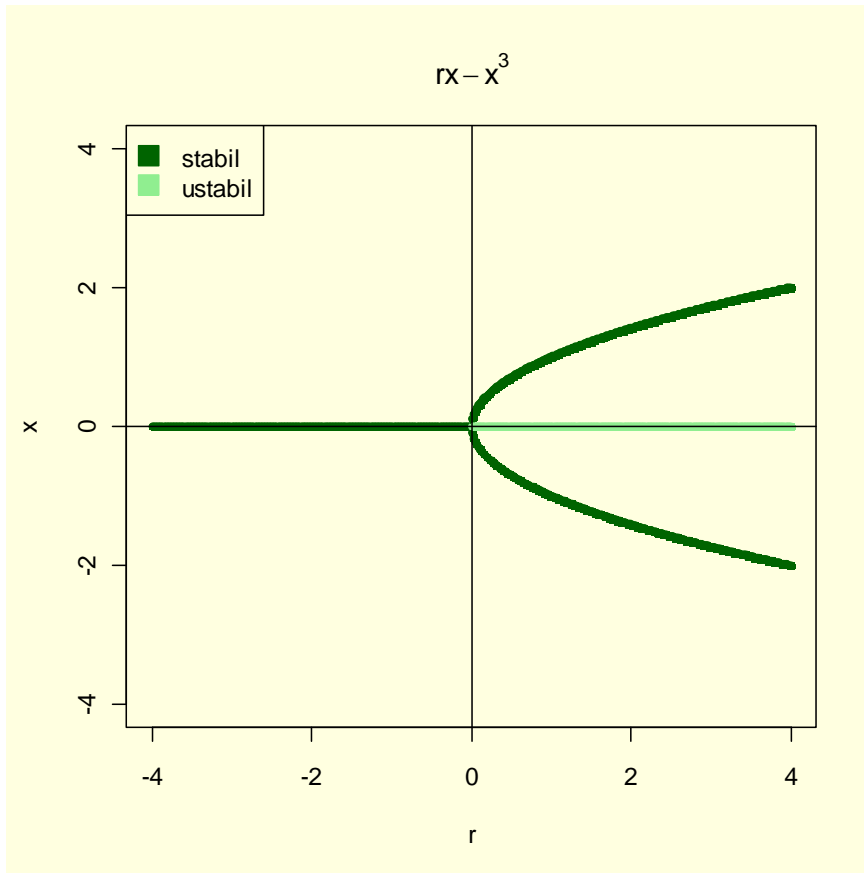
```



```

bg =c("darkgreen", "blue", "lightgreen") [stab$eigen+2]
}
legend("topleft", pch=22, pt.cex=2, c("stabil", "ustabil"),
col=c("darkgreen", "lightgreen"), pt.bg=c("darkgreen", "lightgreen"))
abline(h=0)
abline(v=0)

```



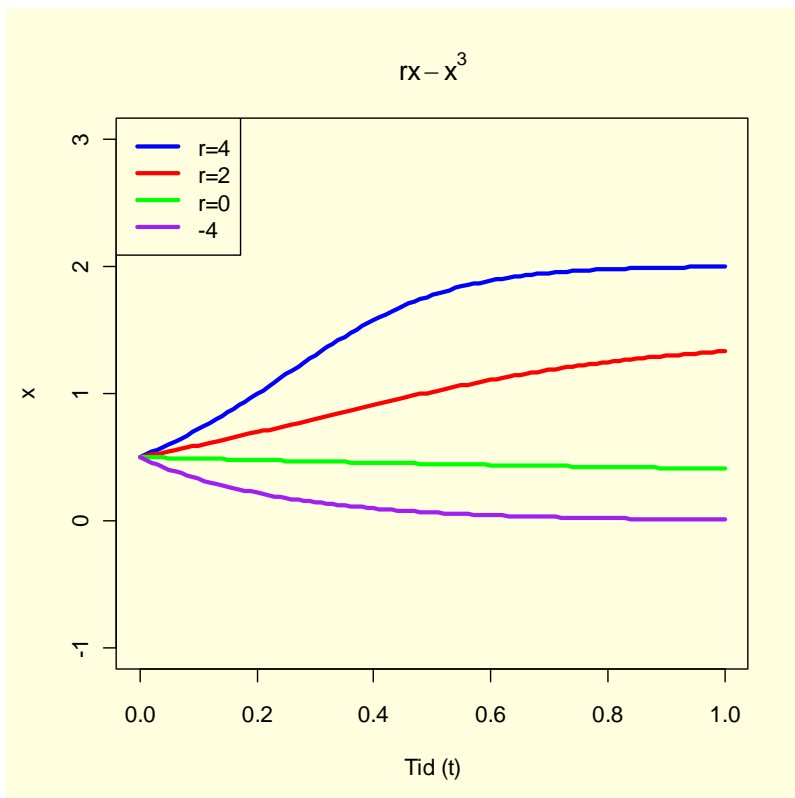
Figur. Høygaffel-bifurkasjonsdiagram for  $dx/dt=rx-x^3$ .

Vi løser  $dx/dt=rx-x^3$  numerisk:

```

library(deSolve)
params<-c(r=4)
funkt3b<-function(t,x,p)
{
dxdt<-p["r"]*x[1]-x[1]^3
list(dxdt)
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,1,0.01)
init.state<-0.5
out.state<-
as.data.frame(lsoda(init.state,out.time,funkt3b,params,rtol=1e-4))
par(bg="lightyellow")
plot(out.state[,1],out.state[,2],type="l",ylim=c(-1,3),xlim=c(0,1),lwd=3,xlab="Tid (t)",
ylab="x",col="blue",main=expression(rx-x^3))
#Sett inn andre verdier for r og plot linjer:
lines(out.state[,1],out.state[,2],lwd=3,col="red")
legend("topleft",c("r=4","r=2","r=0","r=-4"),lty=c(1,1,1,1),lwd=c(3,3,3,3),
col=c("blue","red","green","purple"))

```



Figur. Numerisk løsning av  $dx/dt=rx-x^3$  med initialverdi 0.5 og forskjellige verdier av  $r$ . Vi ser at for  $r=-4$  nås stabilitetspunktet  $x=0$ . For  $r>0$  blir stabiliteten ved  $\sqrt{r}$ , i tillegg er det et symmetrisk likevektspunkt ved  $-\sqrt{r}$ . Jfr. bifurkasjonsdiagrammet.

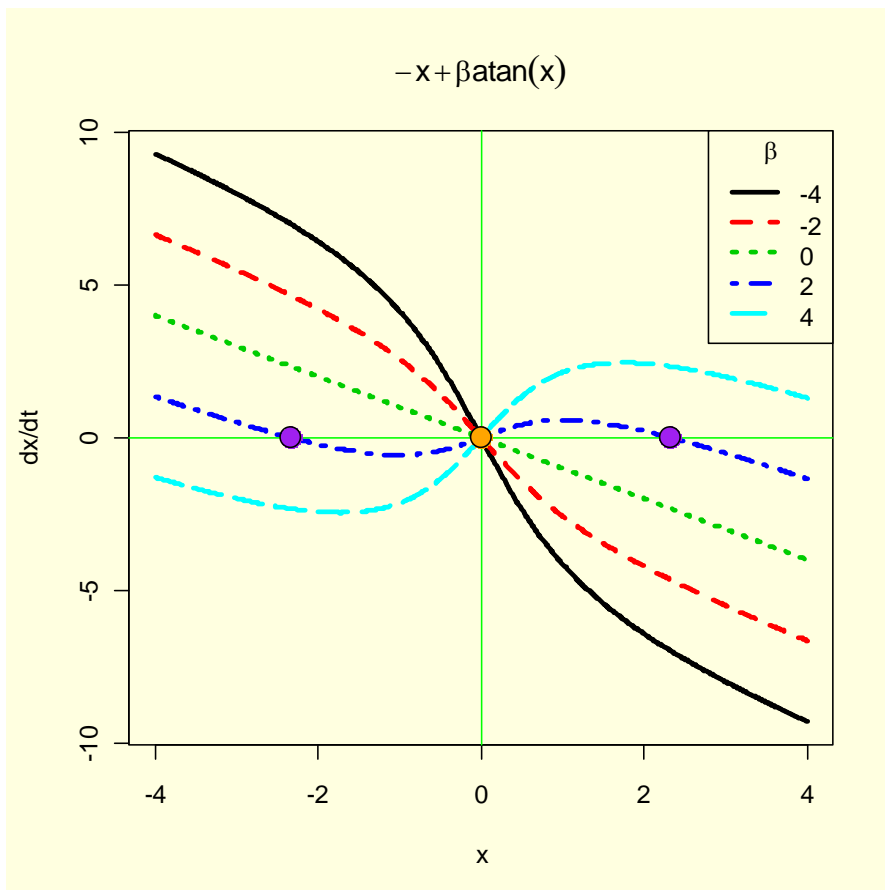
#### Eksempel 4:

Ligning med høygaffel-bifurkasjon:

$$\frac{dx}{dt} = -x + \beta \cdot \operatorname{atan}(x)$$

```
x<-seq(-4,4,0.01)
beta<-seq(-4,4,2)
funkt4<-outer(x,beta, function(x,beta)-x+beta*atan(x))
par(bg="lightyellow")
matplot(x,funkt4,type="l",lwd=3,ylab="dx/dt",main=expression(-x+beta*atan(x)))
abline(h=0,col="green")
abline(v=0,col="green")
legend("topright",as.character(beta),title=expression(beta),lty=1:5,col=1:6,lwd=3)

require(rootSolve)
funkt4<-function(x,beta=2)-x+beta*atan(x)
likevekt<-uniroot.all(funkt4,c(-4,4))
likevekt
points(likevekt,y<-rep(0,length(likevekt)),pch=21,cex=2,
bg=c("orange","purple","purple"))
```

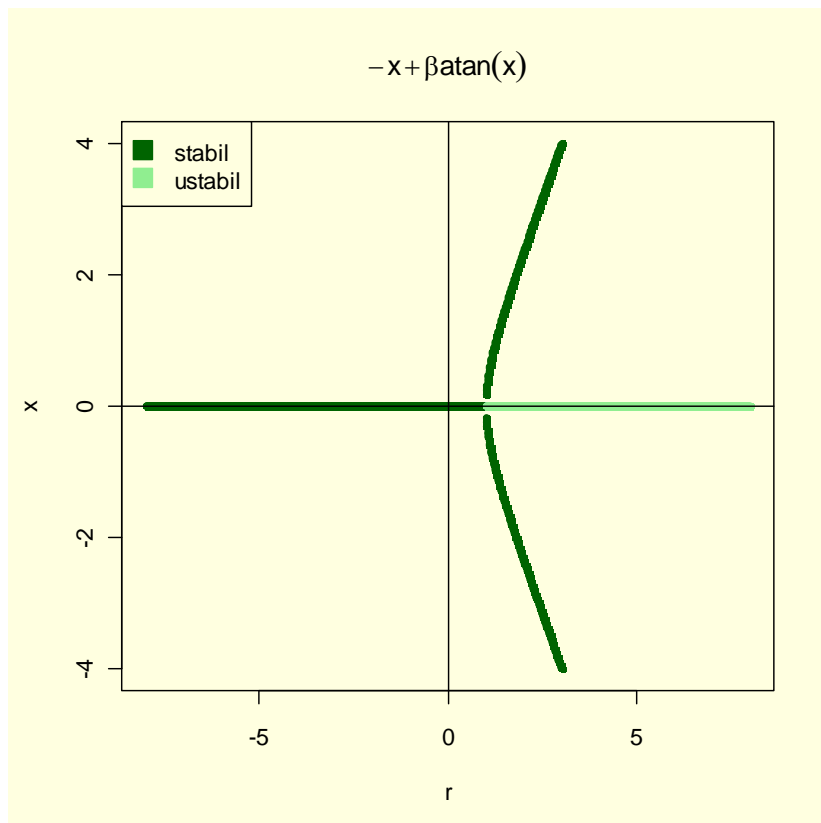


Figur. Vektordiagram for  $dx/dt = -x + \beta \cdot \text{atan}(x)$ .  
 Stabilitetspunkter for  $\beta = 2$ .  
 Bifurkasjonsdiagram:

```

require (rootSolve)
beta2<- seq(-8,8,0.01)
par (bg="lightyellow")
plot (0,xlim=range (beta2),ylim=c (-4,4),type="n",xlab="x",ylab="x",main=expression (-
x+beta*atan(x)))
stabilitet<-function (beta)
{
  rot<- uniroot.all (funkt4,c (-4,4),beta=beta)
  eig<- vector ()
  for (i in 1:length (rot))
  eig[i]<- sign (gradient (funkt4,rot[i],beta=beta))
  return (list (rot=rot,eigen=eig))
}
for (beta in beta2) {
  stab<- stabilitet (beta)
  points (rep (beta,length (stab$rot)),stab$rot,pch=20,
  col=c ("darkgreen","blue","lightgreen") [stab$eigen+2],
  bg =c ("darkgreen","blue","lightgreen") [stab$eigen+2])
}
legend ("topleft",pch=22,pt.cex=2,c ("stabil","ustabil"),
col=c ("darkgreen","lightgreen"),pt.bg=c ("darkgreen","lightgreen"))
abline (h=0)
abline (v=0)

```



Figur. Høygaffel-bifurkasjonsdiagram for  $dx/dt = -x + \beta \cdot \operatorname{atan}(x)$ .

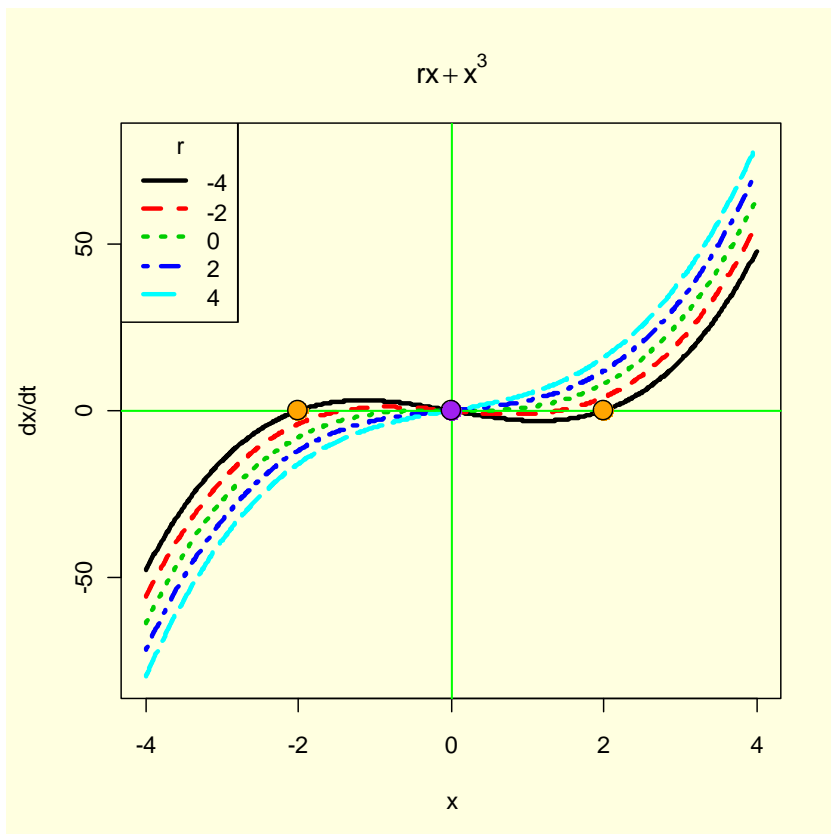
## Eksempel 5

Vi har ligningen hvor vi i stedet har pluss det kubiske leddet, i motsetning til eksempel 3:

$$\frac{dx}{dt} = r * x + x^3$$

```
x<-seq(-4,4,0.01)
r<-seq(-4,4,2)
funkt5<-outer(x,r, function(x,r) r*x+x^3)
par(bg="lightyellow")
matplot(x,funkt5,type="l",lwd=3,ylab="dx/dt",main=expression(r*x+x^3))
abline(h=0,col="green")
abline(v=0,col="green")
legend("topleft",as.character(r),title="r",lty=1:5,col=1:6,lwd=3)

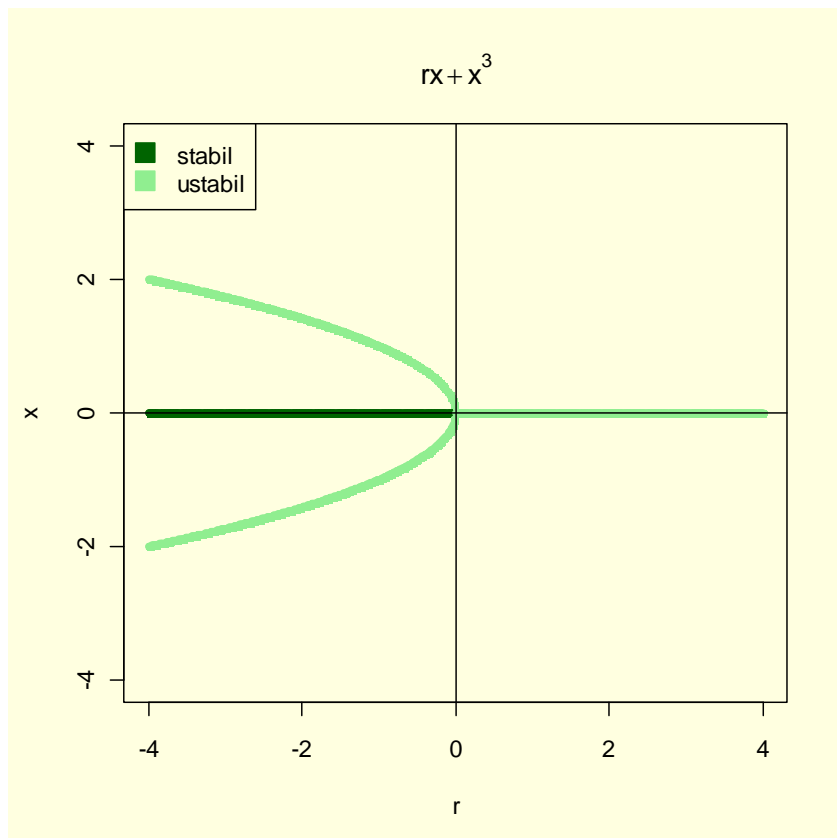
require(rootSolve)
funkt5<-function(x,r=-4) r*x+x^3
likevekt<- uniroot.all(funkt5,c(-4,4))
likevekt
points(likevekt,y<-rep(0,length(likevekt)),pch=21,cex=2,
bg=c("orange","purple"))
```



Figur. Vektordiagram for  $dx/dt=rx+x^3$ . Stabilitetspunkter for  $r=-4$  er satt inn. Origo er stabil bare for  $r<0$ . For  $r>0$  er origo ustabil.

Bifurkasjonsdiagram:

```
require (rootSolve)
r2<- seq(-4,4,0.01)
par(bg="lightyellow")
plot(0,xlim=range(r2),ylim=c(-4,4),type="n",xlab="r",ylab="x",
main=expression(r*x+x^3))
stabilitet<-function (r)
{
rot<- uniroot.all(funk5,c(-4,4),r=r)
eig<- vector()
for (i in 1:length(rot))
eig[i]<- sign(gradient(funk5,rot[i],r=r))
return(list(rot=rot,eigen=eig))
}
for (r in r2) {
stab<- stabilitet(r)
points(rep(r,length(stab$rot)),stab$rot,pch=20,
col=c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2],
bg =c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2])
}
legend("topleft",pch=22,pt.cex=2,c("stabil","ustabil"),
col=c("darkgreen","lightgreen"),pt.bg=c("darkgreen","lightgreen"))
abline(h=0)
abline(v=0)
```



Figur. Høygaffel-bifurkasjonsdiagram for  $dx/dt=rx+x^3$ . Vi ser at systemet er ustabil for  $r>0$  og det er ustabil for  $x=\pm\sqrt{r}$ , altså et massivt ustabil system.

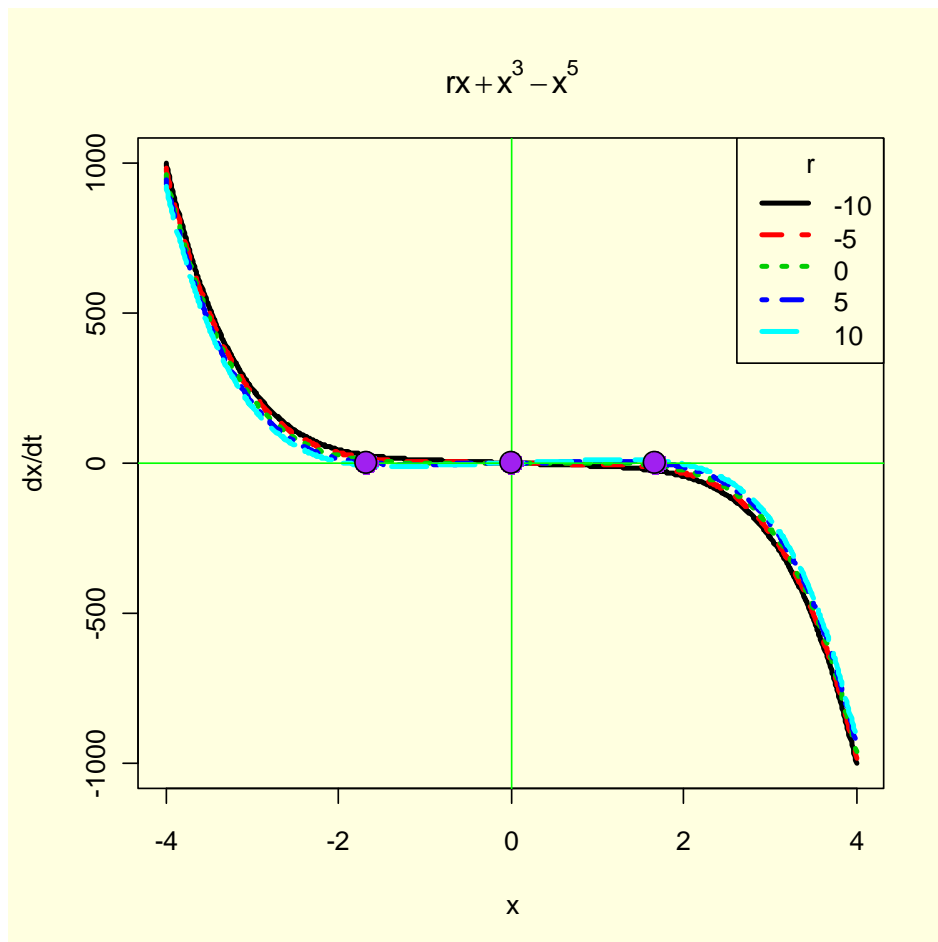
## Eksempel 6

Vi så i eksempel 5 et massivt ustabil system, og skal dette stabiliseres må det inn et stabiliserende ledd e.g.  $x^5$ .

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x + x^3 - x^5$$

```
x<-seq(-4,4,0.01)
r<-seq(-10,10,5)
funkt6<-outer(x,r, function(x,r) r*x+x^3-x^5)
par(bg="lightyellow")
matplot(x,funkt6,type="l",lwd=3,ylab="dx/dt",main=expression(r*x+x^3-x^5))
abline(h=0,col="green")
abline(v=0,col="green")
legend("topright",as.character(r),title="r",lty=1:5,col=1:6,lwd=3)

require(rootSolve)
funkt6<-function(x,r=5) r*x+x^3-x^5
likevekt<- uniroot.all(funkt6,c(-4,4))
likevekt
points(likevekt,y<-rep(0,length(likevekt)),pch=21,cex=2,
bg=c("purple","purple"))
```

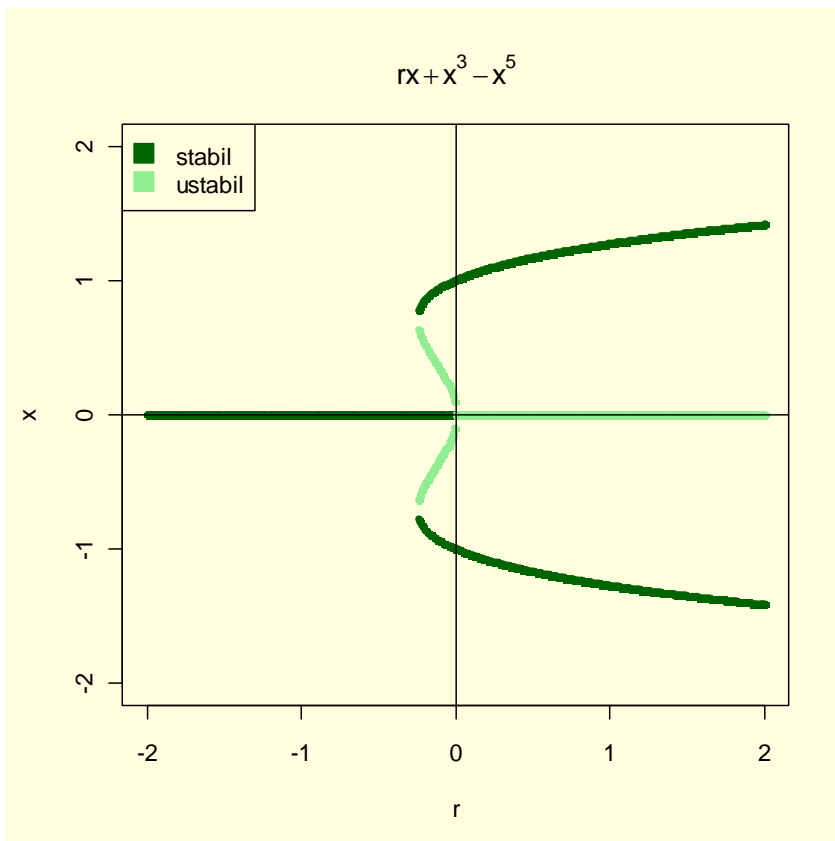


Figur. Vektordiagram for  $dx/dt=rx+x^3-x^5$ , med stabilitetspunkter for  $r=5$

På bifurkasjonsdiagrammet ser vi at vi har en bistabilitet:

```
require (rootSolve)
r2<- seq(-2,2,0.01)
par(bg="lightyellow")
plot(0,xlim=range(r2),ylim=c(-2,2),type="n",xlab="r",ylab="x",
main=expression(r*x+x^3-x^5))
stabilitet<-function (x)
{
rot<- uniroot.all(funk6,c(-2,2),r=r)
eig<- vector()
for (i in 1:length(rot))
eig[i]<- sign(gradient(funk6,rot[i],r=r))
return(list(rot=rot,eigen=eig))
}
for (r in r2) {
stab<- stabilitet(r)
points(rep(x,length(stab$rot)),stab$rot,pch=20,
col=c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2],
bg =c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2])
}
legend("topleft",pch=22,pt.cex=2,c("stabil","ustabil"),
col=c("darkgreen","lightgreen"),pt.bg=c("darkgreen","lightgreen"))
abline(h=0)
abline(v=0)
```

a



Figur. Høygaffel-bifurkasjonsdiagram for  $dx/dt=rx+x^3-x^5$  og som viser bistabilitet. Origo er stabilt for  $r<0$ . Det blir en bifurkasjon med to bakovervendende greiner når  $r<0$ . De greinene er ustabile for noen verdier av  $r$ , men når  $r$  blir større enn en bestemt verdi blir de stabile. Dette gir mulighet for bistabile tilstander. Samtidig er det også mulig at systemet skifter fra den ene stabile tilstanden til den andre, men uten mulighet å komme tilbake til det opprinnelige. Et slikt system viser **hysteresese**. Bistabile tilstander er viktige innen økologi.

## Eksempel 7

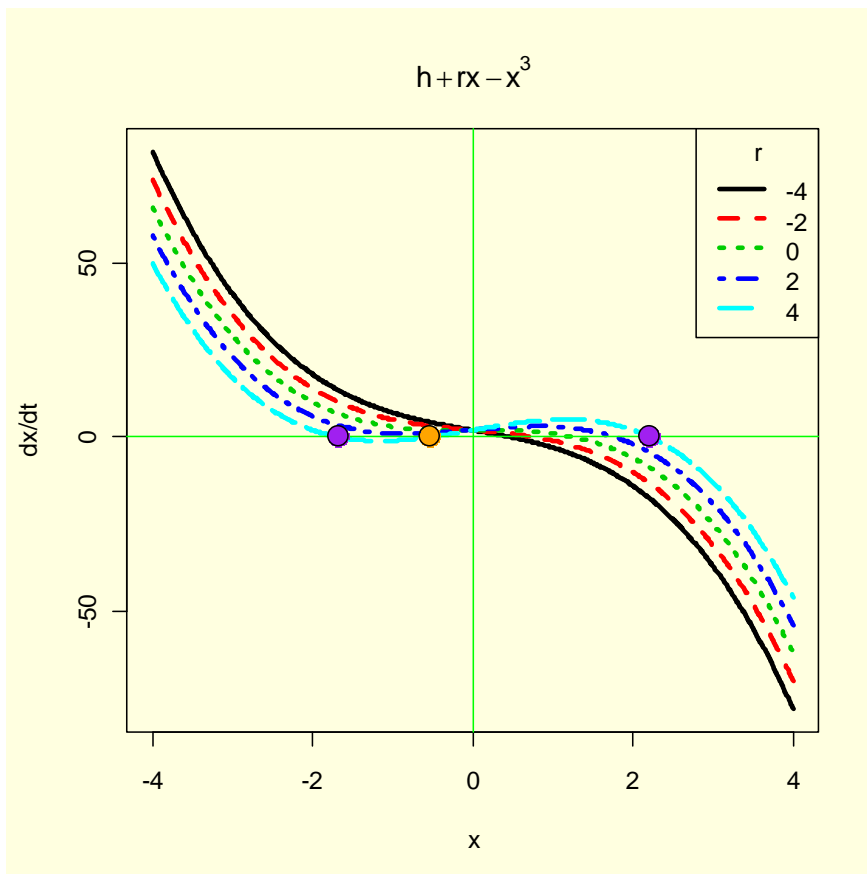
Følgende ligning gir bistabile tilstander hvor  $h$  er en **imperfektparameter**. Hvis  $h=0$  blir det vanlig høygaffel-bifurkasjon.

$$\frac{dx}{dt} = h + r \cdot x - x^3$$

```
x<-seq(-4,4,0.01)
r<-seq(-4,4,2)
h<-2
funkt7<-outer(x,r, function(x,r)h+r*x-x^3)
par(bg="lightyellow")
matplot(x,funkt7,type="l",lwd=3,ylab="dx/dt",main=expression(h+r*x-x^3))
abline(h=0,col="green")
abline(v=0,col="green")
legend("topright",as.character(r),title="r",lty=1:5,col=1:6,lwd=3)

require(rootSolve)
funkt7<-function(x,r=4)h+r*x-x^3
likevekt<- uniroot.all(funkt7,c(-4,4))
likevekt
points(likevekt,y<-rep(0,length(likevekt)),pch=21,cex=2,
bg=c("purple","orange","purple"))
```

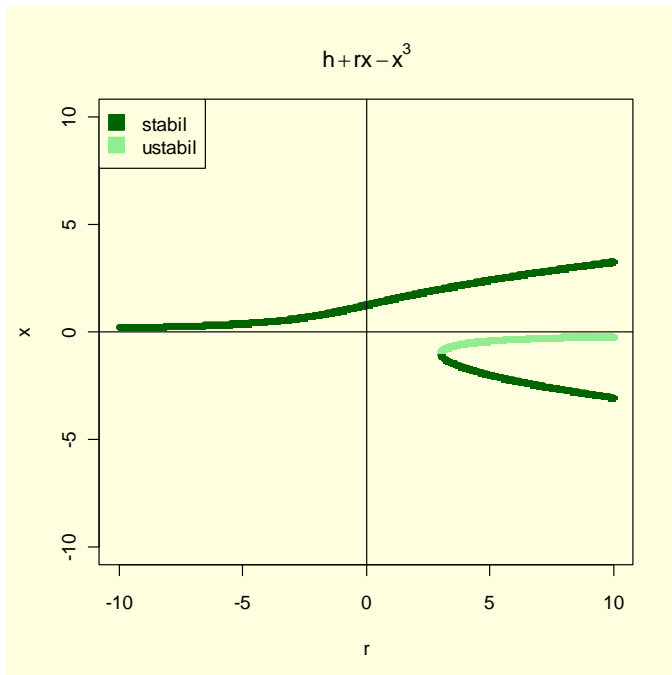




Figur. Vektordiagram for  $dx/dt=h+rx-x^3$  med  $h=2$  og varierende verdier av  $r$ . Likevektspunkter innsatt for  $r=4$

Bifurkasjonsdiagram for  $h=2$  (For  $h=0$  blir det vanlig høygaffel-bifurkasjon som i eksempel )

```
require (rootSolve)
r2<- seq(-10,10,0.01)
h<-2
par(bg="lightyellow")
plot(0,xlim=range(r2),ylim=c(-10,10),type="n",xlab="r",ylab="x",
main=expression(h+r*x-x^3))
stabilitet<-function (r)
{
rot<- uniroot.all(funk7,c(-10,10),r=r)
eig<- vector()
for (i in 1:length(rot))
eig[i]<- sign(gradient(funk7,rot[i],r=r))
return(list(rot=rot,eigen=eig))
}
for (r in r2) {
stab<- stabilitet(r)
points(rep(r,length(stab$rot)),stab$rot,pch=20,
col=c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2],
bg =c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2])
}
legend("topleft",pch=22,pt.cex=2,c("stabil","ustabil"),
col=c("darkgreen","lightgreen"),pt.bg=c("darkgreen","lightgreen"))
abline(h=0)
abline(v=0)
```

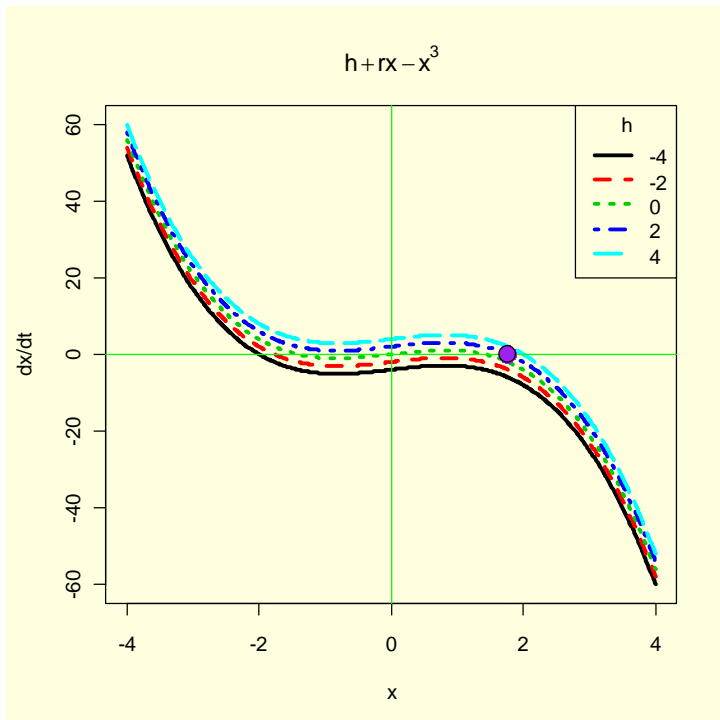


Figur. Bifurkasjonsdiagram for  $dx/dt=h+rx-x^3$  for  $h=2$ . Hvis imperfektparameteren  $h$  er forskjellig fra 0 endrer høygaffelbifurkasjonen seg til en øvre stabil tilstand og en nedre som består av både stabil og ustabil tilstand.

Vi kan holde  $r$  fast og endre  $h$ :

```
x<-seq(-4,4,0.01)
h<-seq(-4,4,2)
r<-2
funkt7b<-outer(x,h, function(x,h) h+r*x-x^3)
par(bg="lightyellow")
matplot(x,funkt7b,type="l",lwd=3,ylab="dx/dt",main=expression(h+r*x-x^3))
abline(h=0,col="green")
abline(v=0,col="green")
legend("topright",as.character(h),title="h",lty=1:5,col=1:6,lwd=3)

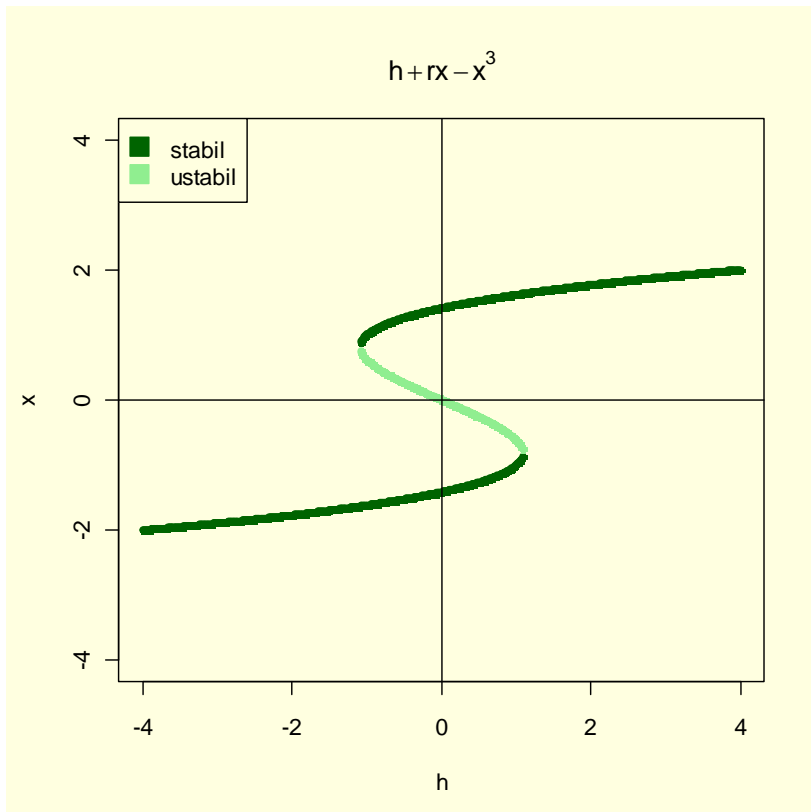
require(rootSolve)
funkt7b<-function(x,h=2) h+r*x-x^3
likevekt<- uniroot.all(funkt7b,c(-4,4))
likevekt
points(likevekt,y<-rep(0,length(likevekt)),pch=21,cex=2,
bg=c("purple","orange","purple"))
```



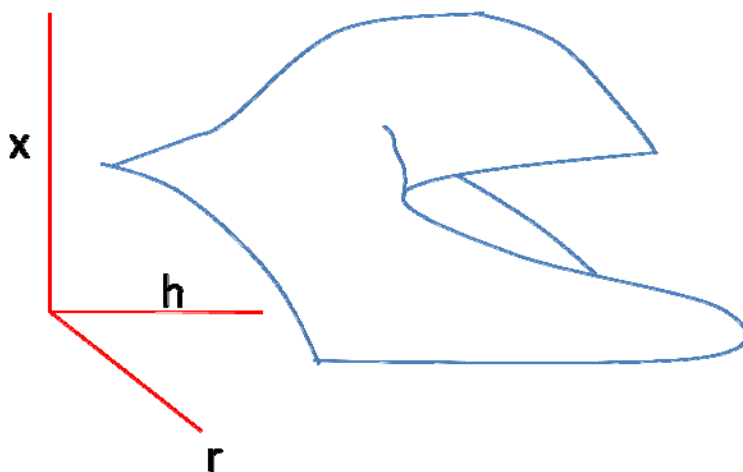
Figur. Den deriverte som funksjon av  $x$  for  $dx/dt=h+rx-x^3$  hvor  $r=2$  med forskjellige verdier av  $h$ . Likvektspunkt for  $h=2$

Vi ser på bifurkasjonsdiagram med varierende  $h$  og  $r=2$

```
require (rootSolve)
h2<- seq(-4,4,0.01)
r<-2
par(bg="lightyellow")
plot(0,xlim=range(h2),ylim=c(-4,4),type="n",xlab="h",ylab="x",
main=expression(h+r*x-x^3))
stabilitet<-function (h)
{
rot<- uniroot.all(funk7b,c(-4,4),h=h)
eig<- vector()
for (i in 1:length(rot))
eig[i]<- sign(gradient(funk7b,rot[i],h=h))
return(list(rot=rot,eigen=eig))
}
for (h in h2) {
stab<- stabilitet(h)
points(rep(h,length(stab$rot)),stab$rot,pch=20,
col=c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2],
bg =c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2])
}
legend("topleft",pch=22,pt.cex=2,c("stabil","ustabil"),
col=c("darkgreen","lightgreen"),pt.bg=c("darkgreen","lightgreen"))
abline(h=0)
abline(v=0)
```



Figur. Bifurkasjonsdiagram for  $dx/dt=h+rx-x^3$  hvor  $r=2$ .



Flaten folder seg over seg selv og gir mulighet for bistabile tilstander.

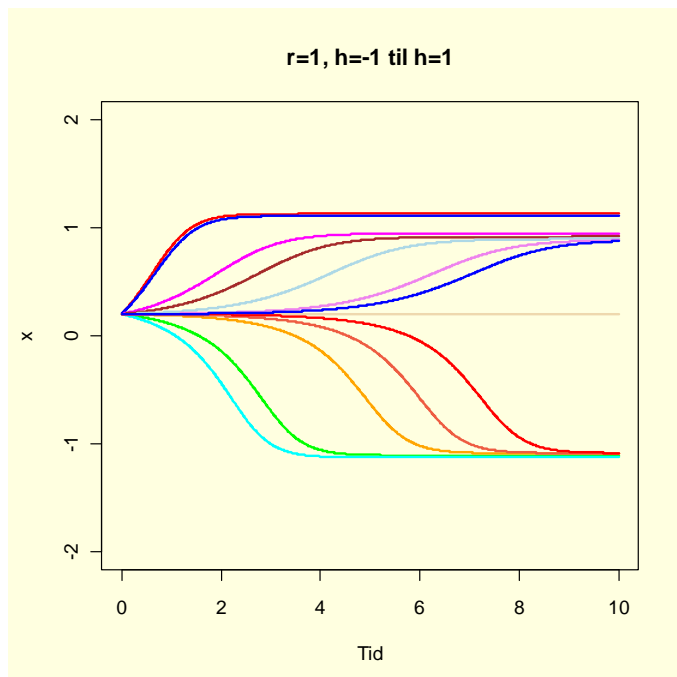
Vi ser på numerisk løsning av ligningen:

```
#Halvor Aarnes
library(deSolve)
params<-c(r=0.1,h=0)
eksp<-function(t,x,p)
{
  dxdt<-p["h"]+p["r"]*x[1]-x[1]^3
  list(dxdt)
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,10,0.01)
init.state<-0.5
```

```

out.state<-as.data.frame(lsoda(init.state,out.time,eksp,params,rtol=1e-4))
par(bg="lightyellow")
plot(out.state[,1],out.state[,2],type="n",col="blue",xlab="Tid",ylab="x")
lines(out.state[,1],out.state[,2],col="blue",lwd=3)

```



Figur.  $R=1$ ,  $h$  varierer fra  $h=-1$  til  $h=1$ . I området  $h=-0.193$  til  $h=-0.191$  er det en svitsj i bistabilitet. Denne brå skiftningen kan gi en katastrofetilstand når systemet vipper over.

## Eksempel 8

Ludwig og medarbeidere (*J. Animal Ecology* 47(1978)315-322) studerte hvordan et insekt angrep grantrær i N-Amerika. Endringen i antall insekter over tid  $dN/dt$  kunne modelleres som den logistiske ligningen med tetthetsavhengig vekst minus dødeligheten av insektet, hvor  $\beta$  er maksimal dødelighet og  $h$  er halvmettet tetthet :

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \beta \cdot \frac{N^2}{N^2 + h^2}$$

Vi lager en grafisk framstilling  $N$  versus  $dN/dt$  ved forskjellige verdier av  $r$ , og bestemmer etterpå likevektspunktene for  $r=0.05$  (etter Soetart & Herman 2009)

```

K=10
beta=0.1
h=1
N<-seq(0,10,0.01)
r<-seq(0.01,0.1,0.02)
insekt<-outer(N,r,function(N,r) r*N*(1-N/K)-beta*(N^2/(N^2+h^2)))
par(bg="lightyellow")
matplot(N,insekt,type="l",lwd=3,ylab="dN/dt")
legend("topright",as.character(r),title="r",lty=1:5,col=1:6,lwd=3)
abline(h=0)

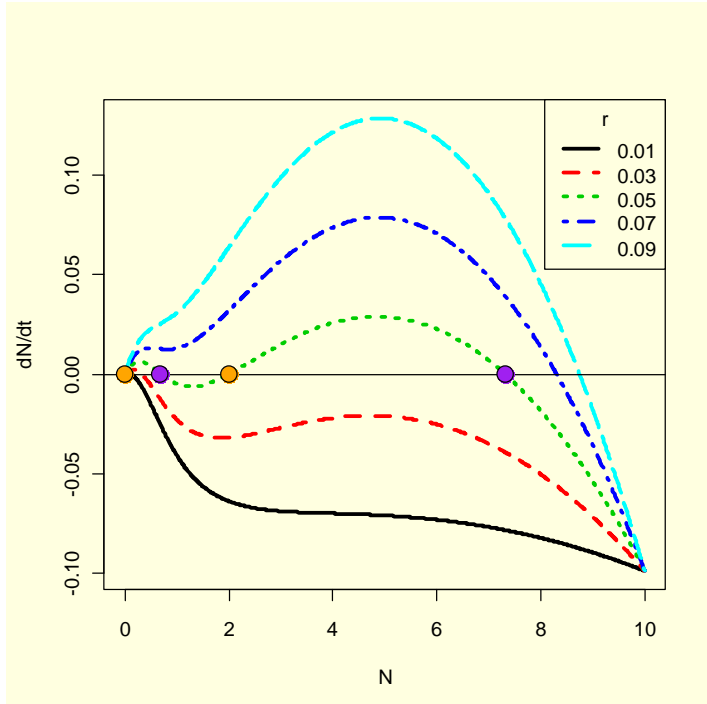
```

Vi må laste inn biblioteket rootSolve laget av Karline Soetaert

```
library(rootSolve)
library(help=rootSolve)
Kommandoen uniroot.all finner røttene til en ligning:
require(rootSolve)
funksjon<-function(N,r=0.05) r*N*(1-N/K) -beta*(N^2/(N^2+h^2))
likevekt<- uniroot.all(funksjon,c(0,10))
likevekt
[1] 0.0000000 2.0000000 0.6833743 7.3166248
```

Vi plotter likevektspunktene hvor oransje er ustabil likevekt og purpur er stabil likevekt:

```
points(likevekt,y<-rep(0,length(likevekt)),pch=21,cex=2,
bg=c("orange","orange","purple","purple"))
```



Figur. For  $r=0.05$  er likevektspunktene plottet inn. Når man beveger seg langs x-aksen vil man for  $dN/dt > 0$  (kurven befinner seg over aksen) bevege seg mot høyre, og når  $dN/dt < 0$  beveger man seg mot venstre. Ved å tegne piler for bevegelsesretningene ser man at de fiolette punktene blir stabile, og de oransje er ustabile.

Vi kan finne Jacobi-matrisen med kommandoen **gradient**. Siden det er bare en ligning blir Jacobimatrisen bare ett tall

```
for(i in 1:length(likevekt)){
jakobi<-gradient(funksjon,likevekt[i])
}
jakobi
```

```
      [,1]
[1,] -0.02365831
```

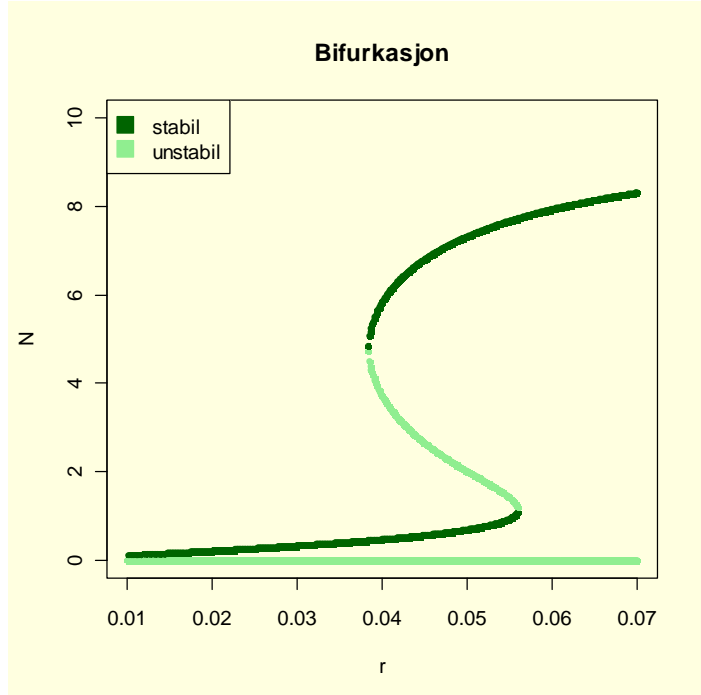
Vi kan deretter lage et bifurkasjonsdiagram (jfr. R-manual rootSolve):

```
r2<- seq(0.01,0.07,0.0001)
plot(0,xlim=range(r2),ylim=c(0,10),type="n",xlab="r",ylab="N",main="Bifurkasjon")
stabilitet<-function(r)
{
rot<- uniroot.all(funksjon,c(0,10),r=r)
eig<- vector()
```

```

for (i in 1:length(rot))
eig[i]<- sign(gradient(funksjon,rot[i],r=r))
return(list(rot=rot,eigen=eig))
}
for (r in r2) {
stab<- stabilitet(r)
points(rep(r,length(stab$rot)),stab$rot,pch=20,
col=c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2],
bg =c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2])
}
legend("topleft",pch=22,pt.cex=2,c("stabil","unstabil"),
col=c("darkgreen","lightgreen"),pt.bg=c("darkgreen","lightgreen"))

```



Figur. Bifurkasjonsdiagram. Det faste punktet hvor  $N=0$  blir alltid ustabil, i en situasjon hvor insektpopulasjonen er meget liten og veksten er eksponensiell nær 0.

Det andre likvektspunktet blir når  $rN(1-N/K) = \beta \cdot (N^2 / (N^2 + h^2))$ . Det blir to stabile tilstander: et refugium hvor insektpopulasjonen er lav og en tilstand med mange insekter i et masseutbrudd. Mellom disse er det en ustabil tilstand hvor det er to muligheter for bistabilitet: ikke utbrudd og utbrudd.

## Eksempel 9

### Oscillator

En ligning som gir oscillasjoner og som brukes til å beskrive sykliske svingninger (bioluminiscens, cirkadiske rytmer etc.) er:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - b \cdot \sin\theta$$

```

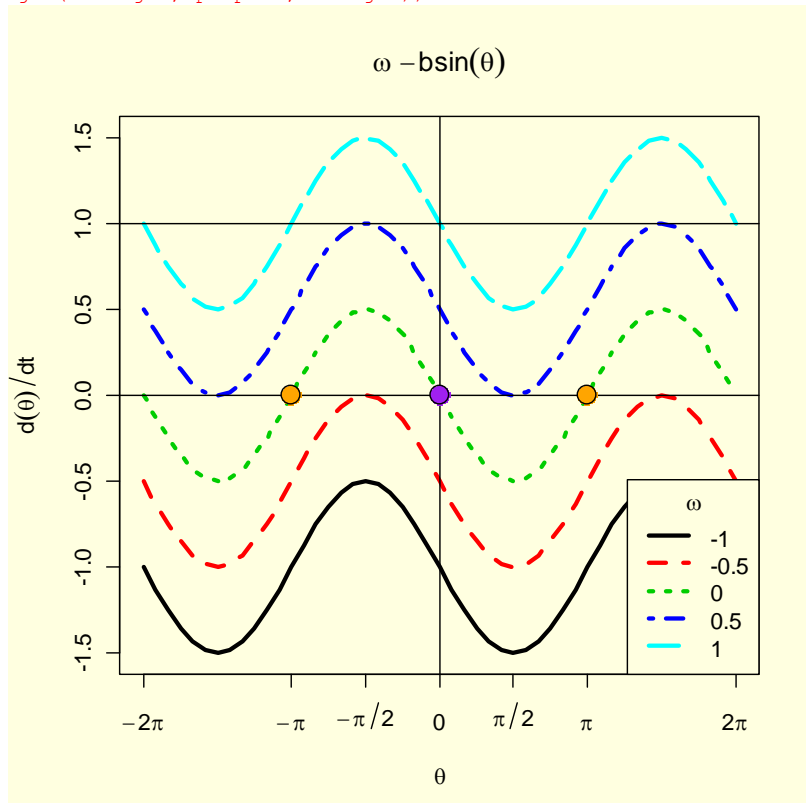
theta<-seq(-2*pi,2*pi,pi/12)
omega<-seq(-1,1,0.5)
b<-0.5
oscill<-outer(theta,omega,function(theta,omega)omega - b*sin(theta))
par(bg="lightyellow")

```

```

matplot(theta,oscill,type="l",lwd=3,ylab=expression(d(theta)/dt),xlab=expression(theta),
xaxt="n",main=expression(omega-b*sin(theta)))
abline(h=0)
abline(v=0)
abline(h=1)
axis(1,at=c(-2*pi,-pi,-pi/2,0,pi/2,pi,2*pi),labels=expression(-2*pi,-pi,-
pi/2,0,pi/2,pi,2*pi))
legend("bottomright",as.character(omega),title=expression(omega),lty=1:5,col=1:6,lwd=3)
Setter inn likevektspunkter for  $\omega=0$ 
require(rootSolve)
b<-0.5
oscillb<-function(theta,omega=0)omega - b*sin(theta)
likevekt<- uniroot.all(oscillb,c(-2*pi,2*pi))
likevekt
points(likevekt,y<-rep(0,length(likevekt)),pch=21,cex=2,
bg=c("orange","purple","orange"))

```



Figur. Den deriverte  $d\theta/dt$  som funksjon av  $\theta$  for ligningen  $d\theta/dt = \omega - b \cdot \sin\theta$  med  $b=0.5$  og forskjellige verdier av  $\omega$ . Kurvene viser sykliske svingninger og skjærer y-aksen ved  $\omega$  og amplituden er  $2 \cdot b$ . Det er satt inn likevektspunkter for  $\omega=0$ , stabile (purpur) og ustabile (oransje). For  $\omega=0.5$  (blå linje) blir det bare ett likevektspunkt og det er ustabilit (ikke vist på figuren)

```

require(rootSolve)
b<-0.5
oscillb<-function(theta,omega=0)omega - b*sin(theta)
likevekt<- uniroot.all(oscillb,c(-2*pi,2*pi))
likevekt
points(likevekt,y<-rep(0,length(likevekt)),pch=21,cex=2,
bg=c("orange","purple","orange"))

```

Vi finner likevektspunktene:

```

require (rootSolve)
b<-0.5

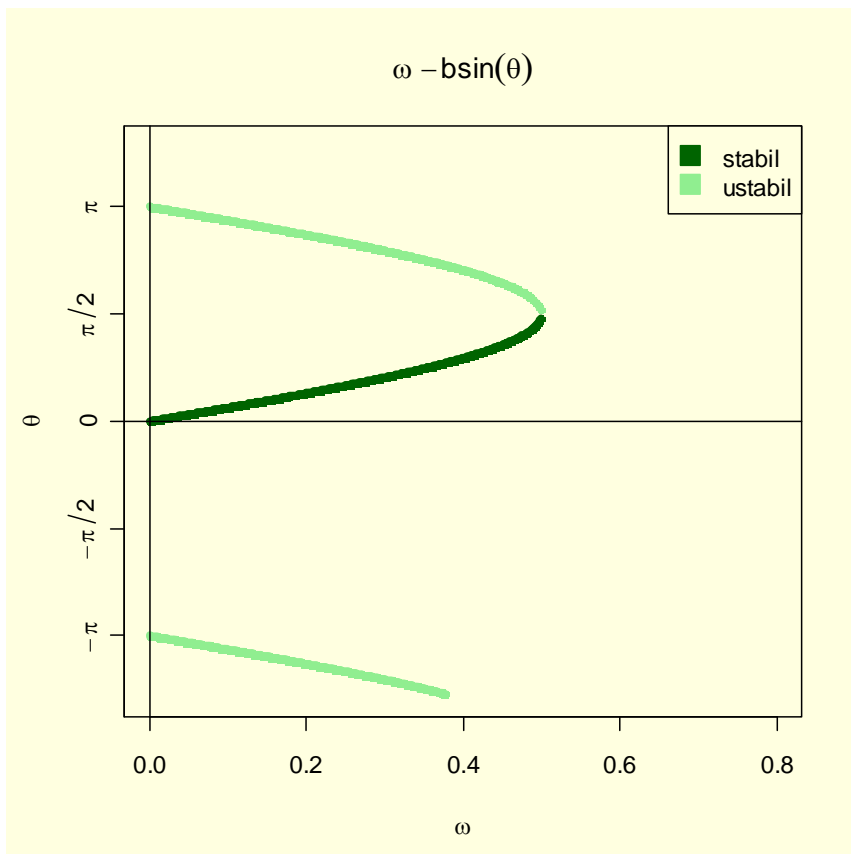
```



```

oscillb<-function(theta,omega=0)omega - b*sin(theta)
omega2<- seq(0,0.8,0.001)
par(bg="lightyellow")
plot(0,xlim=range(omega2),ylim=c(-4,4),yaxt="n",type="n",xlab=expression(omega),ylab=expression(theta),
main=expression(omega-b*sin(theta)))
stabilitet<-function (omega)
{
rot<- uniroot.all(oscillb,c(-4,4),omega=omega)
eig<- vector()
for (i in 1:length(rot))
eig[i]<- sign(gradient(oscillb,rot[i],omega=omega))
return(list(rot=rot,eigen=eig))
}
for (omega in omega2) {
stab<- stabilitet(omega)
points(rep(omega,length(stab$rot)),stab$rot,pch=20,
col=c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2],
bg =c("darkgreen","blue","lightgreen")[stab$eigen+2])
}
axis(2,at=c(-2*pi,-pi,-pi/2,0,pi/2,pi,2*pi),
labels=expression (-2*pi,-pi,-pi/2,0,pi/2,pi,2*pi))
legend("topright",pch=22,pt.cex=2,c("stabil","ustabil"),
col=c("darkgreen","lightgreen"),pt.bg=c("darkgreen","lightgreen"))
abline(h=0)
abline(v=0)

```



Figur. Bifurkasjonsdiagram for  $dx/dt = \omega - b \cdot \sin \theta$  for  $b = 0.5$ . Systemet er stabilt når  $\omega$  er mellom 0 og  $\pi/2$ .

Eksempel 10

## Pendel

Newtons mekanikk ble videreutviklet av den irske fysiker, matematiker og astronomen William Rowan Hamilton (1805–1865),

kalt **Hamiltonsk mekanikk** som omhandler posisjon og moment. Der hvor Lagrange opererte med andre ordens differensialligninger fikk Hamilton to første ordens diffligninger.

Vi har et Hamilton system med en **Hamilton funksjon**

$H(x(t), y(t))$  hvis det for et todimensjonalt ligningssystem:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

finnes en Hamilton funksjon  $H$  slik at:

$$f(x, y) = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$$

og

$$g(x, y) = \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

Et Hamilton system er todimensjonalt uten friksjon og bevarer en konstant energi (ingen energidissipasjon), det er tidsreversibelt slik at man operere med både  $t$  og  $-t$ .

En enkel pendel er et idealisert eksempel, har masse  $m$  som henger i en fast stav uten masse med lengde  $L$ , som kan svinge i en friksjonsløst om aksene i en sirkelform, påvirket nedover av tyngdens aksellerasjon  $g$  (gravitasjonskonstanten). Vinkelen i forhold til pendelen henger rett ned er  $\theta$  (radianer). Pendelen er i en stabil likevekt når pendelen henger rett ned og en ustabil likevekt når pendelen står rett opp. Pendelbevegelsen kan beskrives av:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \sin\theta = 0$$

Vinkelmomentet  $p$  er lik:

$$p = m \cdot L^2 \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Vi regne om ved å la frekvensen  $\omega$  være:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

og med en dimensjonsløs tid  $\omega t$  blir ligningen:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin\theta = 0$$

Ved bruk av vinkelhastigheten  $v$  til massen ( $v = d\theta/dt$ ) og Hamilton-ligningene har vi

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$

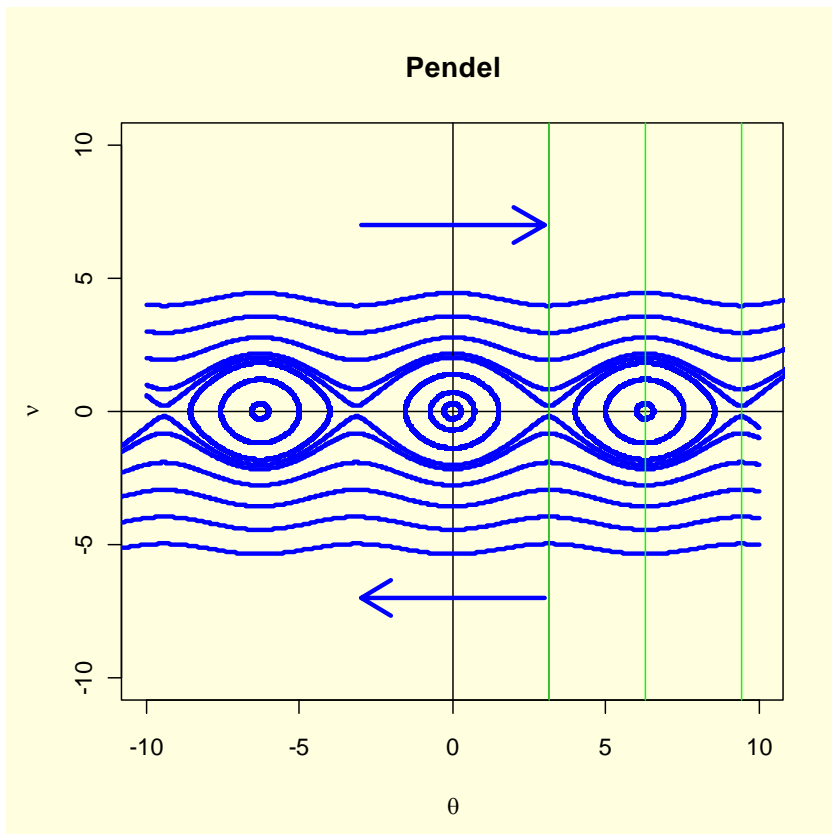
$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 \cdot \sin\theta$$

Det er en myte at Galileo Galilei (1564-1642) lot seg inspirere til studiet av pendelbevegelse fra den hengende kandelaberen i katedralen i Pisa.

```

params<-
revers<-function(t,x,p)
{
dxdt<-x[2]
dydt<--sin(x[1])
list(c(dxdt,dydt))
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,100,0.01)
init.state<-c(10,-1)
out.state<-lsoda(init.state,out.time,revers,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(out.state[,2],out.state[,3],type="n",ylim=c(-10,10),xlim=c(-10,10),ylab=expression(nu),
xlab=expression(theta),main="Pendel")
lines(out.state[,2],out.state[,3],col="blue",lwd=3)
abline(h=0)
abline(v=0)
arrows(-3,7,3,7,col="blue",lwd=3)
arrows(3,-7,-3,-7,col="blue",lwd=3)
abline(v=pi,col="green")
abline(v=2*pi,col="green")
abline(v=3*pi,col="green")
#Sett inn forskjellige verdier for init.state,bruk out.state og lines

```



Figur. Faseportrett for en enkel pendel  $dx/dt = y$  og  $dy/dt = -g \sin x$  for  $g=1$ . Vinkelen  $\theta$  kan istedet uttrykkes i  $\pi$ -enheter, og grønne vertikale streker er innsatt for henholdsvis  $\pi, 2\pi$  og  $3\pi$ . Vi får altså stabile eller ustabile likevektspunkter ved  $(k \cdot \pi, 0)$  hvor  $k$  er et heltall. Ustabil likevekt har vi når pendelen står rett opp. Punktene på x-aksen inne i sirkler er stabile punkter hvor pendelen henger rett ned. Pilene viser faseretningen.

Eksempel 11

## Enkel harmonisk oscillator

En masse  $m$  i form av et lodd som henger i en fjær (uten masse) med fjærkonstant  $k$  er eksempel på en **enkel harmonisk oscillator**. Vekta ( $w$ ) av loddet er lik massen ganger tyngdens aksellerasjon  $g$ . En harmonisk bevegelse kan beskrives av **amplitude** som er den maksimale forflytningen av det oscillerende legeme vekk fra likevekt. En oscillasjon fram og tilbake til utangspunktet er en **syklus**. Perioden  $T$  er tiden det tar å fullføre en syklus. Frekvensen  $f$  av oscillasjonen er antall sykluser per sekund målt i Hertz (Hz). Generelt er periode relatert til frekvens ved  $f=1/T$ . Perioden  $T$  er  $T=2\pi/\omega$  og frekvensen  $f$  er  $f=\omega/2\pi$ , hvor omega ( $\omega$ ) er **vinkelfrekvensen** målt i radianer per sekund.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

hvor  $\omega^2=k/m$ .

Når en fjær strekkes med en kraft  $F$  og forlengelsen av fjæra er  $x$  så vil fjæra trekke seg sammen med følgende kraft ifølge Hooks lov:

$$F = -k \cdot x$$

hvor  $k$  er en fjærkonstant. Jo stivere fjær desto høyere verdi av  $k$ , og jo raskere oscillerer fjæra.

Ifølge Newtons 2. lov for bevegelse er kraft ( $F$ ) lik masse ( $m$ ) ganger aksellerasjon ( $a$ ):

$$F = m \cdot a$$

Vi har derved  $m \cdot a = -k \cdot x$

$$a = -\frac{k \cdot x}{m}$$

hvor aksellerasjonen  $a$  er proporsjonal med størrelsen av  $x$ . Hastigheten  $v$  er gitt ved  $v=dx/dt$ :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Ifølge Newtons 2. lov er kraften  $F$  proporsjonal med hastigheten (moment = masse x hastighet):

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

Bevegelsen av massen opp og ned i fjæra kan beskrives av

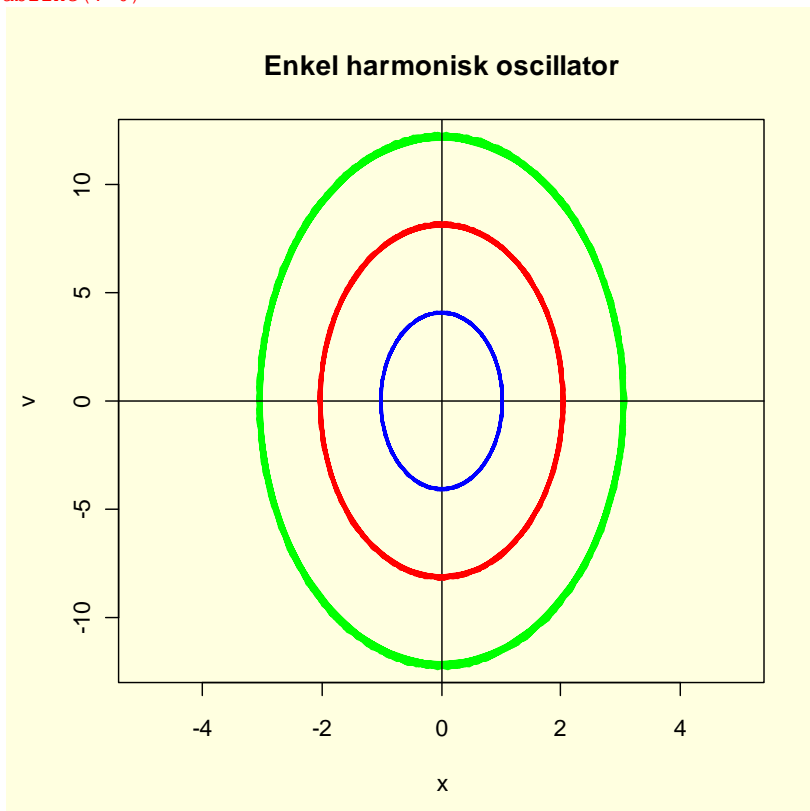
$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 \cdot x$$

Disse to lineær første ordens ligningene ovenfor kan også skrives som en andre ordens differensialligning:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cdot m + k \cdot x$$

```
#Enkel harmonisk oscillasjon
#H. Aarnes
#Parameterverdier (params) og initialverdier init.state
params<-c(omega=4)
harmonisk <-function(t,x,p)
{
  dxdt<-x[2]
  dvdt<--p["omega"]^2*x[1]
  list(c(dxdt,dvdt))
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,100,0.1)
init.state<-c(1,1)
out.state<-
as.data.frame(lsoda(init.state,out.time,harmonisk,params,rtol=1e-4))
par(bg="lightyellow")
plot(out.state[,2],out.state[,3],type="n",ylim=c(-12,12),xlim=c(-5,5),
ylab="v",xlab="x",main="Enkel harmonisk oscillator")
lines(out.state[,2],out.state[,3],col="blue")
abline(h=0)
abline(v=0)
```



Figur. Enkel harmonisk oscillator med initialverdier blå(1,1), rød(2,2) og grønn(3,3) med  $\omega=4$ . Danner ellipser, men når  $\omega=1$  dannes sirkler.

## Reduksjon til første ordens diffligninger

Hvis vi har en høyere ordens differensialligning så kan den reduseres til et sett med første ordens ligninger. Generelt en høyere ordens ligning:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = g(t)$$

Vi kan erstatte leddene i ligningen med:

$$y_1(t) = x(t), \quad y_2(t) = \frac{dx}{dt}(t), \quad y_3(t) = \frac{d^2 x}{dt^2}(t), \quad y_n(t) = \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}(t)$$

Hvis vi setter  $a_n=1$  så har vi:

$$\frac{dy_n}{dt} + a_{n-1} y_n + \dots + a_1 y_2 + a_0 y_1 = g(t)$$

Vi setter dette opp som flere første ordens ligninger:

$$\frac{dy_k}{dt} = y_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\frac{dy_n}{dt} = g(t) - a_0 y_1 - a_1 y_2 - \dots - a_{n-1} y_n$$

Hvis vi har en  $m \times n$  matrise  $A$  så er et ligningssystem homogent hvis  $Ax=0$  og det er inhomogent hvis  $Ax=b$ .

Et **homogen ligning** får følgende form:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

Hvis vi har tredje ordens ligningen:

$$\frac{d^3 x}{dt^3} + a \frac{d^2 x}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x = 0$$

Denne kan etter resonneret ovenfor uttrykkes som tre første ordens ligninger:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= z \\ \frac{dz}{dt} &= -az + y^2 - x \end{aligned}$$

Generelt kan et homogent ligningssystem uttrykkes i form av matriser som

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y$$

Hvor A er lik nxn matrisen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

og Y er kolonnematrisen:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

Hvis vi kjenner egenverdiene og Jordanstrukturen til matrisen A så kan vi finne løsningene av  $dY/dt=A \cdot Y$  lik n uavhengige lineære kombinasjon av eksponentialfunksjonen  $t^k e^{\lambda t}$  hvor lambda ( $\lambda$ ) er en egenverdi til matrisen A. Hvis  $x(t)=e^{\lambda t}$  så har vi at  $x(t)$  er en løsning når røttene er lik det karakteristiske polynomiet hvor røttene er polynomiet er lik egenverdiene  $\lambda$ .

$$e^{\lambda t}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)$$

Det blir en løsning for hver egenverdi av det karakteristiske polynomiet:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

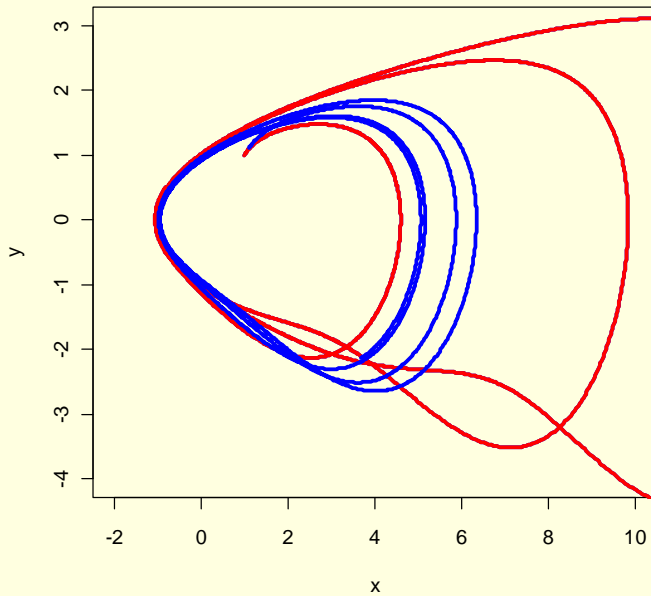
Hvis egenverdiene er komplekse ( $\lambda = a \pm bi$ )

så blir det to løsninger for hver egenverdi:  $e^{at} \cdot \cos(bt)$  og  $e^{at} \cdot \sin(bt)$ .

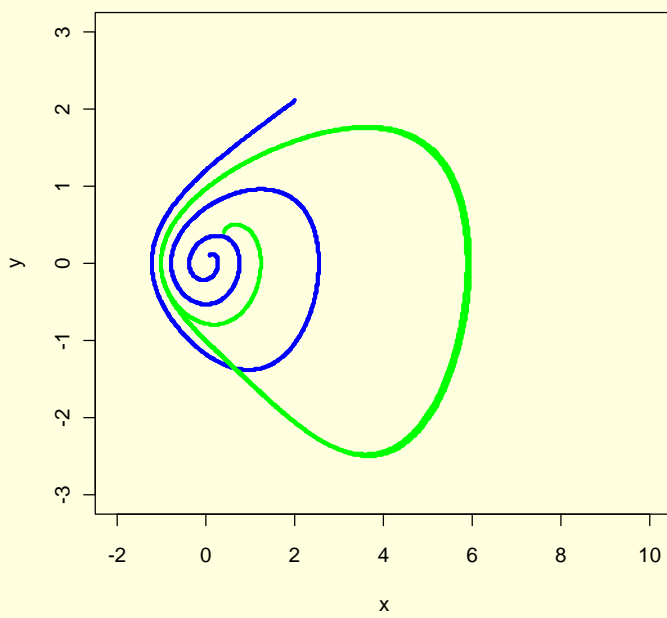
For eksemplet med tredje ordens ligningen ovenfor får det karakteristiske polynomiet:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 - 1 = 0$$

```
#Halvor Aarnes
library(deSolve)
params<-c(a=2.06)
limit<-function(t,y,p)
{
  dx<-y[2]
  dy<-y[3]
  dz<--p["a"]*y[3]+y[2]^2-y[1]
  list(c(dx,dy,dz))
}
require(deSolve)
out.time<-seq(0,40,0.01)
init.state<-c(1.1,1.1,1.1)
out.state<-lsoda(init.state,out.time,limit,params,rtol=1e-4)
par(bg="lightyellow")
plot(out.state[,2],out.state[,3],xlab="x",ylab="y",type="l",col="blue",lwd=3,
xlim=c(-2,10),ylim=c(-4,3))
#Varier initialverdier og verdier for a. Kjør programmet og plot med lines
lines(out.state[,2],out.state[,3],col="blue",lwd=3)
```



Figur. Fasediagram for  $d^3x/dt^3 + a*d^2x/dt^2 - (dx/dt)^2 + x = 0$ . For de fleste initialverdier og for verdier av  $a > 0$  blir løsningen spiraler som brer seg utover, men i noen tilfeller e.g.  $a = 2.06$  og initialverdier  $(1.1, 1.1, 1.1)$  (blå) blir trajektoriene en limitsyklus. Initialverdiene for  $(1, 1, 1)$  (rød).

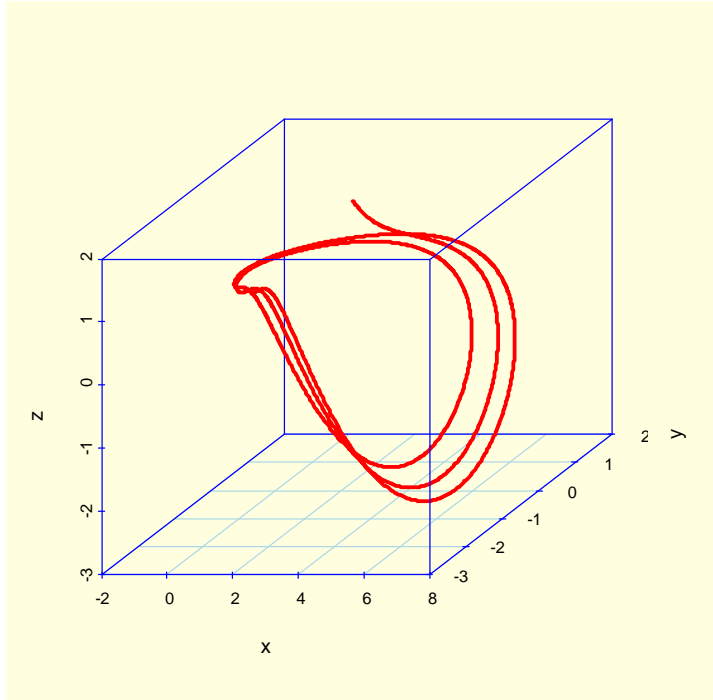


Figur. Fasediagram for  $d^3x/dt^3 + a*d^2x/dt^2 - (dx/dt)^2 + x = 0$ . For  $a = 2.14$  blir trajektoriene en spiral for initialverdier  $(0.1, 0.1, 0.1)$  (blå), men for initialverdier  $(0.4, 0.4, 0.4)$  blir det en limitsyklus (grønn).



En limitsyklus er ikke mulig i to dimensjoner, men siden trajektoriene beveger seg ned i z-planet blir det en limitsyklus for spesielle a- og initialverdier.

```
require(scatterplot3d)
scatterplot3d(out.state[,2],out.state[,3],out.state[,4],type="l",
xlab="x",ylab="y",zlab="z",color="red",col.axis=
"blue",col.grid="lightblue",lwd=3)
```



Figur. 3D trajektorier for  $d^3x/dt^3+a*d^2x/dt^2-(dx/dt)^2+x=0$  med  $a=2.06$  og initialverdier (1.1,1.1,1.1)

## Diffusjon

Diffusjon følger stokastiske Brownske bevegelser (Wiener prosess).

Ficks 1.lov beskriver fluks av et stoff ( $\text{mol m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ) angitt som  $J$ ,  $D$  er diffusjonskoeffisienten ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ),  $c$  er konsentrasjon av  $x$  er avstand

$$J = -D \cdot \frac{\partial c}{\partial x}$$

I **Ficks 2.lov** angis tiden ( $t$ ) for diffusjon :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

En analytisk løsning av denne er:

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Vi kan benytte den analytiske løsningen til å studere diffusjon.

Vi kan først sammenligne den med normalfordelingskurven med gjennomsnitt  $\mu$  og standardavvik  $\sigma$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Hvis vi lar gjennomsnittet være lik null,  $\mu=0$

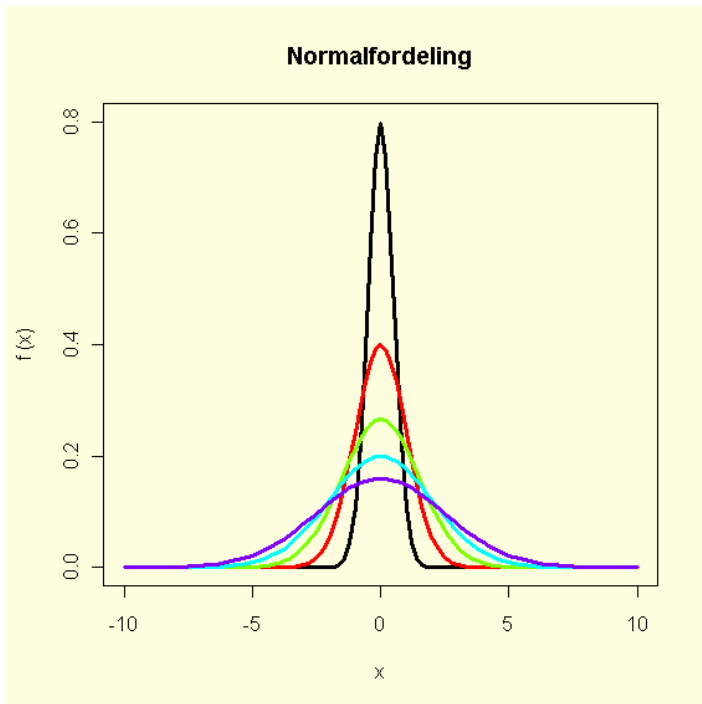
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Denne ligner meget på løsningen av Fick's 2.lov, og setter vi initialkonsentrasjonen  $c_0=1$  og lar variansen være  $2Dt$  så blir de like

$$\sigma^2 = 2Dt$$

Diffusjon gir en synkende konsentrasjon som følger normalfordeling:

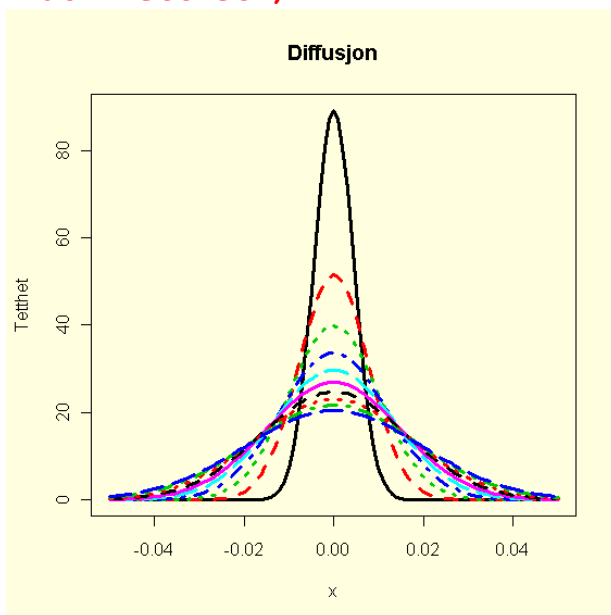
```
#Normalfordelingskurven
sigma<-0.5 #standardavvik
my<-0 #gjennomsnitt
f<-function (x) {(1/(sigma*sqrt(2*pi)))*(exp(-1/2*((x-
my)/sigma)^2))}
par(bg="lightyellow")
plot(f,-10,10,lwd=3,ylim=c(0,0.8),main="Normalfordeling")
for (i in 1:4)
{
sigma<-sigma+0.5 #øker standardavvik med 0.5
curve(f,-10,10,add=T,lwd=3,col=rainbow(4)[i])
}
```

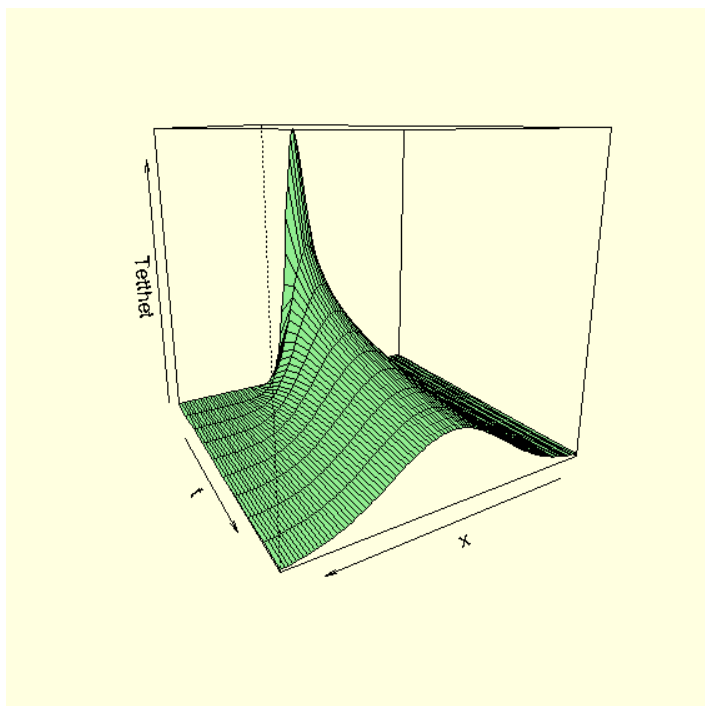


```

#Diffusjon
D<-1E-5 #Diffusjonskoeffisient m^2/sek
init<-1 #startverdi
x<-seq(-0.05,0.05,0.001)#avstand m
t<-seq(1,20,2) # tid i sek
par(bg="lightyellow")
diffusjon<-outer(x,t, function(x,t) init/sqrt(4*pi*D*t)*exp(-
x^2/(4*D*t)))
matplot(x,diffusjon,type="l",lwd=3,ylab="Tetthet",
main="Diffusjon")
persp(x,t,z=diffusjon,col="lightgreen",theta=150,box=T,axes=T,
zlab="Tetthet")

```





Diffusjon

## Fouriers varmelov

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) utviklet i *Théorie analytique de la chaleur* (1822) en varmeligning som beskriver temperaturfordelingen  $v(t,x,y)$  hvor  $t$  er tid og  $x$  og  $y$  er koordinater i planet.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Den generelle analytiske løsningen av denne partielle differensialligningen er en sum av funksjoner av typen  $v=ae^{-nx} \cos(ny)$ . Ved grenseverdien  $v=0$  og  $y=\pm 1$  fant Fourier at  $n$  er en oddetall multiplum av  $\pi/2$ . Det vil si at løsningen er en uendelig rekke:

$$v = a_1 e^{-\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{2}\right) + a_2 e^{-\left(\frac{3\pi x}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{3\pi \cdot y}{2}\right) + a_3 e^{-\left(\frac{5\pi x}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{5\pi \cdot y}{2}\right) + \dots$$

For å bestemme  $a_i$  satte Fourier  $v=1$  når  $x=0$ , og ved substitusjon  $u=\pi y/2$  har vi:

$$1 = a_1 \cdot \cos(u) + a_2 \cdot \cos(3u) + a_3 \cdot \cos(5u) + \dots$$

Fourier hadde da en ligning med uendelig mange ukjente, men ved å lage uendelig mange ligninger ved å derivere fant han at  $a_1=4/\pi$ ,  $a_2=-4/3\pi$ .

Rekken nedenfor konvergerer mot  $\pi/4$  for  $u \in \{-\pi/2, \pi/2\}$ :

$$\cos(u) - \frac{1}{3} \cos(3u) + \frac{1}{5} \cos(5u) - \dots = \frac{\pi}{4}$$

Ut fra løsningen av varmeligningen arbeidet Fourier videre med Fourier-rekker som kan benyttes til å omforme svingninger (Hz)

i form av sinus- og cosinus-funksjoner. Koeffisientene (Fourier-konstantene) er av typen:

$$a_k = \int_0^\pi f(x) \cdot \sin(kx) dx$$

## Soldeklinasjon som en Fourier-rekke

Soldeklinasjon kan beregnes ut fra en Fourier-rekke. I tillegg er det laget en periodisk modell som gir godt samsvar.  $N$  er dagen i året med start 1. januar.

$$\gamma = \frac{2 \cdot \pi}{365} \cdot (N - 1)$$

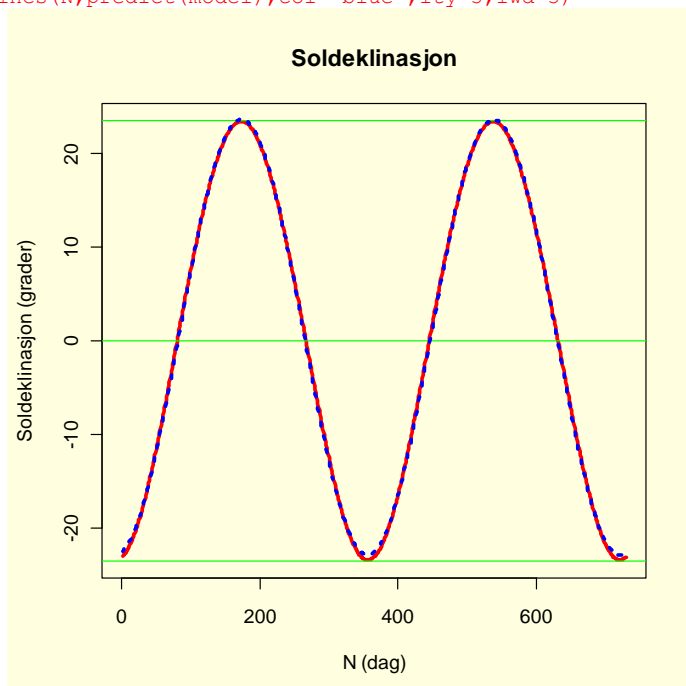
$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot (0.006918 - 0.399912 \cdot \cos \gamma + 0.070257 \cdot \sin \gamma - 0.006758 \cdot \cos 2\gamma + 0.000907 \cdot \sin 2\gamma - 0.002697 \cdot \cos 3\gamma + 0.00148 \cdot \sin 3\gamma)$$

Spencer, J.W.: *Fourier series representation of the position of the sun*. Search 2 (5) (1971) 172

```

NN<-seq(1,730,1)
gamma<-2*pi/365*(N-1)
delta<-180/pi*(0.006918-0.399912*cos(gamma)+0.070257*sin(gamma)-0.006758*cos(2*gamma)
+ 0.000907*sin(2*gamma)-0.002697*cos(3*gamma)+0.00148*sin(3*gamma))
par(bg="lightyellow")
plot(N,delta,type="l",lty=1,col="red",lwd=3, xlab="N (dag)",ylab="Soldeklinasjon (grader)",
main="Soldeklinasjon")
abline(h=0,col="green")
abline(h=23.5,col="green")
abline(h=-23.5,col="green")
day<-seq(1,730,1)
t<-day/365.2632
model<-lm(delta~sin(2*pi*t)+cos(2*pi*t))
summary(model)
lines(N,predict(model),col="blue",lty=3,lwd=3)

```



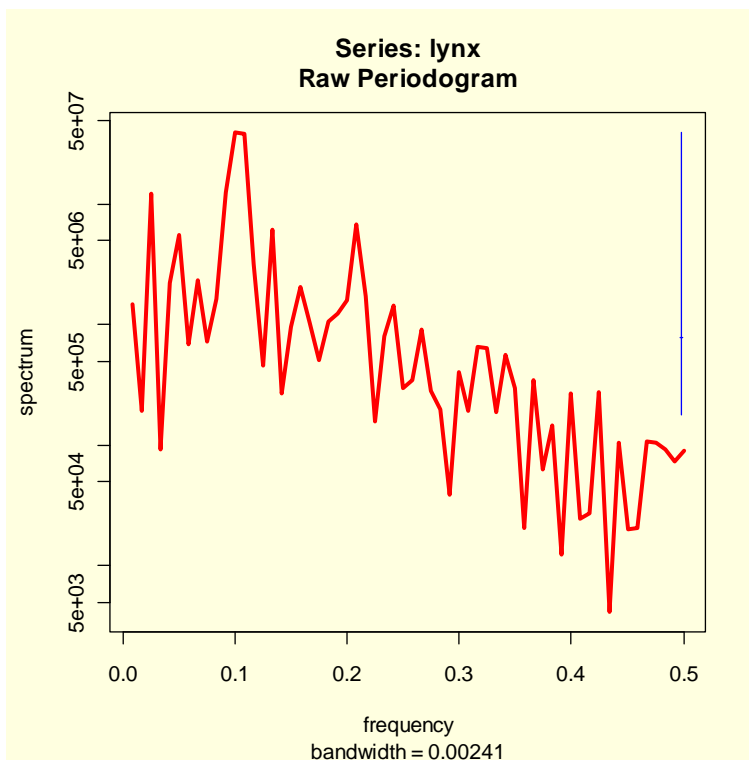
Figur. Soldeklinasjon i en toårs syklus. Sommer- og vintersolverv ved hhv.  $23.5^\circ$  og  $-23.5^\circ$ , og høst- og vårjevndøgn med deklinasjon  $0^\circ$ .

## Spektralanalyse av tidsserier

Tidsserier for planetbevegelser og tidevann er regulære og forutsigbare. Diffusjon, random-walk, aksjekurser, bestandsmålinger, meteorologiske data (nedbør, vind, lufttrykk, skydekke) og seismiske bølger er eksempler på tidsserier. Tidsserier som Lorenz attraktor er kaotisk.

Spektralanalyse (Fourier analyse, frekvensanalyse) kan benyttes til studier av tidsserier hvor man ser på **frekvens** i stedet for antall. Frekvens er  $1/\text{syklisk periode}$  eller  $\text{periode} = 1/\text{frekvens}$ . En tidsserie uttrykkes som sinus-cosinusfunksjoner med forskjellig amplitude og frekvens. Vi kan benytte datasettet lynx. Kommandoen **spec.pgram** fra pakken stats (library(help=stats) bruker **Fast Fourier Transform** (FFT, oppkalt etter Fourier) for å beregne et **periodogram** for en tidsserie:

```
data(lynx)
lynx
par(bg="lightyellow")
spec.pgram(lynx, col="red", lwd=3)
```



Figur. Periodogram for datasettet lynx i R. Plottet har logskala med enheten decibel. Båndbredden angitt på x-aksen. 95% konfidensintervall angitt som en vertikal strek til høyre på figuren. Frekvensen er ca. 0.1 hvilket vil si ca. 10-årssyklus  $1/0.1 = 10$  år

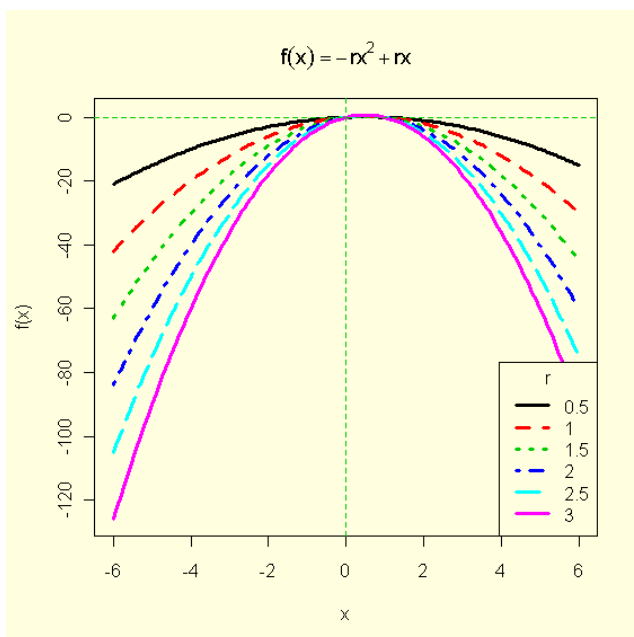
## Vekstkurver med kaos

Biologen Robert May viste at populasjonsveksten beskrevet av en logistisk ligning blir kaotisk ved høye verdier av  $r$ . Det var en meget overraskende oppdagelse at ved å endre verdien av en parameter kunne man ende ut i en tilstand av kaos. Edvard Lorenz viste i 1961 i studiet av differensialligninger som beskrev været at initialbetingelsene var avgjørende for kaos. Vi ser på en tidsserie med diskrete tidsintervall. Dette blir en **differensligning**, i motsetning til en differensialligning som er kontinuerlig

$$x_{n+1} = r \cdot x_n(1 - x_n)$$

```
#plotter kvadratfunksjonen alene
```

```
x<-seq(-6,6,0.1)
r<-seq(0.5,3,0.5)
par(bg="lightyellow")
f<-outer(x,r, function(x,r) -r*x^2 +r*x)
matplot(x,f,type="l",ylab="f(x)",lwd=3,
main=expression(f(x)==-r*x^2+r*x))
abline(v=0,h=0,lty=2,col=3)
legend("bottomright",as.character(r),title="r",lty=1:5,col=1:6,
,lwd=3)
```



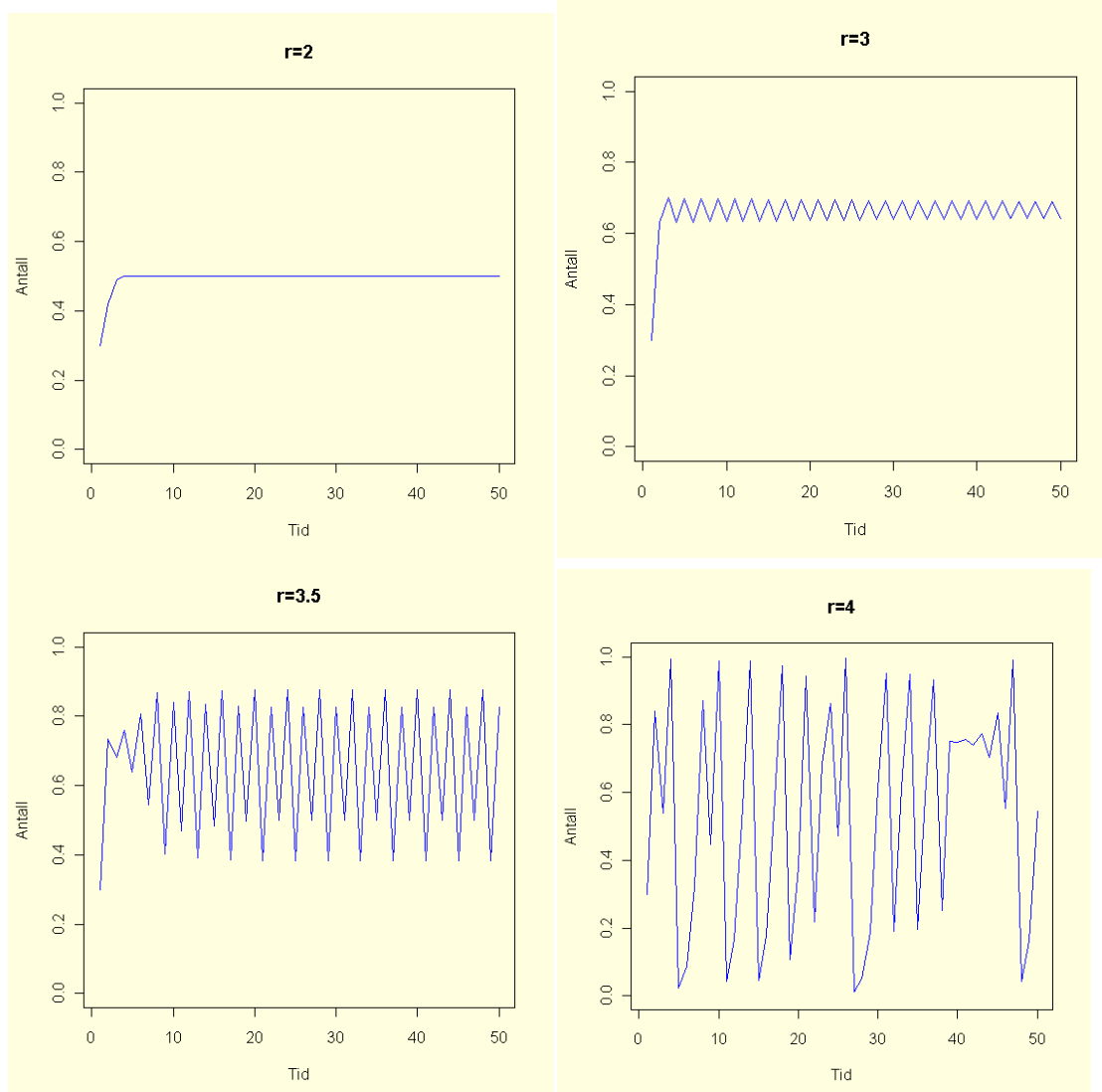
```
#plotter ved forskjellige veksthastigheter
```

```
x<-rep(0,50)
r<-2
x[1]=0.3
par(bg="lightyellow")
for (t in 2:50) x[t]<-r*x[t-1]*(1-x[t-1])
plot(1:50,x,type="l",col=4,
ylim=c(0,1),xlab="Tid",ylab="Antall",main="r=2")
r<-3
```

```

x[1]=0.3
par(bg="lightyellow")
for (t in 2:50) x[t]<-r*x[t-1]*(1-x[t-1])
plot(1:50,x,type="l",col=4,
ylim=c(0,1),xlab="Tid",ylab="Antall",main="r=3")
r<-3.5
x[1]=0.3
par(bg="lightyellow")
for (t in 2:50) x[t]<-r*x[t-1]*(1-x[t-1])
plot(1:50,x,type="l",col=4,
ylim=c(0,1),xlab="Tid",ylab="Antall",main="r=3.5")
r<-4
x[1]=0.3
for (t in 2:50) x[t]<-r*x[t-1]*(1-x[t-1])
plot(1:50,x,type="l",col=4,
ylim=c(0,1),xlab="Tid",ylab="Antall",main="r=4")

```

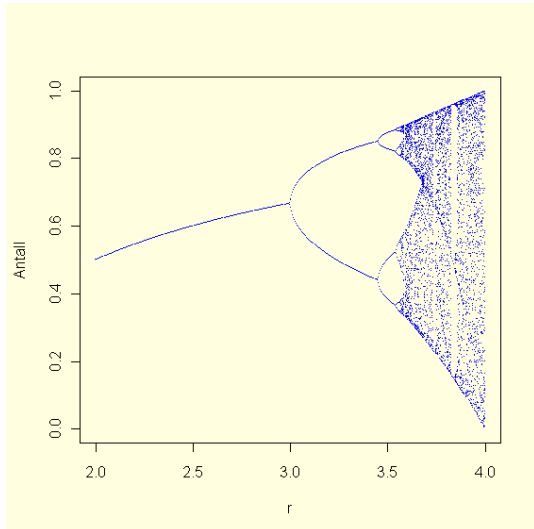


Systemet oscillerer først mellom to stadier, bifurkasjoner, deretter fire stadier, og i et bifurkasjonsdiagram framkommer



det periodiske vinduer i kaos.  $r$  opptil 3 gir en stabil populasjonsmengde, for  $r > 3$  blir det en **bifurkasjon** med to stabile verdier, når  $r = 3.5$  har vi 4 stabile konfigurasjoner og for høyere verdier oppfører systemet seg **kaotisk**.

```
populasjon<-function (r){
x<-rep(0,400)
x[1]=0.3
for(t in 2:400) x[t]<-r*x[t-1]*(1-x[t-1])
x[351:400]}
#lager tomt plot
plot(c(2,4),c(0,1),type="n",xlab="r",ylab="Antall")
for (r in seq(2,4,0.005))
points(rep(r,50),sapply(r,populasjon),pch=".",col=4)
```



Ratio mellom to påfølgende bifurkasjonsintervall er lik Feigenbaum konstant 4.66920160.. (Mitchell Jay Feigenbaum). Mange systemer vil bifurkere etter dette mønsteret.

## Penger i banken

Jo oftere renter blir utbetalt i løpet av et år, desto mer står inne på konto ved årets slutt, et resultat av rentesrente.

Dårligst utbytte er det hvis renten bare blir utbetalt ved slutten av hvert år.  $S_0$  er antall kroner ved start og vi starter med  $S_0 = 1000$  kroner,  $n$  er antall ganger det blir utbetalt renter  $n = 1$  (ved slutten av året),  $n = 12$  (ved slutten av hver måned) og  $n = 365$  (ved slutten av hver dag). Utbyttet kaller vi  $U$ , og renten  $r$  setter vi i eksemplet til 8% ( $r = 0.08$ ).

Etter en tidsenhet ( $1/n$ ) er utbyttet  $U_1$ :

$$U_1 = \left(1 + \frac{r}{n}\right) S_0$$

Og etter  $n$  tidsperioder er utbyttet  $U_n$ :

$$U_n = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n S_0$$

Utbytte hvis utbetaling av rente en gang ved slutten av året for kr. 1000 insatt ved årets begynnelse:

$$U_1 = \left(1 + \frac{0.08}{1}\right) 1000 = kr. 1080,00$$

Utbytte ved årets slutt hvis utbetaling ved slutten av hver måned:

$$U_n = \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{12} 1000 = kr. 1083,00$$

Hvis vi ber banken utbetale renter kontinuerlig:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Denne kan settes opp som en differensialligning:

Endring i innskuddet i perioden:

$$\Delta S = \frac{r}{n} \cdot S = r \cdot S \cdot \Delta t$$

Hvor  $\Delta t = 1/n$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = r \cdot S$$

Når  $\Delta t \rightarrow 0$  får vi differensialligningen:

$$\frac{dS}{dt} = r \cdot S$$

En løsning av denne er:

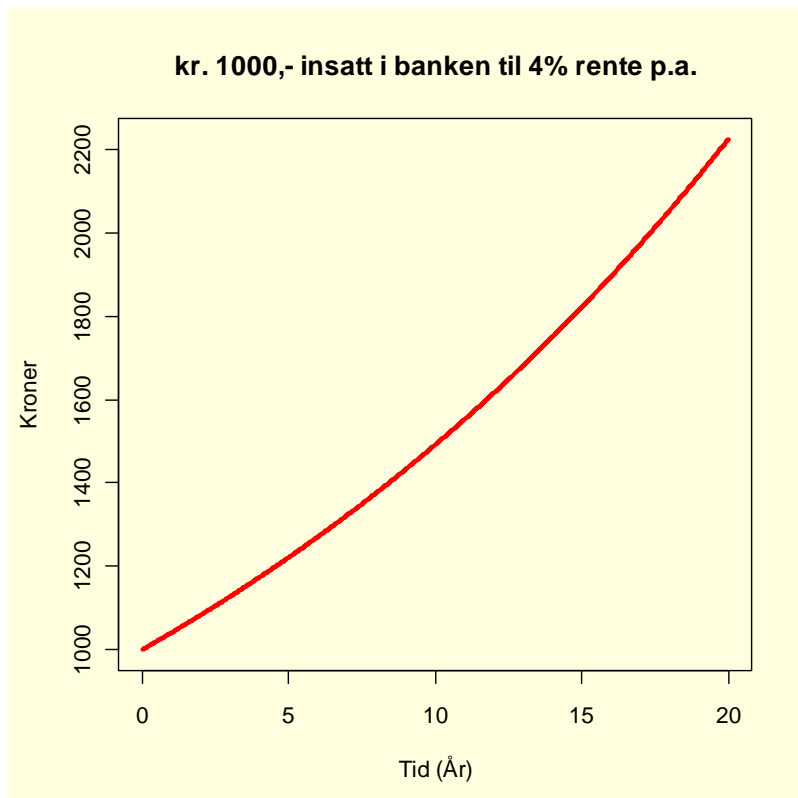
$$S(t) = S_0 \cdot e^{rt}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

Kontinuerlig forentning gir utbytte ved slutten av året:

$$U_n = 1000 \cdot e^{0.08} = kr. 1083.30$$

Og den effektive renten er  $e^r - 1$  dvs. 8.33% i vårt eksempel. For store beløp og forentning over lang tid får det stor betydning hvor ofte det beregnes renter, og banken regner alltid den renten som blir billigst for banken og mest ugunstig for kunden.



Figur. Løsning av ligningen  $dS/dt=rS$ , hvor du setter inn kr. 1000,- i banken til 4% rente p.a.. Hvis inflasjonen er 2% og du må betale skatt av rentene blir du ikke rik, men du mister i hvert fall ikke pengene i et børskrakk.

## Differensialligninger med tidsforsinkelse

Følgende er løst med dede ("delay differential equations") i deSolve i R. Eksempler er hentet fra Shampine, L.F. & Thompson, S. *Solving delay differential equations with dde23*.pp.44. March23, 2000.

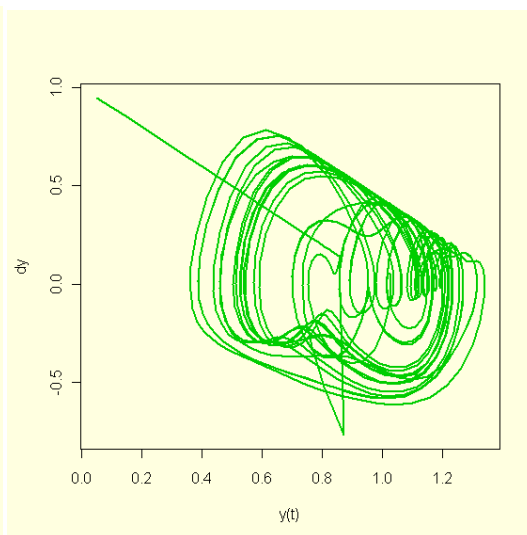
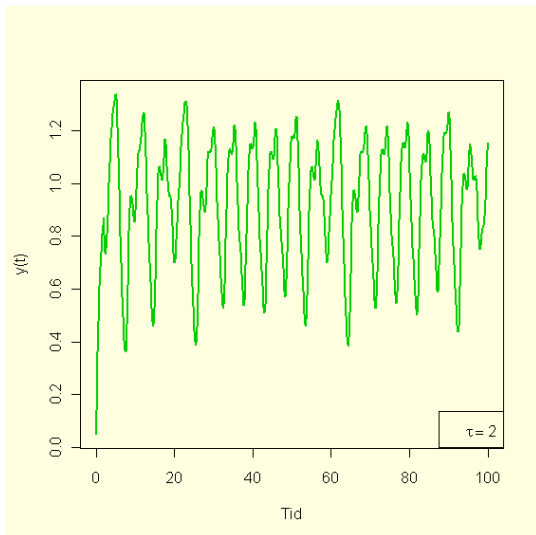
### Willé & Baker

Et eksempel fra Willé og Baker.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2y(t-2)}{1+y(t-2)^{9.65}} - y(t)$$

Dette systemet ser ut til å være kaotisk.

Willé, D.R. & Baker, C.T.H.: *DELSOL - numerical code for the solution of systems of delay-differential equations*. Appl.Numer.Math. 9 (1992)223-234



```

library(deSolve)
#delay differential equation
#Willé & Baker
WB<- function(t,y,parms){
  tlag <-t-2
  if (tlag<0)
    ylag<-0.5
  else
    ylag <-lagvalue(tlag)
  dy <-2*ylag/(1+ylag^9.65)-y[1]
  list(dy,dy=dy)
}
Nini<-0.05 #N initialverdi
tid<-seq(0,100,0.1) #tid
yut <- dede(y=Nini,times=tid,func=WB,parms=NULL)
plot(yut[,1],yut[,2],type="l",col=3,lwd=2,xlab="Tid",
ylab="y(t)")
legend("bottomright",c(expression(tau==2)),col=4)
plot(yut[,2],yut[,3],type="l",col=3,lwd=2,xlab="y(t)",ylab="dy
")

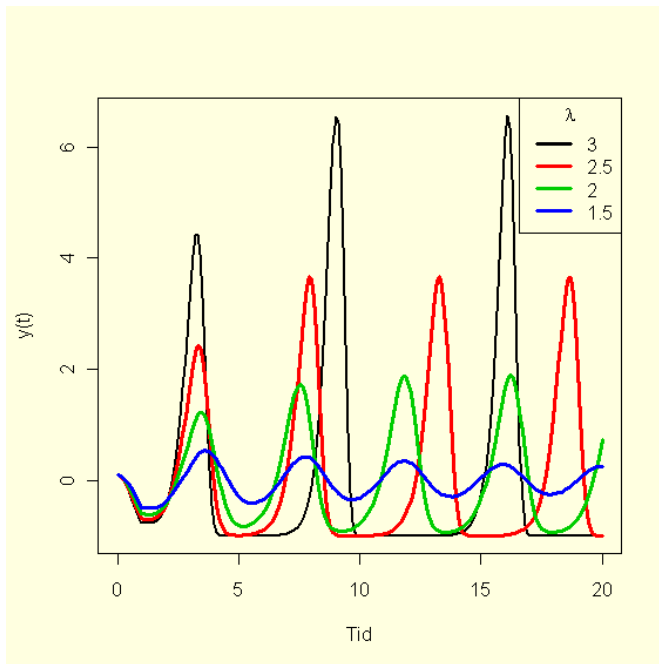
```

## Oberle & Pesch

Oberle, H.J. & Pesch, H.J.: *Numerical treatment of delay differential equations by Hermite interpolation*. Numer. Math. 37 (1981) 235-255

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y(t-1)(1+y(t))$$

Tidsforsinkelse  $\tau=1$ .



```

library(deSolve)
#delay differential equations
#Oberle & Pesch
OP<- function(t,y,parms){
  tlag <-t-1
  if (tlag<0)
    ylag<-t
  else
    ylag <-lagvalue(tlag)
  dy <--lambda*ylag*(1+y[1])
  list(dy)
}
lambda<-3 #parameterverdier
Nini<-0.1 #N initialverdi
tid<-seq(0,20,0.1) #tid
yut <- dede(y=Nini,times=tid,func=OP,parms=NULL)
plot(yut[,1],yut[,2],type="l",col=1,lwd=2,xlab="Tid",
ylab="y(t)")
legend("topright",as.character(c(3,2.5,2,1.5)),title=expression(
lambda),
lty=1,col=1:4,lwd=3)
#bytt verdi for lambda & farge i lines,
#kjør deler av programmet
lines(yut[,1],yut[,2],type="l",col=4,lwd=3)

```

## SIR med tidsforsinkelse

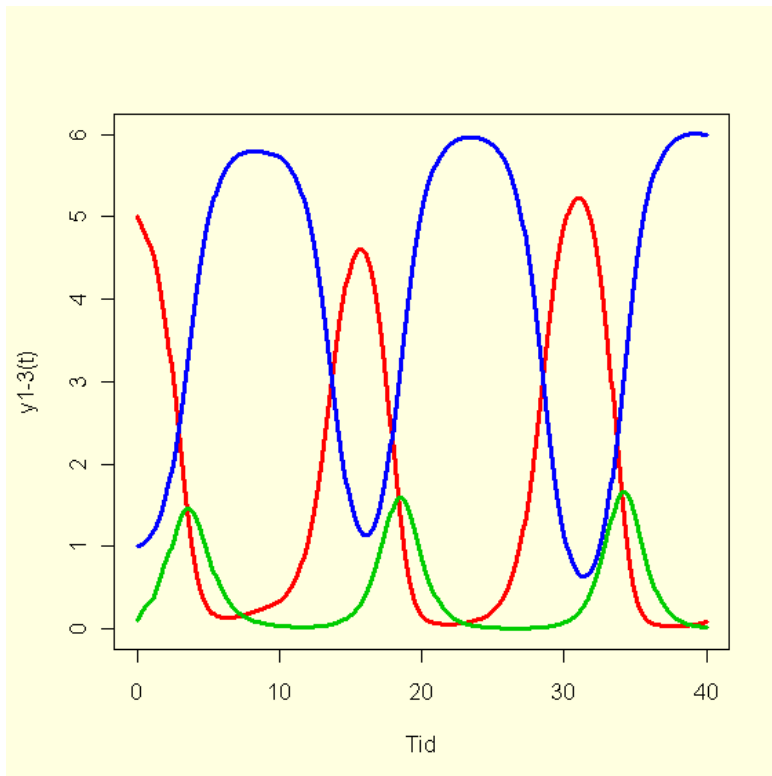
Følgende differensialligninger med tidsforsinkelse fra Hairer, E., Nørsett, S.P. & Wanner, G. Solving ordinary differential equations I. Springer-Verlag 1987.

En infeksjonsmodell med to tidsforsinkelser  $\tau = 1$  og  $10$ .  
 Initialbetingelser for  $(y_1, y_2, y_3) = (5, 0.1, 1)$

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1(t)y_2(t-1) + y_2(t-10)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -y_1(t)y_2(t-1) - y_2(t)$$

$$\frac{dy_3}{dt} = -y_2(t) - y_2(t-10)$$



```
library(deSolve)
sir<- function(t,y,parms) {
  if (t< 1)
    lag1<- 0.1
  else
    lag1<-lagvalue(t-1,2)
  if(t<10)
    lag10 <- 0.1
  else
    lag10 <- lagvalue(t - 10,2)
  dy1<--y[1]*lag1+lag10
  dy2<-y[1]*lag1-y[2]
  dy3<-y[2]-lag10
  list(c(dy1,dy2,dy3))
}
Nini<-c(5,0.1,1) #N initialverdi
tid<-seq(0,40,0.1) #tid
ut<- dede(y=Nini,times=tid,func=sir,parms=NULL)
```

```

plot(ut[,1],ut[,2],type="l",col=2,lwd=3,ylim=c(0,6),xlab="Tid"
,ylab="y1-3(t)")
lines(ut[,1],ut[,3],col=3,lwd=3)
lines(ut[,1],ut[,4],col=4,lwd=3)

```

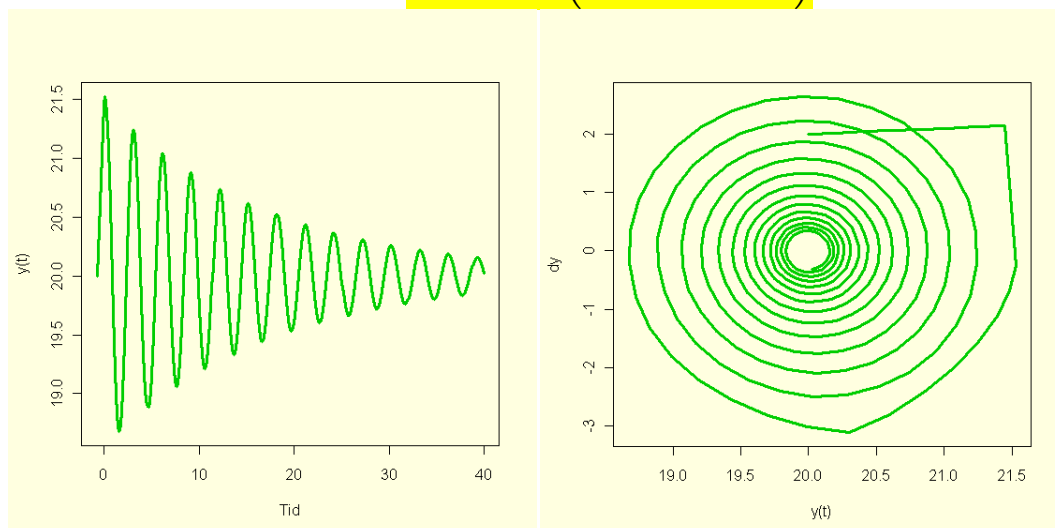
## Lemenpopulasjon

Følgende er fra dede-manualen, og  
Tavernini, L.: *Continuous-time modeling and simulation*. Gordon  
& Breach, Amsterdam 1996.

Shampine, L.F. & Thompson, S. *Solving delay differential  
equations with dde23*.pp.44. March23, 2000

Viser populasjonssvingninger i lemen-populasjon med 4-  
årssyklus og tidsforsinkelse  $\tau=0.74$  og veksthastighet  $r=2$

$$\frac{dy}{dt} = ry(t) \left( 1 - \frac{y(t - 0.74)}{m} \right)$$



```

library(deSolve)
lemming<- function(t,y,parms) {
  if (t< 0)
    lag<-19
  else
    lag<-lagvalue(t-0.74)
  dy<-r*y*(1-lag/m)
  list(dy,dy=dy)
}
r<-2;m=20 #parameterverdier
Nini<-20 #N initialverdi
tid<-seq(-0.74,40,0.1) #tid
ut<- dede(y=Nini,times=tid,func=lemming,parms=NULL)
par(bg="lightyellow")
plot(ut[,1],ut[,2],type="l",col=3,lwd=3,,xlab="Tid",ylab="y(t)
")
plot(ut[,2],ut[,3],type="l",col=3,lwd=3,,xlab="y(t)",ylab="dy"
)

```

## Lotka-Volterra uten og med tidsforsinkelse

Vi har følgende ligninger for byttedyr ( $y_1$ ) og predator ( $y_2$ ) uten tidsforsinkelse

$$\frac{dy_1}{dt} = ay_1(t) - by_1(t)y_2(t)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = cy_1(t)y_2(t) - dy_2(t)$$

parameterverdier  $a=0.4, b=0.03, c=0.02, d=0.5$  med initialbetingelser for  $(y_1, y_2)$  lik  $(50, 10)$ .

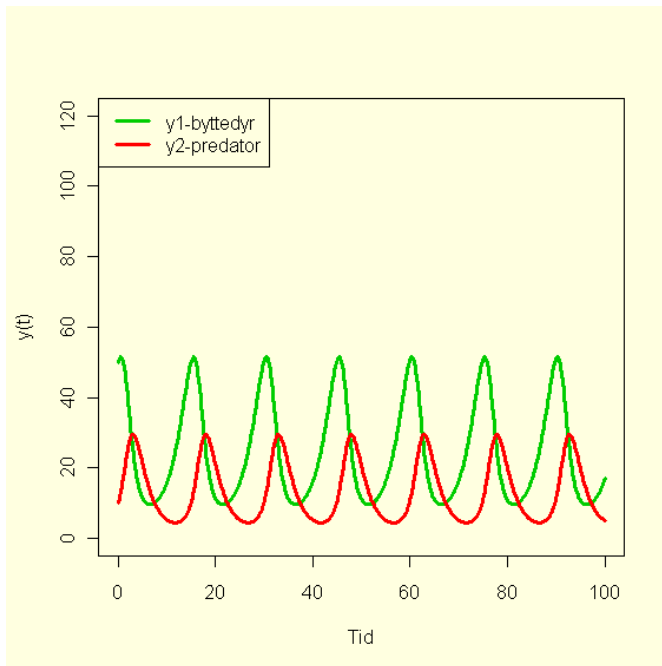
Vi sammenligner med tidsforsinkelse hvor det tar en tid  $\tau$  før predatorkonsentrasjonen responderer på antall byttedyr, tidsforsinkelse  $(t-\tau)$

$$\frac{dy_1}{dt} = ay_1(t) \left( 1 - \frac{y_1(t)}{m} \right) - by_1(t)y_2(t)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = cy_1(t-\tau)y_2(t-\tau) - dy_2(t)$$

```
#Lotka-Volterra uten tidsforsinkelse
#tidsserieplot
params<-c(a=0.4,b=0.03,c=0.02,d=0.5)
lotkavolterra<-function(t,y,p)
{
with(as.list(p), {
y1<-y[1]
y2<-y[2]
dy1dt<-a*y1-b*y1*y2
dy2dt<-c*y1*y2-d*y2
list(c(dy1dt,dy2dt))
})
}
require(deSolve)
t<-seq(0,100,0.1)
start<-c(50,10)
results<-
as.data.frame(lsoda(start,t,lotkavolterra,params,rtol=1e-4))
par(bg="lightyellow")
plot(results[,2],results[,3],xlim=c(0,100),ylim=c(0,120),type=
"n",
ylab="y(t)",xlab="Tid")
lines(results[,1],results[,2],col=3,lwd=3)
lines(results[,1],results[,3],col=2,lwd=3)
legend("topleft",c("y1-byttedyr","y2-
predator"),lty=1,lwd=3,col=c(3,2))
```

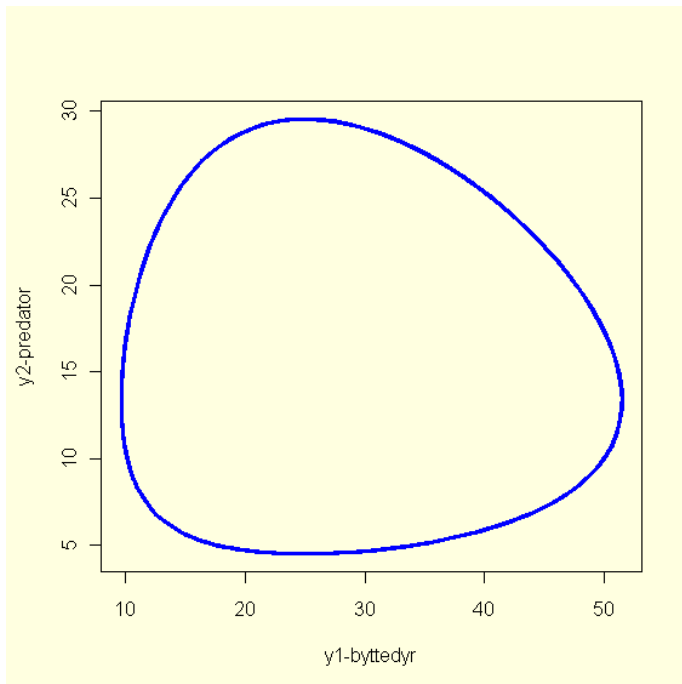




```

#Lotka-Volterra uten tidsforsinkelse
#fasediagram
params<-c(a=0.4,b=0.03,c=0.02,d=0.5)
lotkavolterra<-function(t,y,p)
{
  with(as.list(p), {
    y1<-y[1]
    y2<-y[2]
    dy1dt<-a*y1-b*y1*y2
    dy2dt<-c*y1*y2-d*y2
    list(c(dy1dt,dy2dt))
  })
}
require(deSolve)
t<-seq(0,100,0.1)
start<-c(50,10)
results<-
as.data.frame(lsoda(start,t,lotkavolterra,params,rtol=1e-4))
par(bg="lightyellow")
plot(results[,2],results[,3],xlab="y1-
byttedyr",type="l",lwd=3,col=4,
ylab="y2-predator")

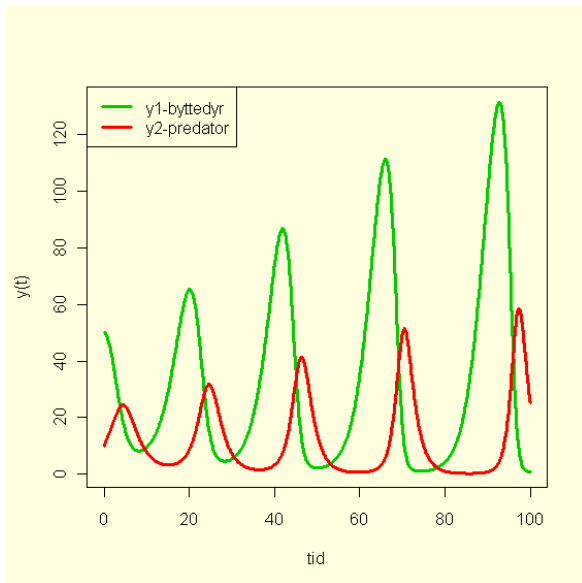
```



```

library(deSolve)
#Lotka-Volterra med tidsforsinkelse
#tidsseriediagram
lotka<- function(t,y,parms) {
  tlag<-t-1
  if (tlag< 0)
    ylag<- c(50,10)
  else
    ylag<-lagvalue(tlag)
    dy1<-a*y[1]*(1-y[1]/m)-b*y[1]*y[2]
    dy2<-c*y[1]*ylag[2]-d*y[2]
    list(c(dy1,dy2))
}
a=0.4;b=0.03;c=0.02;d=0.5;m=200 #parameterverdier
Nini<-c(50,10) #N initialverdi
tid<-seq(0,100,0.1) #tid
ut<- dede(y=Nini,times=tid,func=lotka,parms=NULL)
par(bg="lightyellow")
plot(ut[,1],ut[,2],type="l",col=3,lwd=3,xlab="tid",ylab="y(t)"
)
lines(ut[,1],ut[,3],type="l",col=2,lwd=3)

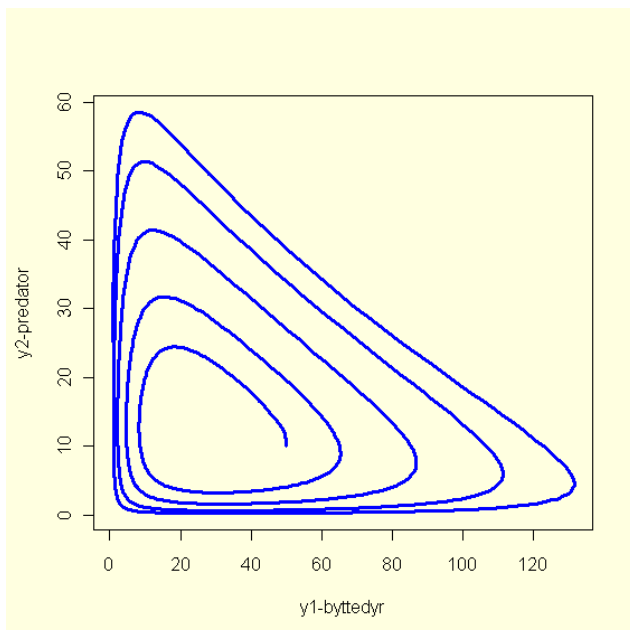
```



```

library(deSolve)
#Lotka-Volterra med tidsforsinkelse
#fasediagram
lotka<- function(t,y,parms) {
  tlag<-t-1
  if (tlag< 0)
    ylag<- c(50,10)
  else
    ylag<-lagvalue(tlag)
    dy1<-a*y[1]*(1-y[1]/m)-b*y[1]*y[2]
    dy2<-c*ylag[1]*ylag[2]-d*y[2]
  list(c(dy1,dy2))
}
a=0.4;b=0.03;c=0.02;d=0.5;m=200 #parameterverdier
Nini<-c(50,10) #N initialverdi
tid<-seq(0,100,0.1) #tid
ut<- dede(y=Nini,times=tid,func=lotka,parms=NULL)
par(bg="lightyellow")
plot(ut[,2],ut[,3],type="l",col=4,lwd=3,xlab="y1-byttedyr",
ylab="y2-predator")

```



Med tidsforsinkelse følger man fra startverdiene (50,10) og følger trajektoriene mot klokka. Til slutt går populasjonene til grunne. Dette skjer ikke i eksemplet uten tidsforsinkelse, forøvrig med de samme parameterverdiene.

## Stabilitetsundersøkelse

Vi kan også utføre egenanalyse med Jacobi-matriser for å se på likevekt om det er attraktorer, repellanter, begge disse eller om systemet oscillerer. Jacobi-matrisen inneholder de partiellderiverte og sier noen om hvordan den ene populasjonen endrer seg i forhold til den andre populasjonen og egen populasjon.

Jacobimatrisen (J), Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), blir følgende:

$$J(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial y_1} & \frac{\partial y_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial y_1} & \frac{\partial y_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \cdot y_2 & -(b \cdot y_1) \\ c \cdot y_2 & c \cdot y_1 - d \end{pmatrix}$$

Vi går tilbake til populasjonen uten tidsforsinkelse:

```

dy1dt<-expression(a*y1-b*y1*y2)
dy2dt<-expression(c*y1*y2-d*y2)
#partiellderiverte
dy1dy1<-D(dy1dt,"y1");dy1dy1
a - b * y2
dy1dy2<-D(dy1dt,"y2");dy1dy2
-(b * y1)
dy2dy1<-D(dy2dt,"y1");dy2dy1
c * y2
dy2dy2<-D(dy2dt,"y2");dy2dy2

```

```

c * y1 - d
#Jacobi-matrise med partiellderiverte
J<-expression(matrix(c(eval(dy1dy1),eval(dy1dy2),eval(dy2dy1),
+ eval(dy2dy2)),nrow=2,byrow=TRUE))
y1<-y2<-1
a=0.4;b=0.03;c=0.02;d=0.5
J2<-eval(J);J2
      [,1] [,2]
[1,] 0.37 -0.03
[2,] 0.02 -0.48
eigen(J2) #egenverdier og egenvektorer
$values
[1] -0.4792935  0.3692935

$vectors
      [,1] [,2]
[1,] 0.03530146 0.99972284
[2,] 0.99937671 0.02354246

```

Vi trekker egenverdien lambda ( $\lambda$ ) fra de prinsipale diagonalelementene i Jacobimatrisen, og setter determinanten til denne matrisen lik 0:

$$\det \begin{pmatrix} 0.37 - \lambda & -0.03 \\ 0.02 & -0.48 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Generelt hvis man har en type determinant som følgende:

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Så er løsningen:

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

Med løsningene:

$$\lambda = \frac{a + d}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a - d)^2 + bc}$$

Man får den karakteristiske ligningen:

$$(0.37 - \lambda)(-0.48 - \lambda) - (-0.03 \cdot 0.02) = 0$$

Denne har løsningene:

$$\lambda = \frac{0.37 \cdot -0.48}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(0.37 - 0.48)^2 + 4 \cdot -0.03 \cdot 0.02}$$

```
a<-0.37;b<--0.03;c<-0.02;d<--0.48
```

```
lambda2<-(a+d)/2+1/2*sqrt((a-d)^2+4*b*c);lambda2
```

```
[1] 0.3692935
```

```
lambda1<-(a+d)/2-1/2*sqrt((a-d)^2+4*b*c);lambda1
```

```
[1] -0.4792935
```

Som vi ser stemmer med utregningen ovenfor. Lambda ( $\lambda$ ) kan være reelle positive/negative eller komplekse  $z=a+bi$  med reell og imaginær akse.

Evhengig av egenverdiene i Jacobi-matrisen sier disse om stabiliteten:

Eigenverdier	Stabilitet
Alle reelle og $<0$	Global stabil (attraktor)
Noen reelle $<0$	Sadelpunkt (attraktor-repellant)
Ingen reelle $<0$	Global ustabil repellor
Reelle $=0$	Nøytrale
Komplekse uten imaginær del	Ingen oscillasjoner
Kompleks med imaginær del	Oscillerer

## Stokastiske differensialligninger

På samme måte som man kan innføre stokastisitet i differensligninger så kan man også gjøre det med differensialligninger. Vi har den enkle differensialligningen for eksponensiell vekst:

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x \quad x(0) = x_0 \quad dx = rxd t$$

som vi vet har den analytiske løsningen:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{rt}$$

I denne ligningen er det stokastisk støy ( $S_t$ ) som gir fluktuasjoner omkring en gjennomsnittsverdi og vi kan nå skrive ligningen:

$$dX(t) = r \cdot X(t)dt + S(t) dt$$

Vi kan også la veksthastigheten variere:

$$dX(t) = (r_0 + S(t)) \cdot X(t)dt = r_0X(t)dt + X(t)S(t)dt$$

En stokastisk modell viser hvor sannsynlig det er at systemet er i forskjellige stadier over tid, men hva blir forskjellen på stokastisitet og kaos ?

Alle differensialligningene her er løst med programmet *lsoda* fra deSolve i R. *lsoda*, en ordinær løser av ordinære differensialligninger for stive og ikke-stive systemer ble laget av bl.a. Alan Hindmarsh Linda Petzhold som arbeidet ved Lawrence Livermore National Laboratory i USA. Når det er få endringer i den numeriske løsningen går programmet i lange steg framover, og når det er mye endringer går det i små trinn. Mange av eksemplene er hentet fra Spratt (2003).

Se H. Aarnes: *Bruksanvisning for R*.

## Litteratur

Ellner, S.: *An introduction to R for dynamic modeling. Ecology and evolutionary biology*, Cornell 2003, pp. 50

Golubitsky, M. & Dellnitz, M. *Linear algebra and differential equations using Matlab*. Brooks Publ. Comp. 1999.

Sprott, J.C.: *Chaos and time-series analysis*. Oxford university press 2003.

Strogatz, S.H.: *Nonlinear dynamics and chaos*. Perseus Books publ. 1994.

Soetaert, K. & Herman, P.M.J.: *A practical guide to ecological modelling*. Springer 2009

R Development Core Team (2007). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.

*Livet er en kort episode mellom fødsel og død.*