Litt praktisk regning og matematikk

Innhold

Innledning

I **algebra** bruker man symboler som representerer **variable**, samt **konstanter** som består av tall. Algebra består i å finne verdien av ukjente størrelser betegnet med bokstaver. Algebra, siffer og algoritmer er ord som har arabisk opprinnelse. Algebra (ligningslære) har namn fra Al-Khuwãrizimi og hans bok *Aljabr w´almuqabalah* fra 800-tallet, som seinere ble oversatt til latin.

Konstanter har faste bestemte verdier og enheter f.eks. den universelle gasskonstanten R = 8.314 J mol^{-1} K^{-1}; Avogadros tall N = 6.022·10^{23} partikler mol^{-1}; Plancks konstant h= 6.626·10^{-34} J s; Stefan-Bolzmanns konstant σ = 5.670·10^{-8} W m^{-2} K^{-4} ; Faradays konstant F = 9.649·10^{4} J mol^{-1} V^{-1}, tyngdens aksellerasjon ved havoverflaten på jorda ved breddegrad 45^{o} g = 9.807 m s^{-2}.

Symbolet T brukes for absolutt temperatur i Kelvin, mens t brukes som symbol for temperatur i grader Celsius. Man kan regne med tallene ved hjelp av **regneoperasjoner** (aritmetiske operasjoner), og de fire elementære regneartene er addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon.

Regneoperasjon		Symbol
Summere (addisjon)	x + y	+
Trekke fra (subtraksjon)	x - y	-
Gange (multiplikasjon)	x ·y	· eller * eller x
Dele (divisjon, brøk)	x/y	/ eller :
Potens	x^y	^y

Noen av regneoperasjonene er **motsatte regnearter** for eksempel addisjon-subtraksjon; multiplikasjon-divisjon; sinus-arcsinus. Ved multiplikasjon bruker man symbolet ·som i x·y, men symbolet kan også utelates som i xy. Man forsøker å unngå å bruke x som symbol for multiplikasjon fordi det kan forveksles med tallet x f.eks. xxy.
Regnesymbolene har et hierarki når de forekommer samtidig og kommer derfor i en prioriteringsrekkefølge. Først kommer (), det som står i parenteser skal alltid regnes ut først. Deretter kommer multiplikasjon og divisjon og til slutt kommer summering og subtraksjon.
Den greske store bokstaven sigma (Σ) brukes som summasjonstegn. Summen av tallene 1 til 10:

$$\sum_{n=1}^{10} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

Tallene

De **naturlige tallene** (a) er ...-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,..., **heltallene**, og disse kan man plassere i geometrisk rekkefølge og etter hverandre på en kontinuerlig **tall-linje** med de positive tallene som går fra null til pluss uendelig og de negative tallene fra null til minus uendelig. F.eks. vil tallet 8 betegne 8 objekter, uansett type. De positive tallene er det lett å forestille seg, 5 epler, men det er vanskeligere å tenke seg de negative tallene, -5 epler.

Mellom heltallene befinner det seg også en rekke tall, og ethvert tall som befinner seg på denne tall-linjen kalles et **reelt tall**. Et **rasjonalt tall** er et reelt tall som kan uttrykkes som et forhold mellom to tall, en **brøk** x/y hvor *x* og *y* er heltall. I brøken kalles *x* for **teller** og *y* for **nevner**. Tallene som ikke er rasjonale kalles **irrasjonale tall**. pi (π=3.1415926535...), det naturlige tallet *e* og kvadratroten av tallet to (√2) er eksempler på irrasjonale tall. Tallet pi (π) og det naturlige tallet *e* er også eksempel på **transcendente tall**. I et kvadrat med side lik en lengdeenhet (1), så kan ikke diagonalen måles helt nøyaktig, men blir lik kvadratroten av 2. Det irrasjonale tallet pi er forhold mellom omkrets og diameter i en sirkel. De irrasjonale tall danner brudd i tall-linjen.

Kvadratroten til et tall er et tall som hvis det blir multiplisert med seg selv gir det opprinnelige tallet. **Kvadratet** av et tall er lik tallet multiplisert med seg selv.

Partallene (liketallene) er delelig med tallet 2 og er lik $2 \cdot n$, mens resten av tallene ($2n-1$) kalles **oddetall** (uliketall). For husnummer har vi liketall på den ene siden av gaten og ulike tall på den andre.

Primtall er bare delelig med seg selv og tallet 1. De første primtallene er 2,3,5,7,11,13,17,19... Alle naturlige tall (a>1) kan uttrykkes i form av et produkt av primtall (p) kalt **primfaktorer**, $a=p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$. Hvis *a* er et primtall, så blir det bare ett primtall, primtallet selv på høyre side av likhetstegnet. Alle primtallene, unntatt 2, er oddetall. Primtallene er ujevnt fordelt på tall-linjen. Selv de kraftigste datamaskiner blir satt på prøve når det gjelder å finne et størst mulig primtall. Faktorisering av store primtall danner basis for koder i kryptografi. Den franske matematikeren Martin Mersenne (1588-1648) fant en gruppe primtall kalt Mersenne-primtall: 2^p-1 hvor *p* er et primtall. Mersenne forsvarte Descartes mot teologene og brevvekslet med Fermat. Den tyske matematikeren Christian Goldbach (1690-1764) introduserte Goldbachs antakelse om at ethvert liketall større enn (>) 2 kan uttrykkes som en sum av to primtall: 4=2+2; 6=3+3; 8=5+3; 10=3+7 o.s.v. Stanislaw Ulam (1909-1984) fant at hvis alle tall ble satt opp i spiral med 1 i sentrum så blir primtallene liggene på parallelle linjer (Ulam-spiral).

Komplekse tall ble innført for å kunne regne ut kvadratroten av negative tall. Kvadratroten til minus 1 ($\sqrt{-1}$) er meningsløs hvis man bare bruker de reelle tallene. Man innførte symbolet $i=\sqrt{-1}$, og komplekse tall består av to komponenter og kan uttrykkes som $a+ib$, hvor *a* er **reell del** og *ib* er **imaginære del** av det komplekse tallet, og *a* og *b* er reelle tall. De reelle tallene er en utgave av de komplekse tallene hvor $b=0$, derfor kalles *a* den reelle del av komplekse tall. Komplekse tall gjør det mulig å løse ligninger av typen $x^2+1=0$. Komplekse tall kan uttrykkes geometrisk i form av en vektor med en reell akse og en imaginær akse. En **vektor** beskrives via lengde og retning.

Ligninger

En **ligning** består av tall og/eller symboler på hver side av et likhetstegn. De forskjellige komponentene i ligningen kan flyttes på. Det må alltid foretas den samme regneoperasjon på begge sider av likhetstegnet. Flyttes en av komponentene over til den andre siden av likhetstegnet skifter den fortegn. Det kan også foretas samme regneoperasjon over og under en brøk, men dette gjelder hele telleren og nevneren i brøken.

Ligninger kan uttrykkes som grafiske figurer i et **koordinatsystem**. Descartes innførte x, y, z, de siste bokstavene i det latinske alfabet, til å beskrive koordinatene. F.eks. kan man løse eksponensialligningen $a^x = b$ ved å ta den naturlige logaritmen på begge sider av likhetstegnet:

$$a^x = b \quad \leftrightarrow \quad lna^x = lnb \quad \leftrightarrow \quad x \cdot lna = lnb \quad \leftrightarrow \quad x = \frac{lnb}{lna}$$

Potenser

a	atto	10^{-18}		da*	deka	10
f	femto	10^{-15}		h*	hekto	10^{2}
p	piko	10^{-12}		k	kilo	10^{3}
n	nano	10^{-9}		M	mega	10^{6}
μ	mikro	10^{-6}		G	giga	10^{9}
m	milli	10^{-3}		T	tera	10^{12}
c*	centi	10^{-2}		P	peta	10^{15}
d*	desi	10^{-1}		E	eksa	10^{18}

Potenser med tilhørende bokstavforkortelser. * ikke SI-enheter (Système International)

Potenser er velegnet for repeterte mulitplikasjoner eller divisjoner.
$a^1 = a$
$a^0 = 1$
$a^{-n} = 1/a^n$
$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a \cdot a$ (antall a=n)
a^n uttales *a i n-te potens*

Regneoperasjoner med potenser

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (multiplikasjon\ av\ potenser)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ (divisjon\ av\ potenser)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (potens\ av\ potenser)$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (brøk\ som\ potens, n - te\ roten\ av\ a)$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \quad (brøk\ som\ potens, m-te\ roten\ av\ a\ i\ n-te)$$

Logaritmer

Logaritmer (gr. *logos* - forhold; *arithmos* - tall) er en måte å uttrykke tall som potenser av et basisgrunntall. De vanligste basisgrunntallene er 10 og det naturlige tallet *e* (e =2.718281828....)
Logaritmer med basistall 10 (**Briggske logaritmer**) skrives log eller $\log_{10}$, og logaritmer med basistall *e* (**naturlige logaritmer**) skrives ln eller $\log_e$ I det gamle realfagsgymnasiet satt vi med logaritmetabeller når vi skulle regne ut logaritmer. I dag gjøres det med lommekalkulator. Med logaritmer kan en multiplikasjon uttrykkes som en addisjon, og divisjon som en subtraksjon. Multiplikasjon av desimaltall blir lettere ved å ta i bruk logaritmer, og den skotske matematikeren John Napier (1550-1617) laget den første logaritmetabellen. **Regnestaven**, kalles også Napiers stav, ble flittig brukt i fysikktimen på reallinjen som jeg gikk på. På regnestaven er det logaritmiske skalaer som kan forflyttes i forhold til hverandre, sammen med en gjennomsiktig skyver.

Tall	Ekvivalent med	$\log_{10}$
0.01	10^{-2}	-2
0.1	10^{-1}	-1
1	10^{0}	0
10	10^{1}	1
100	10^{2}	2
1000	10^{3}	3
10000	10^{4}	4

Tabell som viser sammenheng mellom noen tall, uttrykt som titalls potens og logaritme med 10 som basisgrunntall.

Eksponentielle tall er uttrykt som potenser, f.eks. for 10^3 (10□10□10) er 3 **eksponenten** og kalles logaritmen. Når eksponentielle tall blir multiplisert med hverandre kan man få svaret ved å legge sammen eksponentene.
10^{-3} meter tilsvarer millimeter (mm), 10^{-6} meter tilsvarer mikrometer (µm) og 10^{-9} meter tilsvarer nanometer (nm).

Eks.

log 2= 0.301
log 200 = 2.301
log 2000 = 3.301
200 = $10^2 \cdot 10^{0.301}$
2000 = $10^3 \cdot 10^{0.301}$

Regneoperasjoner med logaritmer

Prinsippet for regneoperasjonene blir like enten man bruker Briggske logaritmer med grunntall 10 (*log* eller log_{10}) eller naturlige logaritmer med grunntall *e* (*ln*).

$$log(x \cdot y) = logx + logy$$

$$log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

$$log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x$$

$$logx^n = nlog\ x$$

$$log\left(\frac{1}{x^n}\right) = -nlogx$$

$$lnx = 2.303logx = ln10 \cdot logx$$

$$log10^y = y$$

$$10^{logy} = y$$

$$lne = 1$$

$$log10 = 1$$

$$ln10 = 2.303$$

$$lne^y = y$$

$$e^{lny} = y$$

pH-skalaen er en **logaritmisk skala**: pH = -log[H^+]. Det samme gjelder Beers lov som brukes i spektrometri hvor absorbansen A = -log I_o/I. Både Desibel-skalaen for lyddtrykk og og Richters skala for jordskjelvstyrke er logaritmiske.

En **logaritmisk spiral** som man finner igjen i vindingene i skallet hos noen snegler og nautilusblekksprut har en fast vinkel mellom radiusvektoren og tangenten gjennom hele spiralen. Den logaritmiske spiralen har polarkoordinatene r = a□e□φ hvor *a* er en konstant, det naturlige tallet *e* og vinkelen φ.

Frekvensen til en tone er halvparten av frekvensen til en tone som befinner seg en oktav opp. Frekvensen til en tone og dens påfølgende okstav blir 1:2:4:8:16:..., en logaritmisk skala med grunntall 2. Avstanden mellom tverrstripene på gripebrettet på en gitar følger en logaritmisk skala. Gripebrettet på fiolinene er laget etter samme prinsipp, men mangler de innlagte tverrstripene.

Den berømte sveitsiske matematikeren Leonhard Euler (1707-1783) innførte betegnelsen *e* for tallet hvor den naturlige logaritmen er lik 1:
Det naturlige tallet *e* =2.7182818...., et irrasjonalt og transcendentalt tall, og kan beregnes fra en uendelig rekke:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Den naturlige logaritme er lik integralet:

$$lnx = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

som betyr at:

$$1 = \int_1^e \frac{1}{t} dt$$

Rekken for eksponentialfunksjonen exp(x)= e^x kan uttrykkes mer generelt:

$$e = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Funksjonen e^x har følgende grenseverdi når n går mot uendelig (∞):

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Det naturlige tallet e treffer man igjen i Eulers ligning som kobler kvadratroten til – 1 fra komplekse tall og trigonometriske funksjoner:

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$$

Viss man setter θ=π får man en ligning som kobler e,π og i:

$$e^{i\pi} = -1$$

Tallet e opphøyd i uendelig er lik uendelig:

$$e^{\infty} = \infty$$

Tallet e opphøyd i minus uendelig er lik 0:

$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Volumer og arealer

Man får følgende overflateareal og volumer av:
En likesidet terning med lengden *s* på en av sidene:
En sylinder med lengde *l* langs lengdeaksen og radius *r:*
En kule med radius *r*. pi (π) = 3.14159...

Form	Overflateareal	Volum	Volum/areal
Likesidet terning	$6s^2$	s^3	s/6
Sylinder	$2\pi rl + 2\pi r^2$	$\pi r^2 l$	rl/(2l+2r)
Kule	$4\pi r^2$	$4/3\pi r^3$	r/3

En kule er det objektet som har minst mulig overflate i forhold til volumet. En såpeboble inntar en kuleform med minst mulig overflateareal pga overflatespenningen. Når flytende bly blir helt ned i vann blir blykulene helt runde, blyhagl. En sylinderbeholder motstår best trykk og dette kan man se på skip som frakter naturgass.

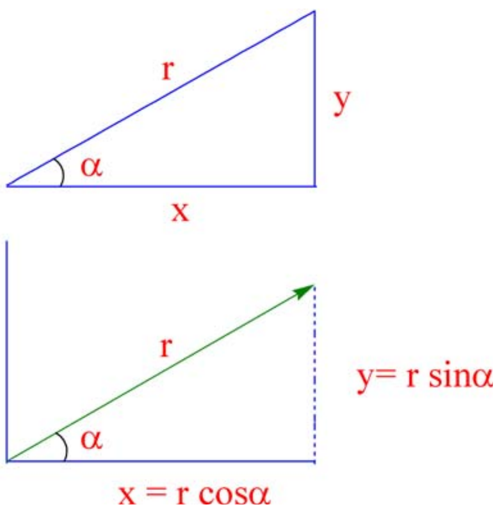
Egypterne kjente til volumet av en kvadratisk avkortet pyramide med høyde h, a er sidelengden av grunnflatekvadratet og b er siden i toppflatekvadratet:

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

Volumet av en pyramide er 1/3 av grunnflaten ganger høyden.
Pythagoras setning var allereie kjent i det gamle Babylonia.

Trigonometri

Trigonometri (gr. *trigonon* - trekant; *metri* - måling) omhandler måling av trekanter, vinkler og **trigonometriske funksjoner** som sinus, cosinus og tangens.
Vinkelen alfa (α) mellom to rette linjer kan måles i enten **grader** (^{o}) eller **radianer** (rad). En full omdreining av en sirkel tilsvarer 360^o = 2π radianer.
En rett vinkel er 90^o = π/2 radianer
Man kan regne om en vinkel i radianer til grader ved å multiplisere med 360/2π
På en lommekalkulator kan du velge om vinkelen måles i grader eller radianer. Det kan lett testes ved å beregne sin 90. Blir svaret 1 er enheten grader, blir svaret 0.893.. er enheten radianer.



En rettvinklet trekant med hypotenus = r og vinkel alfa (α) mellom hypotenus og hosliggende side x.

Pythagoras setning: i en rettvinklet trekant er kvadratet av den lengste siden (hypotenusen) lik summen av kvadratene av de to katetene:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Summen av vinklene i en likesidet trekant = 180^o.

$$sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$tan\alpha = \frac{y}{x}$$

Både *sin α* og *cos α* varierer mellom -1 og +1 dvs. -1 ≤ *sin α* ≤ 1, mens de tilsvarende verdiene for tangens blir ± ∞ (uendelig) -∞≤*tan α* ≤ ∞
Sinus og cosinus til forskjellige vinkler kan bestemmes ut fra rekkeutvikling som konvergerer raskt (α i radianer). En **konvergent rekke** konvergerer mot et tall.

$$sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \cdots$$

$$cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \cdots$$

Det er fleire sammenhenger mellom de trigonometriske funksjonene. For eksempel

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$$

Lamberts cosinus-lov kan brukes til å beregne solinnstråling i helninger. Lysmålere er ofte cosinus-korrigerte.

På samme måte som *sin α* og *cos α* ovenfor er uttrykt som en polynomtilpasning kan de fleste kontinuerlige funksjoner tilpasses med en polynomtilnærming:

$$log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

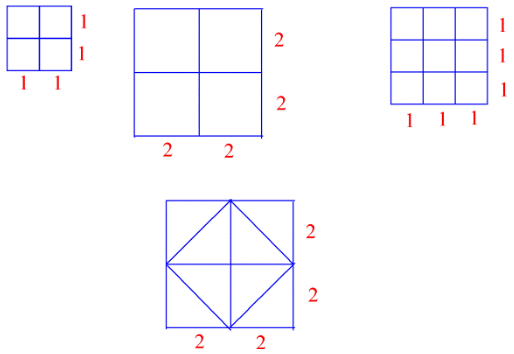
Funksjoner

Den enkleste relasjonen mellom to variable er en **rett linje** og som har funksjonen

$$y = a + bx$$

hvor *b* er stigningskoeffisienten (stigningstallet) til linjen og *a* er skjæring med y-aksen (ordinat). *y* kalles avhengig variabel og *x* er uavhengig variabel.
Eksempler på kurver som er ikke-lineære er eksponensialfunksjonen, logaritmefunksjonen, kurven for logistisk vekst (sigmoid funksjonen), sinus- og cosinus-funksjonen, potensfunksjonen, kvadratfunksjonen og rektangulær hyperbolsk funksjon.

En av Sokrates filosofiske samtaler, gjengitt i Platons *Menon*, i samtale med Menons slave. Sokrates starter med kvadratet til venstre med sidelengde 2 fot, og spør slaven hva arealet er. Slaven svarer riktig:4 kvadratfot.



Sokrates spør om slaven kan lage et kvadrat som er dobbelt så stort som det første? Slaven prøver seg med et kvadrat med sidekant 4 fot, men dette blir fire ganger så stort som det første, 16 kvadratfot. ”Ved Zevs”! Sokrates får derved slaven til å prøve seg med et kvadrat med sidekant 3 fot, men her blir arealet 9 kvadratfot, litt for stort. Samtalen fortsetter nå med Menon, om ”lengsel etter å vite”. Sokrates viser nå slaven et kvadrat med et indre kvadrat, ber han telle trekanter, og det indre kvadrat blir akkurat dobbelt så stort som det ble spurt etter, altså 8 kvadratfot.
Sokrates dømmes til å tømme giftbegeret med skarntyde, som straff for gudløshet og å forderve ungdommen.

Thales estimerte høyden av en pyramide ved å måle skyggelengden av pyramiden på det tidspunkt en stav med kjent lengde ga like lang skygge som seg sjølv.

Differensialregning

Formålet med differensialregning er å finne stigningen til funksjoner (gradienten), dvs. hvordan raten (tangenten) endrer seg på et bestemt punkt på en funksjon. Endring i populasjonsstørrelse er en ikke-lineær funksjon og man kan med differensialregning finne hvordan populasjonen endrer seg i tid.
Den deriverte av y med hensyn på x kalt f´(x) uttrykkes som dy/dx. Hvis vi har funksjonen $y=x^2$ så vil dy/dx = 2x

$$Hvis\ y = x^n \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$Hvis\ y = kx^n \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = knx^{n-1}$$

Og for den andrederiverte:

$$Hvis\ y = kx^n \quad \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = kn(n-1)x^{n-2}$$

Består y av to eller flere ledd som blir addert tar man å deriverer hvert enkelt ledd for seg.

y= f(x)	f´(x)=dy/dx
e^x	e^x
lnx	1/x
e^{ax}	ae^{ax}
a^x	$a^x \ln a$
sin x	cos x
cos x	-sin x

Deriverte av noen funksjoner

Kurver har vanligvis et (eller flere) maksimum og synker deretter, eller har et minimum og stiger deretter. For en deriverbar funksjon f(x) kan vi finne maksimums- og minimumspunktene ved å sette den deriverte lik null. Ved **vendepunktene** for kurven, maksimumspunktene og minimumspunktene er den **førstederiverte** lik 0 dvs. dy/dx = 0.
Skal man kunne bestemme hvilken av vendepunktene som er maksimums- eller minimumspunkter må man beregne den **andrederiverte** d^2y/dx^2 som man får ved å derivere en gang til.

Integrasjon

Integrasjon og derviasjon er motsatte regneprosesser og er et nødvendig verktøy for å kunne løse differensialligninger. Et **ubestemt integral** med åpne grenser har formen:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Forutsetter at n≠-1. *C* er en **integrasjonskonstant**.
Skalare verdier kan settes på utsiden av integralet. Integralet til en sum er lik summen av integralene.
Noen utvalgte integraler:

$$\int k\, dx = kx + C$$

$$\int kx\, dx = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = lnx + C$$
$$\int sinx\, dx = -cosx + C$$
$$\int cosx\, dx = sinx + C$$
$$\int e^x\, dx = e^x + C$$
$$\int \frac{1}{cos^2x} = tanx + C$$
$$\int k^x\, dx = \int e^{xlnk}\, dx = \frac{1}{lnk} e^{xlnk} + C = \frac{1}{lnk} k^x + C$$

Integraler kan løses ved substitusjon og delvis integrasjon. Hvis funksjonen er en brøk kan man forsøke å faktorisere nevneren i brøken ved delbrøkoppspalting.

Ønsker man å finne arealet (A) under en funksjon lager man et **bestemt integral** med øvre og nedre **integrasjonsgrense**.

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Differensialligninger

Differensialligninger er en ligning som inneholder en relasjon mellom forskjellige variable eller funksjoner og deres deriverte, både av første orden (første ordens differensialligninger) eller høyere orden. Differensialligninger kan løses numerisk vha. en datamaskin eller ved integrering. For å kunne løse ligningen ved integrering må relasjonene i ligningen settes opp på en slik form at de kan integreres og den deriverte elimineres ut av ligningen. Det kan være nødvendige å atskille variablene for å kunne løse ligningen. Ligningen kan kvantifiseres ved å sette inn verdier for variablene, såkalte grensebetingelser.
Den meste vanlige differensialligningen i biologi er en første ordens reaksjon av typen hvor A → B over tid. Hvis ligningen brukes til å kvantifisere nedbrytningen av noe, f.eks. radioaktive isotoper kommer det et minustegn på høyre side av ligningen.

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

hvor *k* er en positiv konstant, N er antallet av noe og *t* er tiden.

For å finne en løsning av denne integrerer vi på begge sider av likhetstegnet.

Ved omstokking og deretter integrering av begge sider av likhetstegnet får man:

$$\int \frac{dN}{N} = k\int dt$$

$$lnN = kt + C$$

Vi bruker eksponentialfunksjonen på begge sider av likhetstegnet:

$$e^{lnN} = e^{kt+C}$$

$$N(t) = lnN = e^{C} \cdot e^{kt}$$

Vi kaller funksjonen *N(t)* for å vise at *N* endrer seg med tiden *t*.

Hvis vi setter inn grensebetingelser har vi *N(0)* ved tiden *t*=0:

$$N(0) = lnN_0 = e^{C} \cdot e^{k0}$$

Det vil si at integrasjonskonstanten $C = e^c = \ln N_0$. Vi setter inn dette:

$$lnN = kt + lnN_0$$

Hvis vi plotter l*nN* mot *t* blir dette en rett linje med stigningskoeffisent *k* og skjæringspunkt *ln* N_0. N_0 blir antilog til skjæringen.

$$ln\frac{N}{N_0} = kt$$

Bruker eksponentialfunksjonen på begge sider av likhetstegnet og får:

$$N = N_0 e^{kt}$$

Viss vi setter inn den andre grensen ved halveringstiden $t_{1/2}$ dvs. $N=N_0/2$ får vi:

$$ln\frac{\frac{N_0}{2}}{N_0} = kt_{\frac{1}{2}}$$

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{ln2}{k} = \frac{0.693}{k}$$

På samme måten kan man beregne **doblingstiden** dvs. tiden hvor $N = 2N_0$.

Kombinatorikk

Ved kombinatorikk kan man finne antall mulige kombinasjoner
n! = 1·2·3·4·5···(n-1)·n (uttales n fakultet) for n≥1
0! = 1
Binomialkoeffisientene:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Trekker ut k tilfeller frå mengden n objekter på $\binom{n}{k}$ forskjellige måter

F.eks. sannsynligheten for å få 7 rette i Lotto hvor man skal trekke ut 7 riktige tall blant tallene 1-34:

$$\binom{n}{k} = \binom{34}{7} = 5379616$$

I følgende ligninger til koeffisientene utgjøre tallene i **Pascals trekant**:

$(a+b)^1 = 1a + 1b$
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
o.s.v.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Dette er det samme som starten:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

Pascals trekant var kjent frå 1100-tallet i Kina.

Vekst og veksthastigheter

Førsteordens ligningen i avsnittet foran kan brukes til å beregne doblingstider ved **eksponensiell vekst**. Vi skal imidlertid seinere se at den **logistiske vekstkurve** er mer representativ for vekstforhold for de fleste organismer.
Vi kaller størrelsen av biomassen på et tilfeldig valgt tidspunkt i vekstperioden for W(t).
Veksthastigheten blir da *dW/dt*.

Relativ veksthastighet RGR (relativ vekstrate) i forhold til utgangsbiomassen er:

$$RGR = \frac{1}{W}\frac{dW}{dt}$$

$$RGR = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{W}\frac{dW}{dt} = \frac{lnW_t - W_{t_0}}{t - t_0}$$

Setter vi RGR inn i ligningen frå førre avsnitt får vi:

$$W_t = W_0 e^{RGR \cdot t}$$

Hvis f.eks. veksthastigheten er 5% setter vi RGR=0.05. RGR får enheten f.eks. g g^{-1} dag^{-1} altså dag^{-1}. Måler man over en uke eller per år blir enheten uke^{-1}, eller $år^{-1}$.

Doblingstiden er ofte illustrerende dvs. tiden det tar før det blir dobbelt så mye ved en bestemt veksthastighet, altså $W_t=2W_0$. Da har vi at 2= 1□2 i ligningen over dvs.: $e^{RGR \cdot t} = 2$. I denne ligningen kan vi ta den naturlige logaritmen på begge sider av likhetstegnet og får da at RGR·t=ln2=0.693
Ved 5% veksthastighet (RGR=0.05) blir doblingstiden ca. 14 dager. Hvis veksthastigheten er 23% (RGR=0.23) blir doblingstiden ca. 3 dager.

I 1960 var befolkningen på jorda ca. 3 milliarder. I oktober 1999 var befolkningen på jorda 6 milliarder, i februar 2006 er den 6.5 milliarder. Nå synes det som om veksten flater noe av, men med f.eks. en veksthastighet på 2% og eksponensiell vekst vil man få en dobling av befolkningen i løpet av 35 år. 1% økning gir en dobling i løpet av ca. 70 år.
Hvis alle menneskene på jorda forbruker like mye av de begrensede ressursene,

spesielt fossilt brensel, som man i dag gjør i den vestlige verden, altså likhetsprinsippet, er dette en ikke-bærekraftig utvikling, som før eller siden vil gi dramatiske omstillinger i vår levemåte. Størst befolkningsvekst er det i fattige land, og den eneste måten å stoppe befolkningsøkningen er å gi **alle** verdens kvinner en lang og god utdannelse samt lønnet arbeid.

I løpet av antall år	Menneskepopulasjon	Årstall det ble nådd
10.000 år	1 milliard	1800
130 år	2 milliarder	1930
30 år	3 milliarder	1960
15 år	4 milliarder	1975
12 år	5 milliarder	1987
12 år	6 milliarder	1999
12 år ?	7 milliarder	2011 ?

Vekst av populasjonen *Homo sapiens* angitt hvor mange år det tar før vi har en ny milliard. Denne tabellen viser en av menneskehetens største utfordringer.

Tallenes historie

I byttehandel, måling av jordeiendom, telling av buskap og mennesker, bygging og beregning av avstander ble det behov for tall. Et tall kan brukes til å beskrive antall objekter, lengde eller tid. Ordet pekuniær kommer fra pecus – dyreflokk. Kalkyle og kalkulere fra gr. *khaliks* - stein, l. *calculus* - småstein. Pinner eller knuter på tau ble brukt til å angi tallene.   Hver kultur hadde sine egne tallsystemer. Babylonerne og sumererne brukte grunntallet 60, noe vi finner igjen i tidsmåling og gradinndeling av jorda i sekunder og minutter. Grekerne brukte bokstavene alfa (α) til theta (θ) for tallene 1 til 9. Mayaene og aztekere brukte grunntall 20. Grekere, hetitter, romere og egyptere brukte grunntall 10, naturlig ut fra 10 fingre. Ulempen med 10-tallsystemet er at 10 ikke er delelig med 3. Språkmessig indikerer navnene på tallene at de har samme historiske opprinnelse.

Kalkulator, en som regner, kalkulere, henviser til *calculus* = småstein, regnebrikker, brukt i regnebrettet abakus. Hvor mange symboler som var nødvendig for å uttrykke tallene varierte. Etruskerne hadde lært av grekerne og laget et innsnitt i bein, tre eller leire for hver hendelse. Innsnitt i en pinne eller stokk , karvestokk, henger igjen i det latinske *computare*-skjære, og det engelske computer (datamaskin), count (eng.), compte (fr.)=å telle Vi kjenner dette igjen i romertallene I (1), V (5) og X (10), men romertallene (L (50), C (100), D (500) og M (1000)) er det umulig å regne med.

Grunntallet 60, er grunntallet med flest divisorer og er delelig med heltallene 1-6, dessutan 10,12,15,20 og 30. Et grunntall som er delelig på mange tall er gunstig. Det finnes igjen i time som deles i 60 minutter, inndeling av sirkelen i 6 deler á 60 grader=360 grader (^{o}), samt 360 dager i året, egentlig ca. 365. 12 er et annet grunntall som kan ha sin opprinnelse ved telling av antall fingerledd (unntatt tommel), men hvor tommelleddene kan brukes til å angi antall 12-ere, 12-24-36-48-60, og året har 12 månetegn (12·30=360). Kroppen ble brukt i fot- eller albuemål. Tallet 20 (3x20=60) vises i målenheter, bl.a. den danske tellemåten tress (60), halvfjers, firs (80). Eller som i fransk: vingt (20) eller quatre-vingts (80).

Egypterne innførte grunntallet 10, basert på de 10 fingre. Alle ti-tallsenhetene har fått egne navn, ti, hundre, tusen, million, milliard, osv. Grekerne brukt myriade om tallet titusen, men for oss betyr det et udefinert stort tall.

En favn som lengdemål var avstanden mellom langfingrene på utstrakte armer, jfr. da Vincis den vitruviske mann, omtrent lik høyden til en person. En norsk favn var 1.88 meter. Favn blir også brukt som rommål for ved. En favn ved var 6 fot bred og høyde lik 1 alen. I dag er en favn ved en stabel som er 2 meter bred, 2 meter høy og med vedlengde 0.6 meter, altså 2.4 m^3. En storfavn ved er lik 2·2·3=12 m^3.

Et bismerpund var en gammel norsk handelsvekt som baserte seg på vektstangprinsippet. Et bismerpund=12 pund=24 merker , tilsvarende i dag ca. 5.997 kg.

Lengden av en nautisk mil ble i starten definert som meridianlengden man seilte tilsvarende et bueminutt. Maupertuis meridianmåling gjennom svensk Lappland viste at Jorden er flattrykt ved polene. Frankrike er en pioner og definerer en meter som en milliontedel av jordkvadranten gjennom Paris. Derved ble en nautisk mil 1000000/90·60= 1851.85 meter. Hastighet til båter måles i knop (nederlandsk *knoop*=knute), tilsvarende knutene man hadde på en håndloggline. 1 knop tilsvarer 1 nautisk mil per time. Meridianen var litt lenger enn man beregnet i starten, og nå er en nautisk mil definert som 1852 meter. Viss det var en knute per 30 sekunder tilsvarer dette 1852/60·60=0.514 meter per sekund. Lengden mellom knutene vil da bli 0.514·30=15.43 meter. Nautisk mil er fremdeles en aktuell måleenhet.

Snes (20), skokk (3·20=60), tylvt (12), dusin (12), gross (12·12=144), tommer (1 tomme=12 linjer=12·12 skrupler) og alen er gamle måleenheter. Alen er lengden av underarmen fra albu til fingerspiss (l. *ulna*=albue), delt i to fot á 10 eller 12 tommer. Lengden av en alen varierte mellom forskjellige land. En norsk alen var 0.6275 meter. Mayaindianerne hadde et tyvetallsystem og brukte prikker og streker som symbol for tallene, og null hadde et spesielt tegn. Tallene 1-4 ble angitt med henholdsvis 1-4 prikker, 5 ble en horisontal strek, 6 var en strek med en prikk over osv., til 10 med to horisontale streker, og slik fortsatte man.

Tallmystikk. Historisk har noen av tallene fått tillagt spesielle egenskaper og forekommer derfor ofte. Grunnen til 7-tallet ble utvalgt skyldes kanskje 7 hovedstjerner i Karlsvogna, 4 månefaser fordelt på 28 døgn, 5 på den tid kjente

planeter +2 sol og måne, også koblet til de 7 metallene man visste om, 7 åpninger i hodet, syvarmet lysestake, verdens 7 underverker, 7 dager i uken, 7 farger (ROGGBIF), 7 frie sysler (**trivium** (grammatikk, retorikk og dialektikk (talekunst))+ **kvadrivium** (aritmetikk, geometri, astronomi og musikk) som frie mennesker syslet med.
Tallet 666 frå Johannes åpenbaring er lik summen av tallene 1-36.
Det fullkomne tallet 28 er lik summen av tallene 1-7.

Posisjonsprinsippet, tallenes plassering i forhold til andre tall, ble introdusert i Babylonia, og da tallet null (0) ble tatt i bruk av inderne kunne symbolene 0-9 brukes til å uttrykke alle tall. Abakus med regnestein, regnebord med regnepenger og kuleramme ble brukt til beregning. Grekeren Hippasos fra Metapont, elev av Pythagoras, studerte sammenhengen mellom musikk og tall, stjernefemkanten, dodekaederet og fant at diagonalen i et enhetskvadrat har lengde lik kvadratroten til tallet 2.

Evklid (Euklid) (450-380 f.kr.) var elev av Sokrates, filosof og en av antikkens store matematikere med verket *Stoikheia (Elementer*), bestående av 13 bøker (kapitler) Euklid innførte **aksiomer**, grunnsetninger eller postulater som danner grunnlaget for matematikken. Eksempler på Euklids aksiomer:
- Det finnes bare en linje gjennom to punkter.
- En rett linje kan fortsette i begge ender i det uendelige
- Det er mulig å lage en sirkel med hvilket som helst sentrum og radius
- Har man en rett linje og ett punkt så finnes det bare en linje gjennom punktet som er parallell med den første linjen (parallellaksiomet).

Parallellaksiomet som sier at to parallelle linjer aldri skjærer hverandre, er det fremdeles uenighet om. Vil de parallelle linjene skjære hverandre et sted langt ute i et krumt verdensrom, eller kunne det tenkes at når de parallelle linjene ble forlenget i den ene enden i det uendelige så ville begge de parallelle linjene komme tilbake til utgangspunktet ? I hyperbolsk geometri gjelder ikkje parallellaksiomet. Betrand Russel (1872-1970) fortsatte studier av aksiomer som ikke må føre til selvmotsigelser, og sammen med Alfred North Whitehead (1861-1942) skrev han *Principia mathematica* (Matematikkens prinsipper) i tre bind i perioden 1910-1913. Uendelighet skaper problemer: Det er en etterfølger etter ethvert naturlig tall.

Evklid studerte geometriske figurer hvor alle sidene er like. Trekantet pyramide, terning (4), oktaeder (8), dodekaeder (12) og ikosaeder (20).
Forskjellige snitt av en kjegle gir forskjellige figurer **(kjeglesnitt**): sirkel, ellipse, parabel og hyperbel, ble beskrevet av Evklid.
Planetbaner er ellipser. På en sirkel har alle punktene samme avstand fra sentrum.

Det er mange regneoppgaver som har gammel opprinnelse. For eksempel av typen Hvor mange kroner skal deles og hvor mange personer er det ?
Hvis hver får 6 kroner, blir det 5 kroner til overs. Hvis hver får 7 kroner blir det 8 kroner for lite. Vi lar x være antall personer.

$$x \cdot 6 + 5 = x \cdot 7 - 8 \quad \rightarrow x = 13$$

Det vil si 13 personer som skal dele 83 kroner.

En oppgave fra Fibonacci (Leonardo fra Pisa): 7 kvinner kommer til Roma, hver med 7 esler, hvert esel bærer 7 sekker, hver sekk inneholder 7 brød. Hva blir summen av tallene ?

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 7 + 49 + 343 + 2401 = 2800$$

Georg Cantor (1845-1918) innførte mengdelæren. En **mengde** er en samling objekter med en tilhørende beskrivelse. Algebraen tilknyttet mengder kalles **Boolsk algebra** etter George Boole (1815-1864). **Union** (eller, ∪) er en ny mengde som inneholder objektene fra to eller flere mengder. **Snitt** (og, ∩) er en ny mengde som inneholder det som er felles for to eller flere mengder. Nullmengden inneholder ingen objekter. **Transfinite tall** (transfinite kardinaltall) er antall elementer i en uendelige mengde, uttrykt som den første bokstaven i det hebraiske alfabet, alef (א). Alef 0 ($\aleph_0$) er antall elementer i mengden av naturlige tall {1,2,3,......,}.
Uendelige rekker ble fascinerende og noen konvergerte. For eksempel Leibniz rekke, opprinnelig studert i India:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) definerte mengde og innførte matematisk logikk i *Grundlagen der Aritmetik* (Aritmetikkens grunnlag) (1884). Ifølge Aristoteles syllogismer er et utsagn sant eller galt, og fra premisser følger en logisk konklusjon. Det er en nær sammenheng mellom mengdelære og logikk. Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) innførte begrepet intuisjonisme i tilknytning til matematisk filosofi. Andre viktige bidragsytere innen matematisk logikk er David Hilbert (1862-1943), Alan Mathison Turing (!912-1954) (Turingmaskin og kryptologi), John von Neumann (1903-1957) og Kurt Gödel (1906-1978). Det fascinerende med menneskehjernens logiske egenskaper og beskrivelse av den fysiske verden.

En **avbildning** vil si at ethvert punkt i en mengde kan tilordnes et punkt i en ny avbildet mengde i et annet topologisk rom. Topologiens grunnleggere var H. Poincaré og G.R.B. Riemann. Eulers funksjon angir sammenhengen mellom antallet kanter, hjørner og flater i et polyeder.

Høydekurver på et kart danner et konturkart, og jo tettere høydekurvene ligger desto brattere terreng. Avstanden mellom linjene kalles ekvidistanse. Disse høydekurvene er en avbildning fra et tredimensjonalt rom (R^3) til et todimensjonalt rom (R^2). Tall-linjen har dimensjonen R^1. Den italienske matematikeren Guiseppe Peano (1858-1932) samlet alle setninger i matematikken i *Formulario mathematico*, og innførte peano-kurver som kontinuerlige avbildninger fra et kvadrat til en linje.

Gottfried Leibnitz (1646-1716) innførte en prikk (·) som gangetegn og kolon (:) som deletegn. Den engelske matematikeren John Wallis (1616-1703) som arbeidet med uendelige tallrekker og innførte negative eksponenter, introduserte et tegn for uendelighet i form av et liggende 8-tall (∞). Det var Robert Recorde (1510-1558) som innførte to parallelle linjer (=) som likhetstegn i *The whetstone of witte* (1557).

Matriser og vektorer

En ***m x n*** **matrise** har *m* rader og *n* kolonner. En **kvadratmatrise** (*n x n*) har samme antall rader (*n*) og kolonner (*n*).

En **diagonalmatrise** inneholder bare nuller bortsett fra diagonalen. En **identitetsmatrise** er en diagonalmatrise hvor alle tallene på diagonalen er lik 1. En nullmatrise inneholder bare nuller.

Transposere en *m x n* matrise vil si å lage en ny matrise hvor rader og kolonner har byttet plass.

En **symmetrisk matrise** er en kvadratmatrise hvor tallene er symmetrisk omkring diagonalen ($a_{ij}=a_{ji}$).

En **øvre triangulær matrise** vil si at alle tallene under diagonalen er lik 0. En **nedre triangulær matrise** vil si at alle tallene over diagonalen er 0.

Hvis *A* er en 3 x 3 matrise, med a_{ij} hvor *i* er rad og *j* er kolonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

En **n-vektor** er en liste med n tall i form av en **radvektor**:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Eller en **kolonnevektor**:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Viss vi har to vektorer A og B i et n-dimensjonalt vektorrom:

$$A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \quad B = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$$

så blir summen av vektorene lik:

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n)$$

Vektorer kan adderes, subtraheres, og det kan foretas multiplisering med en **skalar**. En skalar er vanligvis et reelt tall, men kan også være et komplekst tall.

Hvis vi har to vektorer X og Y i et todimensjonalt rom (R^2) så vil summen av vektorene X+Y bli lik diagonalen i et parallellogram dannet av sidene X og Y.

Vi kan multiplisere en vektor med en **skalar** *r*: En skalar kan betraktes som en 1 x 1 matrise og består av bare ett tall:

$$rA = (ra_1, ra_2, ra_3, \dots, ra_n)$$

Hvis vi har tre matriser *A*, *B* og *C* har vi følgende regneregler for matriser, men vær oppmerksom på at A·B er forskjellig frå B·A

$(AB)C = A(BC)$
$(A + B)C = AC + BC$
$A(B + C) = AB + AC$
$k(AB) = (kA)B = A(kB) = (AB)k$

Hvis en todimensjonal matrise blir multiplisert med en endimensjonal vektor:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & by \\ cx & dy \end{pmatrix}$$

To todimensjonale vektorer multiplisert med hverandre:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

En 2x3 matrise multiplisert med en 3x1 kolonnevektor:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{pmatrix}$$

En 2x1 kolonnevektor multiplisert med en 1x2 radvektor:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ bx & by \end{pmatrix}$$

men det er ikkje lov å multiplisere en 2x2 matrise med en 1x2 radvektor.

Viss vi har en *nxn* kvadratmatrise A så har vi følgende sammenheng:

$$Av = \lambda v$$

Hvor *v* er **egenvektor** og *λ* er en skalar kalt **egenverd**i. Altså:
matrise ·egenvektor = skalar ·egenvektor.

Egenverdien gir informasjon om en matrise krymper eller strekker et system.
Vi flytter alle leddene med egenvektor over på venstre side av likhetstegnet hvor 0 er en vektor med bare nuller:

$$Av - \lambda v = 0$$

Skalaren har ikke samme dimensjon som matrisen *A*, derfor kan ikke egenvektoren nu (*v*) settes utenfor en parentes. I stedet multipliserer vi ledd som ikke er multiplisert med en matrise med identitetsmatrisen *I*:

$$Av - \lambda Iv = 0$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

For at egenvektoren skal ha en retning og ikke bare bestå av nuller må ikke (A - λv)

være inverterbar (determinaten til (A - λv)=0).

Hvis vi lar A være en 2x2 matrise, så skal vi skal se litt på egenskapene til 2x2 matriser:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Så vil determinanten (detA) for matrisen A være lik:

$$det = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Vi har sett på addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av matriser, men vi kan ikke dividere matriser. Hvis vi har 3 matriser A, B og C og sammenhengen A·B=C og setter A=C/B så kan vi ikke multiplisere begge sider med B fordi B·A=C er ikke det samme A·B=C. Multiplikasjon av matriser er ikke kommutative, dvs. A·B er forskjellig fra B·A. Imidlertid, på kvadratmatriser er det en regneoperasjon som tilsvarer divisjon, og det er den inverse matrise.
En kvadratmatrise *nxn* er inverterbar bare og bare hvis *det(A)* er forskjellig fra null og hvis vi har en invers matrise (A^{-1}) gjelder:

$$detA^{-1} = \frac{1}{detA}$$

En kvadratmatrise *A* har en **invers matrise** (A^{-1}) slik at produktet av matrisen og den inverse matrisen er lik identitetsmatrisen.

$$A \cdot A^{-1} = I$$

hvor *I* er en **identitetsmatrise**. En invers matrise A^{-1} reverserer strekning, krympning

eller rotasjon forårsaket av en matrise *A*. Hvis en vektor blir multiplisert med matrisen *A* og deretter med den inverse matrisen A^{-1} så kommer man tilbake til den opprinnelige vektoren.
Vi kan bare finne en invers matrise for en kvadratmatrise hvis kvadratmatrisen har en determinant som er forskjellig fra 0, og en slik matrise kalles invertibel eller ikkesingulær. Er determinanten lik 0 er det ingen invers matrise, og en slik matrise kalles ikkeinvertibel eller singulær.

Hvis vi lar *A* være *2x2* matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Så vil den inverse matrisen A^{-1} være:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Vi har videre determinanten med egenverdier λ:

$$det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$

Det **karakteristiske polynom** til en inverterbare matrise *A* ($P_A(\lambda)$) er lik

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$$

og er et nte-ordens polynom i *λ*. De *n* egenverdiene til matrisen *A* er *n* røtter til det karakteristiske polynomet, λ_1, λ_2, ... λ_n. Det betyr at vi kan beregne egenverdiene til en matrise uten å bestemme egenvektoren.

For en *2x2* kvadratmatrise blir løsningen av egenverdiene for kvadratformelen ovenfor lik:

$$\lambda_1 = \frac{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

For en *n x n* matrise A= a_{ij} kan vi definere **trace A** (*tr(A)*) som summen av diagonalelementene i matrisen:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$$

Vi har derved:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$$

Egenverdiene til matrisen *A* er røttene til det karakteristiske polynomet P_A. Anta at λ_1 og λ_2 er røttene til P_A. Da har vi:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Som betyr at:

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$det(A) = \lambda_1\lambda_2$$

Alternativt kan vi beregne egenverdiene for en *2x2* matrise fra trace og determinant:

$$\lambda_1 = \frac{tr(A) + \sqrt{(tr(A))^2 - 4det(A)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{tr(A) - \sqrt{(tr(A))^2 - 4det(A)}}{2}$$

For en *2x2* matrise så vil de to egenverdiene har samme fortegn til *determinanten det(A)* er positiv. Når *det(A)* er positiv (>0) så vil begge egenverdiene være positive når *tr(A)* er positiv og negative når *tr(A)* er negativ. Når *det(A)*<0 vil en av egenverdiene være positiv og den andre negativ.

Eksempel på en 2x2 matrise med reelle og like egenverdier er:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Anta at vi har en *2x2* matrise:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$tr(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$$

$$det(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Da har vi det karakteristiske polynomet til matrisen A:

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda) - 4$$

$$tr(A) = 3 + 3 = 6 = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$det(A) = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 5 = \lambda_1\lambda_2$$

Vi finner at egenverdiene til *A* er λ_1=5 og λ_2=1 ut fra formelen ovenfor:

$$\lambda_1 = \frac{6 + \sqrt{6^2 - 4 \cdot 5}}{2} = 5$$

$$\lambda_1 = \frac{6 - \sqrt{6^2 - 4 \cdot 5}}{2} = 1$$

Diskriminanten (*D(A)*) til matrise *A* er:

$$D(A) = [tr(A)]^2 - 4det(A)$$

D=36-20=16
Når D(A) >0 er egenverdiene til *A* relle og distinkte
Når D(A) = 0 er egenverdiene *A* relle og like
Når D(A) < 0 er egenverdiene til *A* komplekse konjugate par.

Den inverse matrisen A^{-1} blir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Når egenverdiene er funnet kan egenvektorene bestemmes.
Egenvektoren viser retningen som et system skrumper eller øker, men lengden av egenvektoren har mindre betydning.

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

Kalles den høyre egenvektoren til *A*, mens

$$v \cdot A = v \cdot \lambda$$

kalles den venstre egenvektoren til *A*.
Høyre og venstre egenvektor er nødvendigvis ikke like store.

Hvis vi har et par differensialligninger:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Så kan disse uttrykkes i matriseform:

$$\dot{X} = AX$$

hvor

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad \dot{X} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

med initialbetingelsene x(0)=x_0 og y(0)=y_0

$$X_0 = \binom{x_0}{y_0}$$

Hvis diskriminanten til A er >0 har vi reelle og distinkte egenverdier til A kan differensialligningene løses med en generell løsning:

$$X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

hvor v_1 og v_2 er egenvektorer og α_1 og α_2 er skalarer.

Ved initialbetingelsene:

$$X(0) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$
$$A\binom{\alpha_1}{\alpha_2} = X_0$$

Vi kan bestemme α_1 og α_2:

$$\binom{\alpha_1}{\alpha_2} = A^{-1} X_0$$

Og vi har generelt:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Generelt hvis vi har differensialligningene og en modell med to variable:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Så vil den tilsvarende **Jacobi-matrise** med de partiell deriverte være:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ved likevekt vil vi ha dx/dt = 0 og dy/dt = 0 og vi kan benytte Jacobi-matrisen til å studere stabiliteten ved likevektspunktet. Systemet vokser eller synker i en retning bestemt av egenvektorene og med hastighet bestemt av egenverdiene. Jacobimatrisen kalles en lokal stabilitetsmatrise. Alle egenverdiene må være negative hvis likevektspunktet skal være stabilt.
Likevektspunktet er hyperbolsk hvis egenverdiene til Jacobimatrisen nær likevektspunktet har reelle verdier og forskjellig fra null. Hvis egenverdiene er komplekse tall så vil systemet gå i spiral rundt likevektspunktet.

Hvis vi har et system med differensialligninger satt opp på matriseform:

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

og *A* er en *2x2* matrise så vil likevekt være en sink hvis egenverdiene til A er negative, en kilde hvis egenverdiene er positive og et sadelpunkt hvis egenverdiene har motsatt fortegn.

Avbildninger

En matrise kan betraktes som en **avbildning**. Et n-dimensjonalt vektorrom (R^n) kan avbildes i et annet vektorrom (R^n) hvor *F* kan uttrykkes som en *m x n* matrise

$$L_F: R^n \rightarrow R^n$$

hvor

$$L_F(x) = F \cdot x$$

En linje kan avbildes til en annen linje (R → R), en flate kan avbildes til en annen flate ($R^2 \rightarrow R^2$) eller en tredimensjonal flate kan avbildes til en annen tredimensjonal flate ($R^3 \rightarrow R^3$).

En avbildning $R^2 \rightarrow R^2$ kan uttrykkes som en *2 x 2* matrise F med reelle tall:

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

hvor ethvert punkt i den ene flaten (u,v) avbildes til nye punkter (x,y) på den andre flaten slik at:

$$x = au + bv$$
$$y = cu + dv$$

Analogt som vi gjorde tidligere blir determinanten til den lineære avbildningen (det F):

$$det(F) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Alle matriseavbildninger er lineære avbildninger. En lineær avbildning F: $R^2 \rightarrow R^2$ avbilder et plan entydig på seg selv hvis og bare hvis determinanten til F er forskjellig fra 0. I dette tilfellet finnes det en invers avbildning (matrise) F^{-1} hvor produktet av disse er lik en identitetsavbildning (identitetsmatrise) I:

$$F \cdot F^{-1} = I$$

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinanten til I blir lik 1 (det I=1). Identitetsmatrisen har 1-tall på diagonalen, mens alle andre tall i matrisen er lik 0. Identitetsmatrisen avbilder ethvert punkt på seg selv. Hvis determinanten er lik 0 vil et plan bli avbildet inn i en rett linje som går gjennom origo.

Hvis vi har to ortogonale enhetsvektorer (1,0) og (0,1) så vil 2 x 2 matrisen F nedenfor rotere planet mot klokka med en vinkel θ

$$F = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

$$det(F) = cos^2\theta + sin^2\theta$$

og det betyr at det ikke skjer noe endring i areal ved rotasjonen.

En avbildning:

$$F = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

gjør at punkter (x,y) avbildes til (a·x,d·y), det vil si at avhengig av verdiene av a og d vil x- og y-koordinatene strekkes eller krympes. Hvis d=1 pg a>0 så vil x-aksen forlenges med ax og arealendringen blir lik determinanten til F (detF).

En avbildning kan gi endring i areal. Dette er selvsagt hvis determinanten til avbildningen er lik 0, hvor en flate avbildes til en linje. Hvis determinanten er forskjellig fra 0 vil rektangler avbildes til parallellogrammer. Vi kan beregne endringen i areal ved en lineær avbildning ved å dele opp avbildningen i enklere avbildninger. Arealendringen ved avbildningen blir lik absoluttverdien til determinanten.

Hvis vi har punkter (u,v) som avbildes til punkter (x,y) i R^2, x=x(u,v) og y=y(u,v) så kan vi uttrykke den deriverte i punktene (u,v) som en lineær avbildning i form av en **Jacobi-matrise** med tilhørende partiellderiverte. Oppkalt etter Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851).

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Determinanten til Jacobi-matrisen:

$$det\big(J(x,y)\big) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Modeller

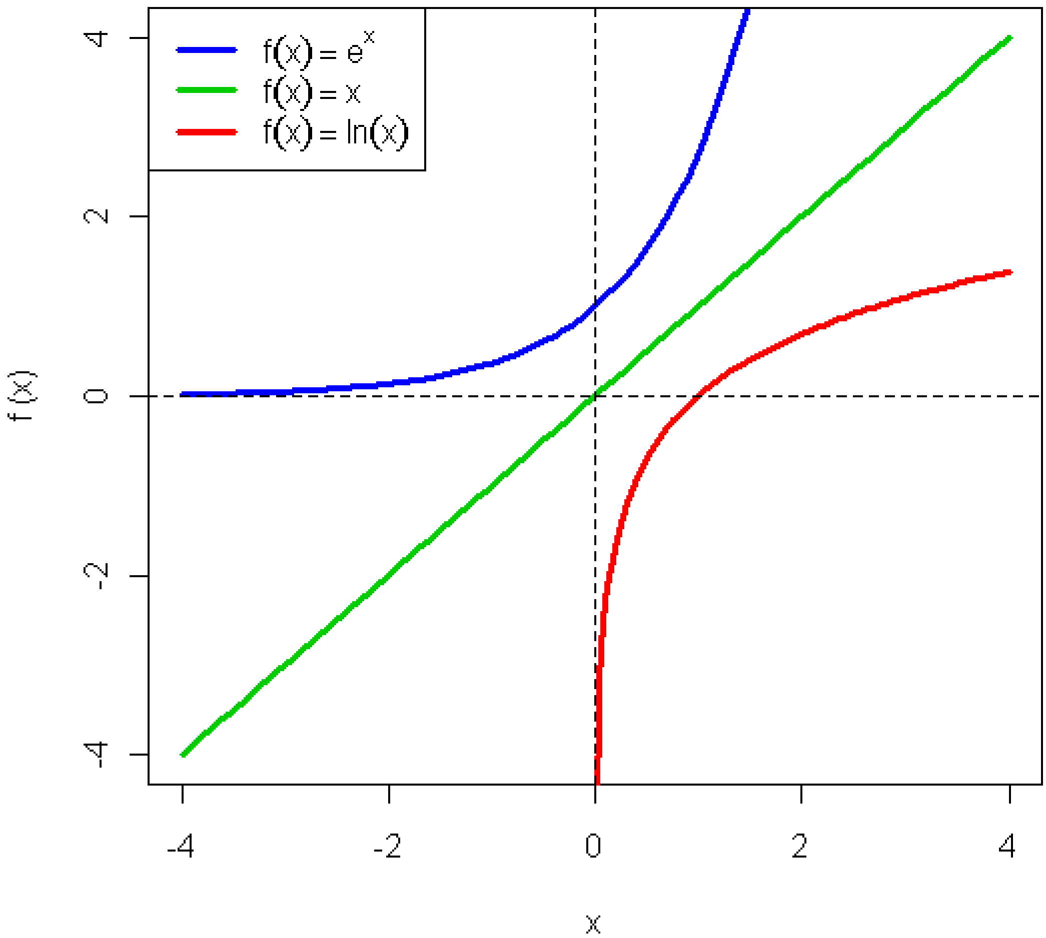
En dynamisk modell er en forenklet framstilling av den virkelige verden i form av ligninger. Kalles dynamisk fordi modellen viser hvordan systemet oppfører seg over tid. Man kan lage en matematisk modell av et økosystem, populasjon eller av været brukt av meteorologene. I arbeidet med modellen samles og systematiseres kunnskap. Modellen brukes til å forstå systemet, forutsi hendelser og trekke konklusjoner fra modellen, og se om det modellen predikterer stemmer med virkeligheten. Modellen har et sett med tilstandsvariable som oppsummerer egenskapene til systemet. Dynamiske ligninger viser hvordan tilstandsvariable endrer seg over tid.
Eksempler er Lotka-Volterra-modellen for predator-byttedyr, diffusjon, og rute-

systemer e.g. Conways game of life. Den engelske matematikeren John Horton Conway (**Conways game of life**) utforsket simulering av en populasjon med celler og dens utvikling over tid. Starter med et sett av levende celler i et rutenett. Antall celler fra en runde til den neste endrer seg.
Hver celle har 8 naboceller, 4 på siden og 4 på diagonalen. Dette gir $2^9 = 512$ muligheter for celler og naboer. Ytterst på rutenettet blir det færre naboer.
Prinsippet kan være følgende:
En levende celle med færre enn to naboer dør av ensomhet
En levende celle med flere enn 3 levende naboer dør av trengsel
En levende celle med 2 eller 3 levende naboer lever og forblir levende
En død celle med 3 levende naboer blir levende.

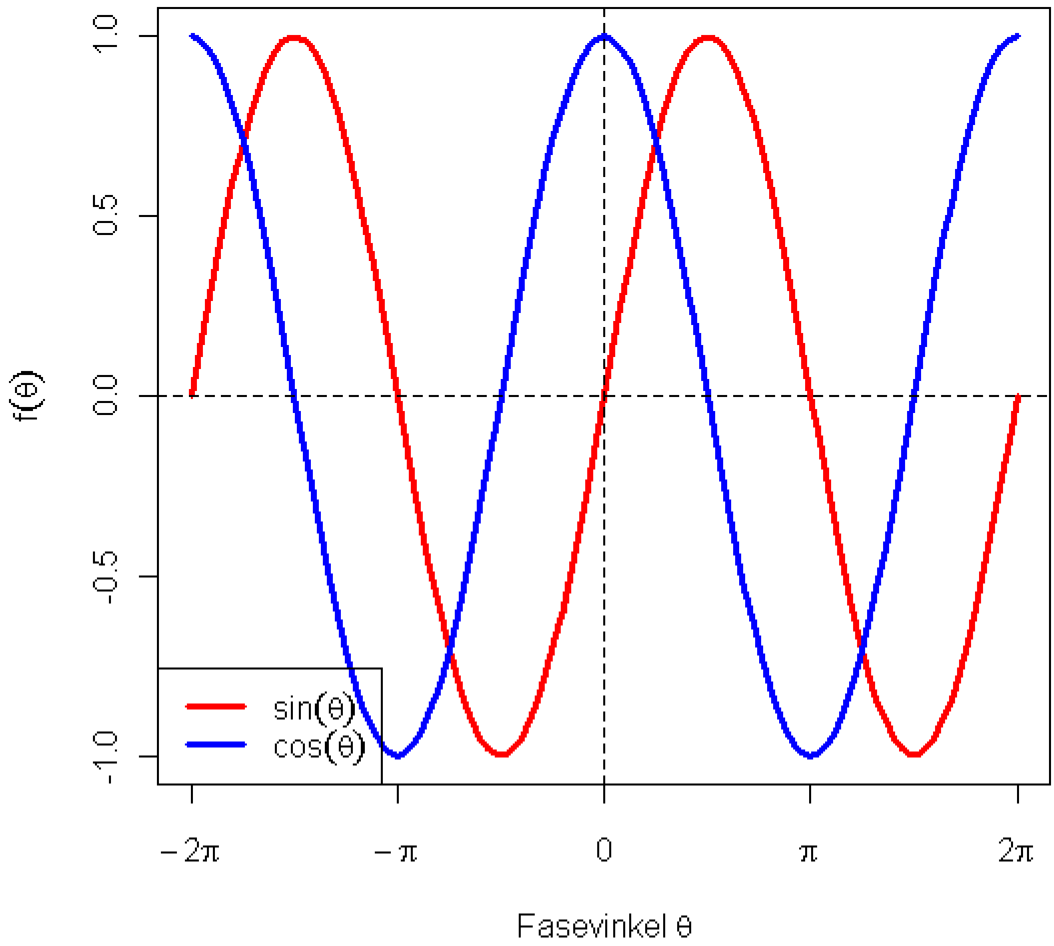
Dette danner en todimensjonal boolsk matrise, og det enkleste spillet er endimensjonalt hvor hver celle har to muligheter. Med dette settet av regler oppstår bl.a. glidere, en samling av celler som glir og forflytter seg over nettverket.

Funksjoner

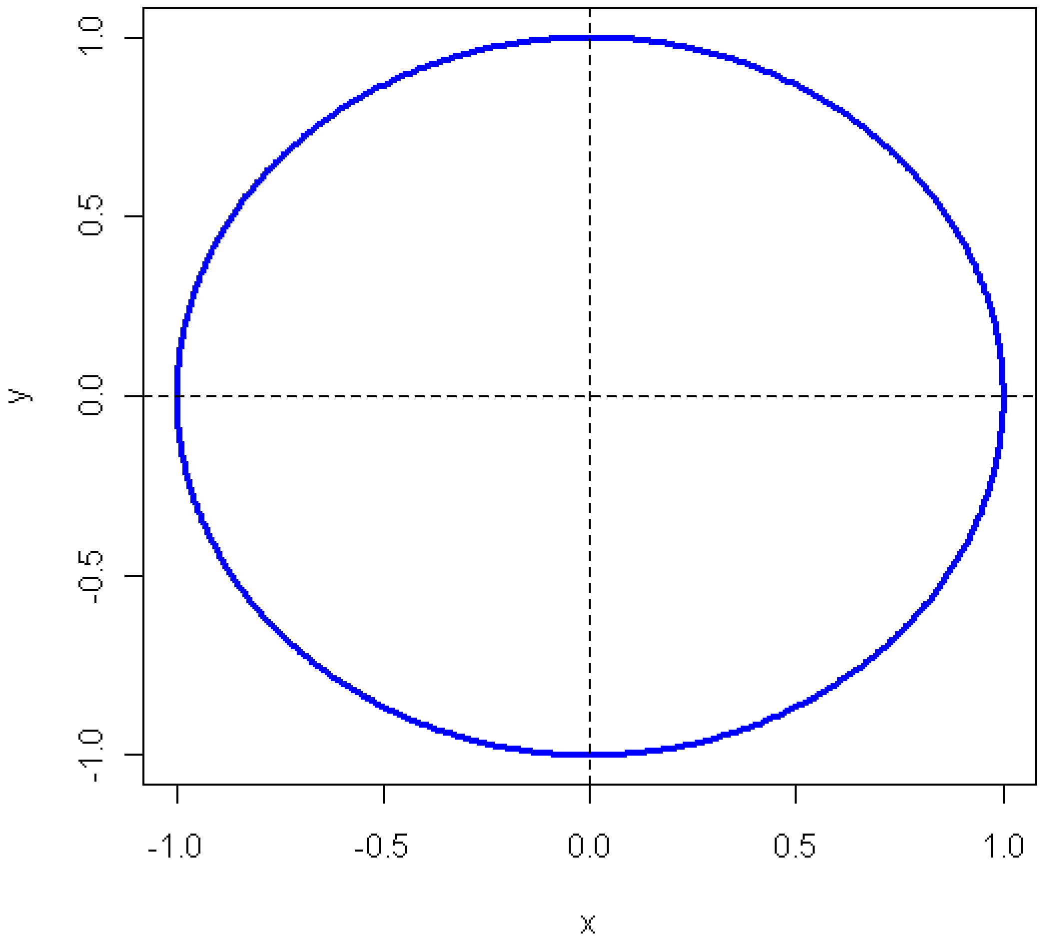
Eksempler på noen funksjoner



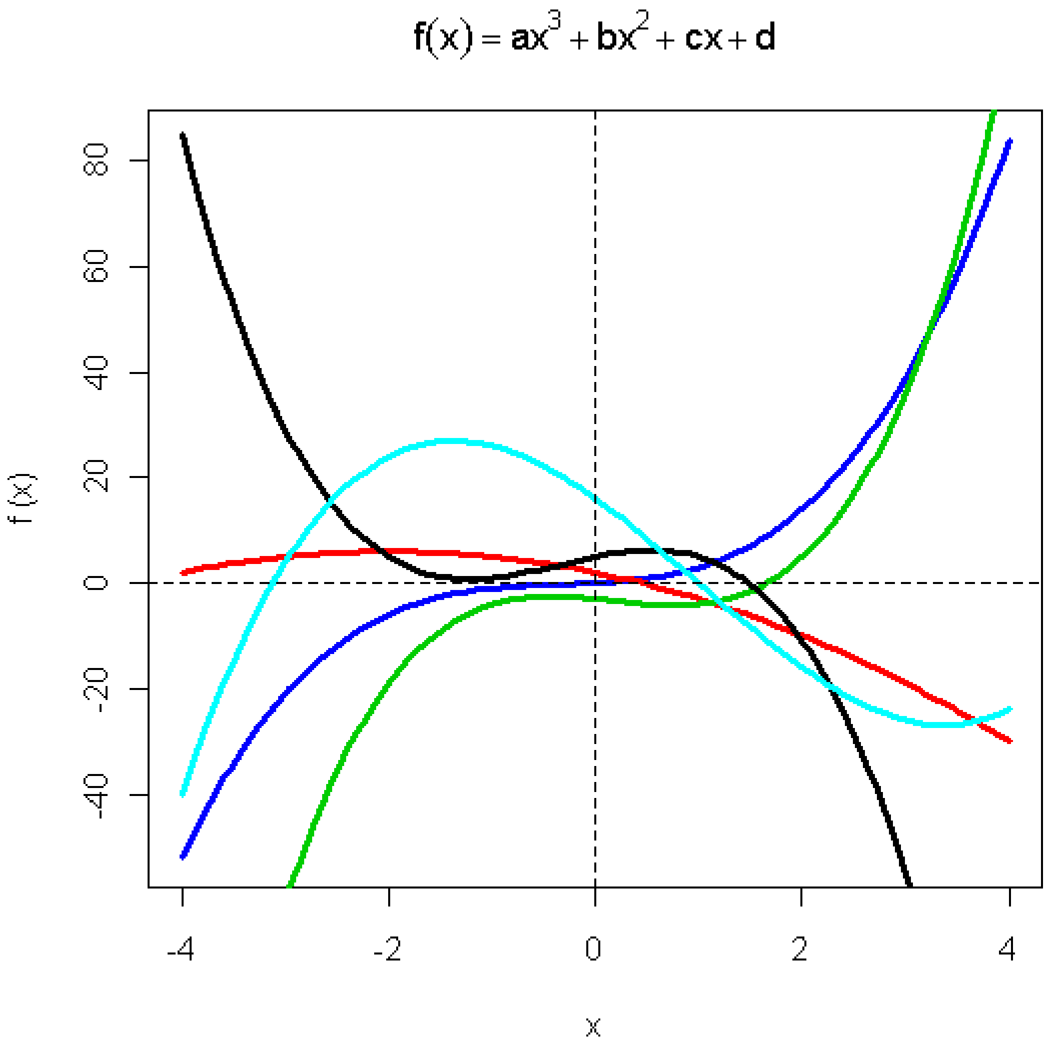
Figur 1. **Eksponentialfunksjonen** $y=e^x$, **logaritmefunksjonen** y=lnx og en **lineær funksjon** y=x. For logaritmefunksjonen legg merke til at ln(1)=0 og at ln(0)= minus uendelig (- ∞). Legg merke til at eksponentialfunksjonen stiger i det uendelige. Legg merke til at funksjonen y=x har stigningstall lik 1. Logaritmefunksjonen og eksponentialfunksjoner speiles om diagonallinjen.



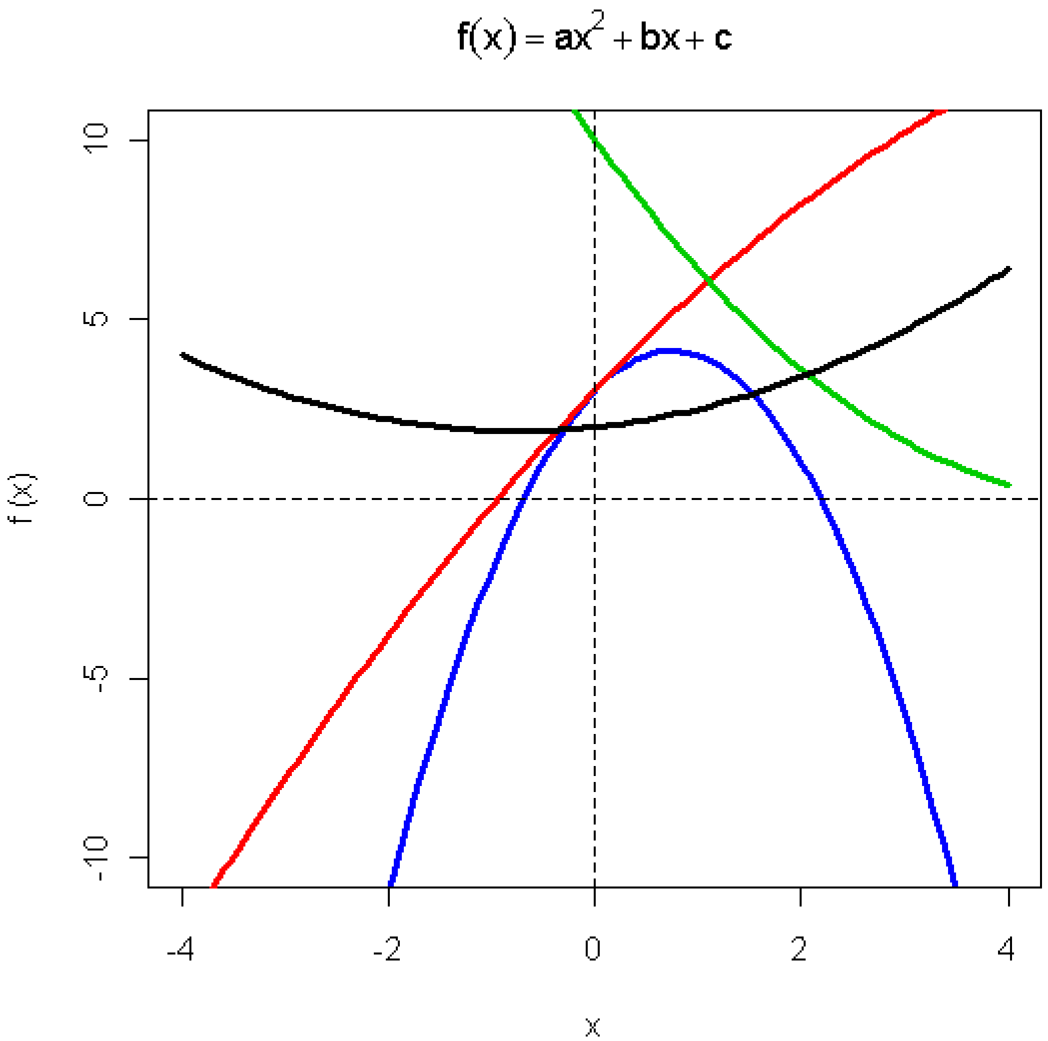
Figur 2. **Cosinusfunksjonen** (cosθ) og **sinusfunksjonen** (sinθ). Legg merke til at sin(0)=0 og cos(0)=1.
Sinus- og cosinusfunksjonen har periodiske svingninger,og slike svingninger finnes det mange eksempler på i naturen. Vinkler kan beregnes i grader eller radianer.



Figur 3. Sirkelen har generell formel $x^2+y^2=r^2$. Enhetssirkelen har radius=1 som vist på figuren. Ethvert punkt på **enhetssirkelen** $x^2+y^2=1$ har koordinater (sinα,cosα) fordi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Vi kan lage en tallrekke fra 0-2π (omkretsen av sirkelen) og ta (sinα,cosα) av disse. $360^o = 2\pi$ radianer, $180^o = \pi$ radianer



Figur 4. Eksempler på forskjellige **tredjegradspolynomer** av typen
$y= ax^3 + bx^2+cx+d$
$y= x^3 + x^2+x$
$y= -3x^3 + 2x^2-4+2$
$y= 2x^3 -x^2-2x-3$
$y= -2x^3 -2x^2+4x+5$
$y= x^3 -3x^2-14x+16$



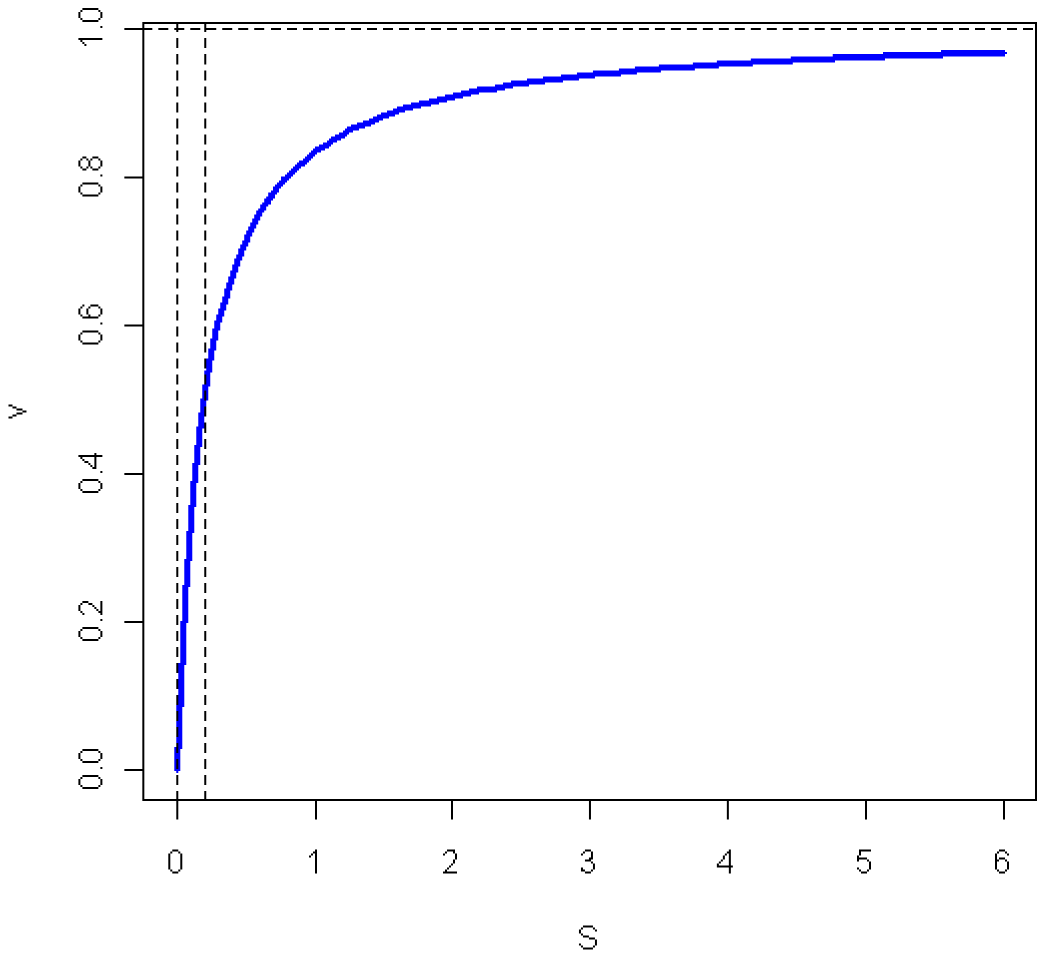
Figur 5. Eksempler på **andregradspolynomer** $y=ax^2+bx+c$
$y=-2x^2+3x+3$
$y=-0.2x^2+3x+3$
$y=0.4x^2-4x+10$
$y=0.2x^2+0.3x+2$

Michaelis-Menten kurver, funksjonelle responskurver og Monod-kurver er vanlige ikke lineære funksjoner som er vanlige innen biokjemi, biologi og økologi. Alle er laget over samme lest.

For en Michalis-Menten kurve for enzymreaksjoner eller bærermediert opptak av stoffer over membraner har vi følgende:

$$v = \frac{S \cdot V_{max}}{S + K_m}$$

hvor *v* er reaksjonshastighet, *S* er substratkonsentrasjon, V_{max} er maksimal reaksjonshastighet og K_m er substratkonsentrasjonen ved halvparten av maksimal reaksjonshastighet. Hvis vi lar V_{max} = 1:



Figur 6. Michalis-Menten kurve som nærmer seg asymptotisk 1 og hvor K_m-verdien blir ved substratkonsentrasjon 0.2 i dette tilfellet.

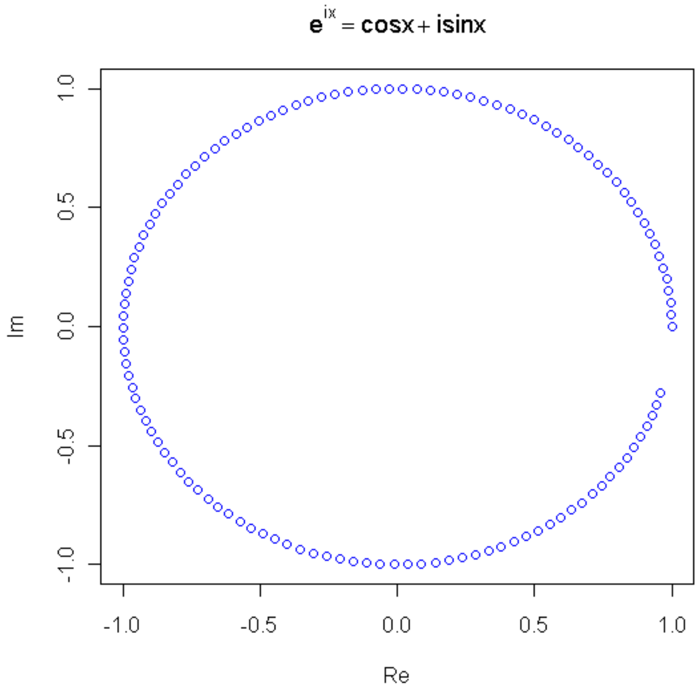
Komplekse funksjoner

En kompleks funksjon som gir en enhetssirkel i kompleksplanet med reell og imaginær akse er, $i = \sqrt{-1}$

$$e^{ix} = cosx + isinx$$

Det betyr også at:

$$\ln\left(cosx + isinx\right) = ix$$



Hva skyldes bruddet i sirkelen ?

Utregninger i R

```
#summen av tallene 1-10
n<-seq(1,10,1)
sum(n)
[1] 55

#funksjoner y=exp(x),y=x og y=ln(x)
f<-function(x) exp(x)
g<-function(x) x
h<-function(x)log(x)
```

```
curve(f,-4,4,col=4,lwd=3,ylim=c(-4,4))
curve(g,-4,4,col=3,lwd=3,add=T)
curve(h,0.001,4,col=2,lwd=3,add=T)
abline(h=0,v=0,lty=2)
legend("topleft",c(expression(f(x)==e^x),expression(f(x)==x),
expression(f(x)==ln(x))),lwd=c(3,3,3),col=c(4,3,2))

#cosx og sinx
f<-function(x)sin(x)
g<-function(x)cos(x)
curve(f,-2*pi,2*pi,col=2,lwd=3,xaxt="n",
xlab=expression(paste("Fasevinkel ",
theta)),ylab=expression(f(theta)))
curve(g,-2*pi,2*pi,col=4,lwd=3,add=T)
abline(h=0,v=0,lty=2)
axis(1,at=c(-2*pi,-pi,0,pi,2*pi),labels=expression(-2*pi,-
pi,0,pi,2*pi))
legend("bottomleft",c(expression(sin(theta)),
expression(cos(theta))),lwd=c(3,3),col=c(2,4))

#enhetssirkel
theta<-seq(0,2*pi,0.01)
x<-sin(theta)
y<-cos(theta)
plot(x,y,col=4,type="l",lwd=3)
abline(h=0,v=0,lty=2)

#tredjegradspolynomer
f<-function(x)x^3+x^2+x
g<-function(x)-3*x^2+2*x^2-4*x+2
h<-function(x)2*x^3-x^2-2*x-3
k<-function(x)-2*x^3-2*x^2+4*x+5
l<-function(x) x^3-3*x^2-14*x+16
curve(f,-
4,4,col=4,lwd=3,main=expression(f(x)==a*x^3+b*x^2+c*x+d))
curve(g,-4,4,col=2,lwd=3,add=T)
curve(h,-4,4,col=3,lwd=3,add=T)
curve(k,-4,4,lwd=3,add=T)
curve(l,-4,4,col=5,lwd=3,add=T)
abline(h=0,v=0,lty=2)

#Michaelis-Menten
Vmax<-1
Km<-0.2
f<-function(x)x*Vmax/(x+Km)
abline(h=0,v=0,lty=2)
curve(f,0,6,col=4,lwd=3,xlab="S",ylab="v")
```

```
abline(h=1,v=c(0,0.2),lty=2)

#kompleks funksjon cosx+isinx
x<-seq(0,6,0.05)
plot(cos(x)+1i*sin(x),col=4,xlab="Re",ylab="Im",
main=expression(e^ix==cosx+isinx))
plot(exp(1i*x),col=2, xlab="Re",ylab="Im")


#summen av tallene 1-36
n<-seq(1,36,1)
sum(n)
[1] 666

#Leibniz rekke
n<-seq(0,10^6,1) #n fra 0 til 1 million
sum(((-1)^n)*1/(2*n+1))
[1] 0.7853984
pi/4 #sjekker lik pi/4
[1] 0.7853982
```

Litteratur

Aschehough og Gyldendals store norske leksikon. Kunnskapsforlaget 1986.

Brun, V. *Alt er tall*. Universitetsforlaget 1964.

Golubitsky, M. & Dellnitz, M.: *Linear algebra and differential equations using Matlab*. Books/Cole Publ. Comp. 1999.

MaMackenzie, A.: *Mathematics and statistics for life scientists*. Taylor & Francis 2005.

Nobel, P.S.: *Physicochemical & environmental plant physiology*. Academic Press 1999.

R Development Core Team (2007). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http://www.R-project.org.

Wikipedia