Grupper og symmetri

Halvor Aarnes, UiO 2014

Innhold

Grupper og symmetri

Det er besnærende hvordan **symmetri** forekommer i naturen, i blomster, i alle dyregruppene, bienes ynglekammere, ansikter og krystaller. Vi kan finne symmetrier i bokstaver, i setninger som ”Agnes i senga”, i tall, kortstokksymboler (kløver, ruter hjerter, spar) eller som palindromer i nukleinsyrer. Vi tiltrekkes av symmetri og kan trekke symmetrilinjer gjennom organismer, molekyler, og atomer. Symmetri er ikke bare begrenset til objekter. Det er symmetri i algebra og tall *e.g.* tallrekken er symmetrisk omkring 0, og det er symmetri i Pascals trekant. Det er symmetri i fysikk. Man finner speilbilder og minst ett symmetriplan. Symmetri representerer balanse, orden og regelmessighet, og er koblet til skjønnhet og harmoni slik mennesket oppfatter det. Asymmetri og ubalanse blir selektert vekk i biologiske reproduktive systemer med aktivt partnervalg. Mennesket er ca. venstre/høyre symmetrisk. Når man går brytes symmetrien, hvor det ene beinet og armen er tidsforskjøvet i forhold til den andre.

En av grunnleggerne av gruppeteorien i matematikk var franskmannen **Évariste Galois** (1811-1832), som viste at alle ligninger kan tilordnes en gruppe. Galois led en tragisk skjebne. Liten interesse for bl.a. latin og retorikk gjorde at Galois strøk på opptaksprøven til den prestisjefylte École Polytechnique, grunnlagt av Lagrange. Galois utførte beregninger og resonnementer i hodet, og det passet dårlig for eksaminatorer som ville ha detaljer, og det endte med at han strøk i siste opptaksprøve i matematikk, hvor han kastet en svamp i hodet på en av eksaminatorene. Galois begynte på École normale, men ble relegert pga. revolusjonær obsternasighet, ble satt i fengel, forsøkte å tjene penger som matematikklærer, og døde etter i en duell. Galois leste lærebøkene til Legendre, *Théorie des nombres* (Teoriene om tallene) *Élémentes de la géométrie* (1794). Legendre arbeidet ved Bureau des longitudes og utførte lengdegradmålinger sammen med Cassini og Méchain. I 1795 ble meridianbuen Barcelona-Dunkirk målt, og dannet grunnlaget for meter. Legendre er også kjent for sine studier av eliptiske integraler og funksjoner, *Traité des functions elliptique* (1827), samt den kvadratiske resiprositetsloven. Manuskriptene til Galois var det få som forstod.

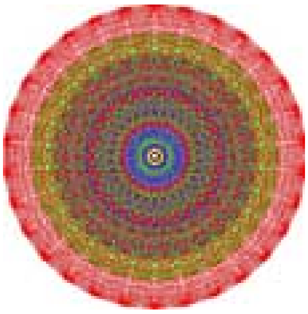
Joseph Louis Lagrange (1736-1813) var den første matematikkprofessor ved École Polytechnique, og etterfulgte Euler som president i Berlin-akademiet.

Napoleon og Frankrike var tidlig ute med å innføre metersystemet, og Lagrange var leder av meterkomitéen. Kanskje grunnen til at britene holder på sitt gamle målesystem, var skepsis til det som kom fra Frankrike ? **Galois-teori** omhandler løsning av algebraiske ligninger ved hjelp av rottegn. Galois fant at femtegradsligninger kan ikke løses med formler på grunn av feil symmetri. Symmetrier har nær tilknytning til grupper. Grafiske mønstre finner vi i tepper, tapeter, mosaikker, og krystaller, og det er et maksimalt antall hovedmønstre, i alt 17. Også for disse finnes det transformasjoner som bevarer mønsteret uforanderlig.

Niels Henrik Abel (1802-1929)

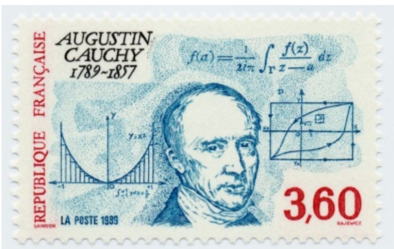
og **Marius Sophus Lie** (1842-1899)

er norske matematikere som har fått sine navn knyttet til grupper. **Lie-grupper** har i dag fått fornyet interesse med **E8-matematikk** og studiet av differnsialligninger og manifold-topologi. Gruppeteori baserer seg på tallteori, studiet av algebraiske ligninger og geometri.



E8

Abel led en tragisk skjebne, men på en annen måte enn Galois. På Katedralskolen i Christiania kom Abel i kontakt med matematikklærer **Bernt Michael Holmboe** (1795-1850), som utga flere lærebøker i matematikk og som seinere ble professor ved Universitetet i Christiania. I 1821 ble Abel student ved universitetet. Paolo Ruffini hadde i 1799 vist at femtegradsligninger tilsynelatende ikke hadde generelle løsninger ved rotuttrykk, men det manglet det fullstendige bevis, Cauchy mente at dette var av mindre betydning, men det var Niels Henrik Abel som i 1824 kom med det endelige beviset for at femtegradsligninger kan ikke løses ved rottegn, Abel-Ruffini-teoremet. Med statsstipend reiste Abel til Berlin i 1825 hvor han møtte **August Leopold Crelle** (1780-1855), grunnlegger av *Journal für die reine und angewandte Matematik*, Crelles journal, hvor mange av Abels arbeider ble publisert. Oppholdet i Paris i 1926 ble ikke som Abel hadde håpet og ventet. I Frankrike arbeidet både **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857) og Legendre, som Abel hadde ønsket å møte.



Cauchy er kjent for definisjonen av hva kontinuerlig betyr, noe som er intuitivt lett å forstå hva er, men er vanskelig å definere. Han definerte også grensebegrepet. Cauchys middelverdiformel omhandler to funksjoner definert over samme intervall, og *Cours d'analyse algébrique* (1821) dannet grunnlag for teoriene om konvergens og divergens.

Abels *Mémoire sur une propritété générale d'une classe trés étendue des fontions trenscendantes* (Paris-avhandlingen), som Abel selv hadde store forhåpninger til, ble liggende nedstøvet og glemt på Cauchys skrivebord, og ble først publisert i 1841. Abel arbeidet også med eliptiske funksjoner, et tema som også den tyske matematikeren **Carl Gustav Jacob Jacobi** (1804-1851) arbeidet med. Jacobi hadde i sine ungdomsår interessert seg for løsning av femtegradsligninger. Jacobi har gitt navn til Jacobi-determinanter med de partiellderiverte av funksjoner. Er Jacobi-determinanten lik null er funksjonene avhengig av hverandre. Jfr. også Jacobi-matriser.

Abel fikk ikke jobb ved Universitetet i Christiania, bortsett fra ettårs vikariat for Christopher Hansteen i 1827, da Abel kom tilbake til Norge uten noen jobb å gi til. Finansdepartmentet hadde sagt nei til å forlenge Abels stipend. Skuffelsen var stor hos mange da Holmboe i 1825 overtok Søren Rasmussens (1768-1850) professorat i fysikk og matematikk ved Universitetet i Christiania, og ikke Abel, visstnok pga. av Abels manglende pedagogisk kompetanse. Franske matematikere hadde også øvet påtrykk på kong Karl Johan for å skaffe Abel en stilling ved universitetet. Som så mange på den tiden ble Abel rammet av fattigmannssykdommen tuberkulose, og han døde i 1829, 26 år gammel, to dager før Crelle, Abels utrettelige forkjemper, kunne meddele at Abel var blitt kallet til et professorat ved Universitet i Berlin. Holmboe fikk utgitt Abels arbeider i tobindsverket *Oeuvres complétes de N.H. Abel* i 1839, ti år etter Abels død.

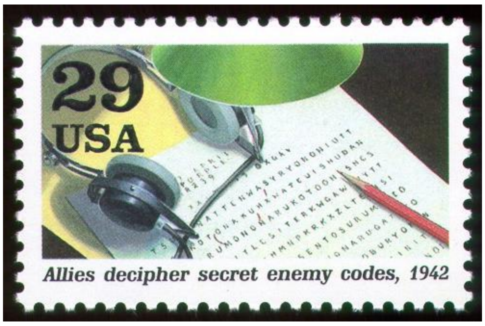
Ved Abelhaugen, Slottsparken i Oslo, står Vigelands berømte bronsestatue av Niels Henrik Abel, monumentet avduket i 1908. Den er verdt et besøk, og minner oss om hvordan Norge tok vare på et av sine største genier.

Det finnes en rekke grupper: Abelske-, Lie-,permutasjons-, matriks-(lineære-), algebraiske-, topologiske-, abstrakte-, geometriske- og kombinatoriske-. Et annet eksempel på grupper er **Fischer-Griess Monster** M(Bernd Fischer og Robert Griess)

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

Monster inngår som en del av Conway og Norton´s måneskinnskonjektur og det finnes tilknytninger til Dynkin-diagram E_8.

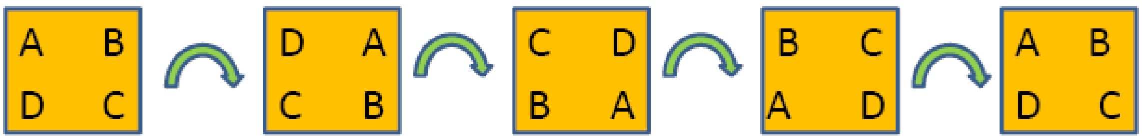
Den sykliske gruppen Z/26 bestående av bokstavene i det engelske alfabetet danner grunnlaget for Caesar-koding, en av de første metodene brukt innen kryptografi.



Det er en sammenheng mellom symmetri og topologi. **Topologi** kalles også gummigeometri hvor den geometriske formen på figurer beholdes når den dreies, strekkes, vris eller presses sammen. Det må imidlertid ikke lages kutt i gummien.

To symmetrier gir en tredje symmetri. Et kvadrat, gruppen D_4 har 8 symmetrier, 4 **rotasjoner** og 4 **speilinger** om aksene (horisontal-, vertikal akse og to diagonaler). Viser man noe i ett hjørne, så vet man hva som vil skje i de andre hjørnene ut fra symmetri. Hvis vi har et kvadrat festet til et punkt i midten så kan dette roteres 90° tre ganger med klokka rotasjon r_1, r_2 og r_3 og så den siste rotasjonen r_0 som gir det opprinnelige kvadratet. Man kan også betrakte denne siste rotasjonen som om man roterte det opprinnelige kvadratet 0° og så er man tilbake til utgangspunktet.

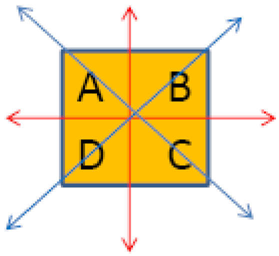
Vi betegner de fire rotasjonene $R_4=\{r_0, r_1, r_2, r_3\}$, som er en Abelsk undergruppe av D_4, selv om D_4 i seg selv er ikke-Abelsk.



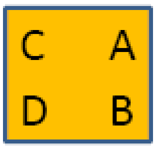
Mengden av hjørnene S={A,B,C,D} har 4!=24 muligheter for sortering, men alle disse er ikke mulige slik at vi allikevel ender bare opp med 8 symmetrier.
Vi kan også betrakte rotasjonene som at det skjer transformasjoner av kvadratet inn i seg selv hvor alle avstander beholdes i sin opprinnelige form. Dette fører fram til begrepet **transformasjonsgrupper**.

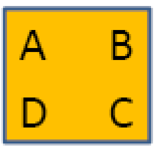
Vi kan også lage speilinger omkring 4 akser, x- og y-aksen og to diagonale akser.

Vi betegner de 4 speilingene $S_4=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, hvor s_1 er speiling om x-aksen, s_2 omkring y-aksen, s_3 omkring diagonalen BD og s_4 omkring diagonalen AC



Vi ser at hvis vi *e.g.* holder BD fast og vipper rundt diagonalen så vil A og C bytte plass, men vi legger merke til at det er mulig å få samme resultat ved en rotasjon.





Speiler vi ennå en gang om den samme aksen ved å holde BD fast kommer vi tilbake til utgangspunktet:

Hvis vi betegner *e* for et **identitetselement**, den opprinnelige utgangsfirkanten i vårt tilfelle, ser vi at 2 speilinger *S* og *S* gir identitetselementet

$$S \cdot S = e$$

og 4 rotasjoner R^4 bringer oss også tilbake til utgangsfirkanten:

$$R^4 = e$$

Identitetselementet tilsvarer tallet 1 i vanlig multiplikasjon. Legg merke til at vi bruker multiplikasjonstegn selv om dette er en mer abstrakt form for multiplikasjon.

Hvis vi betrakter en rotasjon med klokka for R så er det også en rotasjon mot klokka R^{-1}, og hvis vi først roterer en gang 90^o med klokka og en gang 90^o mot klokka, så er man tilbake til utgangspunktet. Elementet har en **invers**, en inverstransformasjon. Hvert element i en gruppe må ha en invers.

$$R \cdot R^{-1} = e$$

Vi ser også at en speiling S og en rotasjon 90^o med klokka R er lik en rotasjon 90^o mot klokka etterfulgt av en speiling:

$$S \cdot R = R^{-1} \cdot S$$

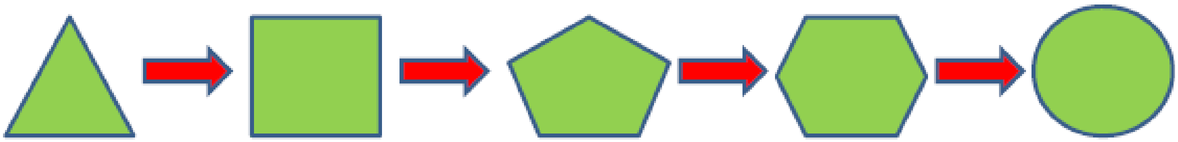
Legg merke til at vi nå er iferd med å utvikle et sett regneregler for kvadratet vårt, kalt D_4 (dihedral gruppe). Hvis S er en speiling så finnes det også en invers speiltransformasjon S^{-1} i gruppen. Dessuten, hvis R er en rotasjon og S er en speiling så finnes det også et **produkt** R·S. Det er ikke nødvendigvis slik at R·S=S·R, men hvis de er det kalles gruppen Abelsk (kommutativ).

Generelt er en gruppe G Abelsk hvis a·b=b·a for alle elementer a og b i G. Det betyr at det alltid finnes en entydig løsning av ax=b, dvs. $x=b/a=b \cdot a^{-1}$.

Vi kan lage en multiplikasjonstabell for rotasjoner og speilinger i D_n. Klipp ut en liten papp-plate, helst med forskjellig farge på hver side, merk den med bokstaver og se at dette stemmer. Legg merke til at rotasjoner bevarer fargen på platen som vender mot deg, mens rotasjoner endrer fargen For to tilfeldige elementer i en gruppe finnes det en operasjon (kombinasjonsregel) som tilordner et entydig tredje element i gruppen.

Hvis vi lar utfallsrommet S være hjørnene i firkanten, S={A,B,C,D} så kan disse hjørnene ordnes på 4! forskjellige måter, men det er bare 8 symmetrier.

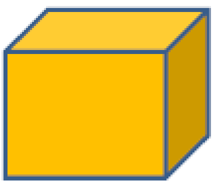
Regulære mangekanter (polygoner)har like vinkler og like lange sider. Vi kan starte med en trekant, gå via firkant, femkant, sekskant osv. og når *n* går mot uendelig ender vi opp i en sirkel. En sirkel kan betraktes som et uendelig mangesidet polygon.



Det viser seg at en n-kant har *2n* symmetrier, og for vår firkant (n=4) vil da få 8 symmetrier (4 rotasjoner + 4 speilinger). En trekant har 6 symmetrier $R_3=\{r_1,r_2,r_3\}=\{0^o, 120^o, 240^o\}$, og 3 speilinger om de 3 aksene, $S_3=\{s_1,s_2,s_3\}$.

Gruppen SO_3 er en fast kule som roterer rundt en akse gjennom origo.

Denne regningen kan videreutvikles ved å gå fra planet med to dimensjoner til romlige figurer i 3 dimensjoner som *e.g.* en kube:



Det finnes 5 regulære polyedere: tetraeder (4 liksidet trekanter), kuben eller terningen (6 kvadratiske flater), oktader (8 likesidete trekanter), dodekader (12 likesidete femkanter), ikosaeder (20 likesidete trekanter), og videre til n-dimensjonale vektorrom.

Vi skjønner raskt at **Rubiks kube**, utviklet av ungareren Ernõ Rubik, som i sin enkleste form er en 3x3x3 kube, i alt 27=3x3x3 småkuber som er hengslet slik at de kan dreies i flere plan, 7 fastsittende og 20 flyttbare med i alt 6 forskjellige farger, nå kan betraktes som en gruppe som det kan regnes med. Av de 20 flyttbare er det 8 hjørner med 3 synlige sider og farger, og 12 midtfelt med 2 synlige sider (farger). Hvert hjørne kan være på 8 forskjellige steder (8!) og hvert hjørne viser 3 av de i alt 6 mulige fargene. Det er 12 midtfelt (12!) som viser 2 av de 6 mulige fargene. I alt gir dette ca.$4.3 \cdot 10^{19}$ mulige måter å plassere fargene.

$$\frac{12! \cdot 8! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}}{2 \cdot 3 \cdot 2} \approx 4.3 \cdot 10^{19}$$

Apropos store tall. En **googol** er et ettall etterfulgt av hundre nuller = $1 \cdot 10^{100} \approx 70!$

En **googolplex** er lik 10^{googol}.
Eksempler på andre store tall:
Avogadros tall = $6.02214179 \cdot 10^{23}$ tilsvarer ett **mol** partikler, som er lik antall ^{12}C-karbonatomer i 12 g karbon i grunntilstanden.
1 mol vann = 0.018 liter = Avogadros tall med vannmolekyler. Det skal ikke så veldige mange liter vann til før man skjønner at dette blir et vanvittig stort antall vannmolekyler med tilhørende statistisk fordeling når det gjelder kinetisk energi.

Vi sier at gruppen *G* er en gruppe hvis

1. For elementene *x* og *y* i *G* (kan finnes et element *z* slik at for alle *x*, *y* og *z* i *G* gjelder:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Dette er den **assosiative loven**.

2. Dessuten skal gruppen *G* inneholde ett og bare ett identitetselement *e* slik at for alle x gjelder:

$$x \cdot e = e \cdot x$$

3. Det skal være en invers av *x* kalt x^{-1} slik at:

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$$

Ethvert element i gruppen har et **inverst element**
Vi kan også definere undergrupper av G.
Eksempel på en gruppe er alle de relle tallene (R), samt de de rasjonale- (Q) og komplekse (C) tallene danner grupper, kropp (felt). Heltallene er ikke en kropp siden 1/2 ikke blir et heltall.

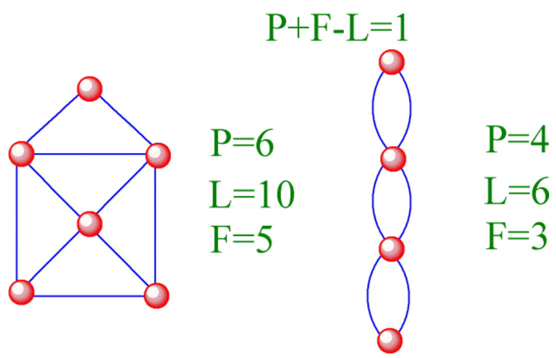
Klammeparentes { } angir en mengde.

$$x \in G$$

betyr at x er et element i G, hvor ∈ angir medlemskap i en mengde.
Et kvadrat har rotasjons- og speilingssymmetri, vist foran, men et kvadrat har ikke translasjonssymmetri. Hvis et kvadrat flyttes fra et sted til et annet så ser vi at det blir forflyttet. Har vi imidlertid en uendelig flate dekket av kvadrater, så vil denne flaten ha translasjonssymmetri.
Roger Penrose studerte hvordan flater kan dekkes av fliser. Noen av disse er ikke helt regulære og har ikke translasjonssymmetri.

Eulers nettverksformel for punkter (P),linjer (L) og lukkete regioner (flater, F). Summen av punkter og regioner, minus antall linjer er lik 1:

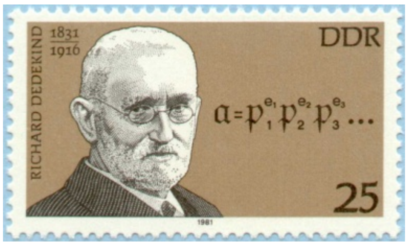
$$P + F - L = 1$$



Ringer og kropper

Kropp eller **felt** var det begrep som ble innført av Abel og Galois i arbeidet med å finne løsninger i polynomligninger med rasjonale koeffisienter med grad 5 eller høyere, det vil si femtegradsligninger, sjettegradsligninger osv.

Begrepene kropp og ring innen abstrakt algebra starter med Richard Dedekin, og blir videreført av Emmy Noether og Wolfgang Krull på 1920-tallet. Dedekin kalt en samling relle eller komplekse tall som er lukket under de fire regneoperasjonene (addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, og divisjon) for Körper (kropp, corpus) og betegnes ofte K. Hilbert innførte begrepet Zahlring (tallring).



Også andre har gitt viktige bidrag til tallteori, slik som den indiske autodidakten Srinivasa Ramamujan (1887-1920), hvis talent ble oppdaget av den britiske matematikeren G. H. Hardy (1878-1948).

En ring er en mengde R med to regneoperasjoner, addisjon (R,+) og multiplikasjon (R,·), og slik at mengden danner en Abelsk gruppe. Vi kan se bort fra subtraksjon og divisjon siden disse bare er inverse av addisjon og multiplikasjon. For at R skal være en ring må flere aksiomer gjelde. Lukket under addisjon vil si at for alle a,b i R så må resultatet a+b også være i R.
(R,+) må være en Abelsk gruppe under addisjon med følgende aksiomer:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Det må eksistere et nullelement 0 i R slik at for alle elementene i R gjelder følgende:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

0 er nullelementet og –a er den inverse slik at:

$$a + (-a) = 0$$

For alle a og b i R gjelder:

$$a + b = b + a$$

De fire ovenforstående aksiomene gir en Abelsk gruppe under addisjon.

(R,·) må være lukket under multiplikasjon, det vil si for alle a og b i R må også resultatet av regneoperasjonen a·b være i R.
Den assosiative loven for multiplikasjon må gjelde med følgende aksiom:

$$a(bc) = (ab)c$$

Det må finnes et multiplikativt identitetselement 1 i R slik at

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

Dessuten må de distributive lovene gjelde:

$$a(b + c) = ab + ac$$
$$(a + b)c = ac + bc$$

Heltallene $\mathbb{Z}$ (…-3,-2,-1,0,1,2,3…) er eksempel på en ring, men de rasjonale tall $\mathbb{Q}$og reelle tall $\mathbb{R}$er også en ring.$\mathbb{Z}_4$ bestående av tallene {0,1,2,3} er en ring. For de rasjonale tall har vi divisjon slik at for alle elementer a ≠ 0 i $\mathbb{Q}$så finnes det en multiplikativ invers:

$$\frac{1}{a} = a^{-1} \qquad aa^{-1} = 1 \quad a \neq 0$$

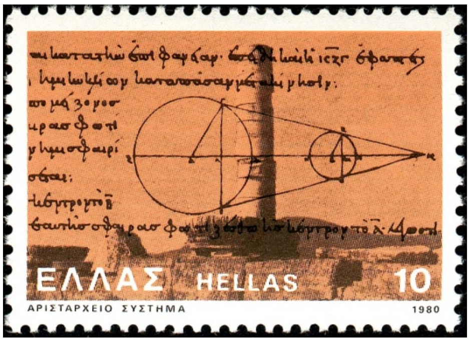
Alle aksiomene over gjelder for en kropp. Det betyr at de rasjonale tall$\mathbb{Q}$, de reelle tallene $\mathbb{R}$og de komplekse tallene $\mathbb{C}$er en kropp, men heltallene $\mathbb{Z}$er ikke en kropp siden 1/2 er ikke et heltall.

Repetitio est mater studiorum. Gjentakelse er studienes mor.

Geometri

Noli turbare circulos meos. Rør ikke mine sirkler. Arkimedes.

Geometri har sin opprinnelse bl.a. fra det gamle Hellas.



Geometri (gr. *geo*-jord; *metrein* – måle). I *Discours de la méthode* (Studiet av den vitenskapelige metode) hadde Descartes et geometrivedlegg *La Géométrie* som koblet geometri og algebra.

I **cartesiansk geometri** (oppkalt etter René Descartes) er det et todimensjonalt system (2D) med to koordinatakser vinkelrett på hverandre og krysningspunktet mellom aksene er **Origo**. Hvert punkt i planet kan derved beskrives med to koordinater (*x,y*). To linjer som skjærer hverandre gir to og to like vinkler. En likebeint trekant har vinkler ved grunnlinjen som blir like store. I det tredimensjonale system er det tre koordinatakser *x*, *y* og *z* vinkelrett på hverandre og alle punkter i rommet kan beskrives med koordinatene (*x,y,z*). I *Géometrie* (1637) oppdaget Descartes det mystiske med kvadratroten av negative tall, imaginære tall, som seinere førte fram til de komplekse tallene. (*Imagine*, John Lennon).

En sirkel med sentrum i koordinatene (*p*,*q*) og med radius r får formel:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

Har sirkelen sentrum i origo i koordinatsystemet får sirkelen formel:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

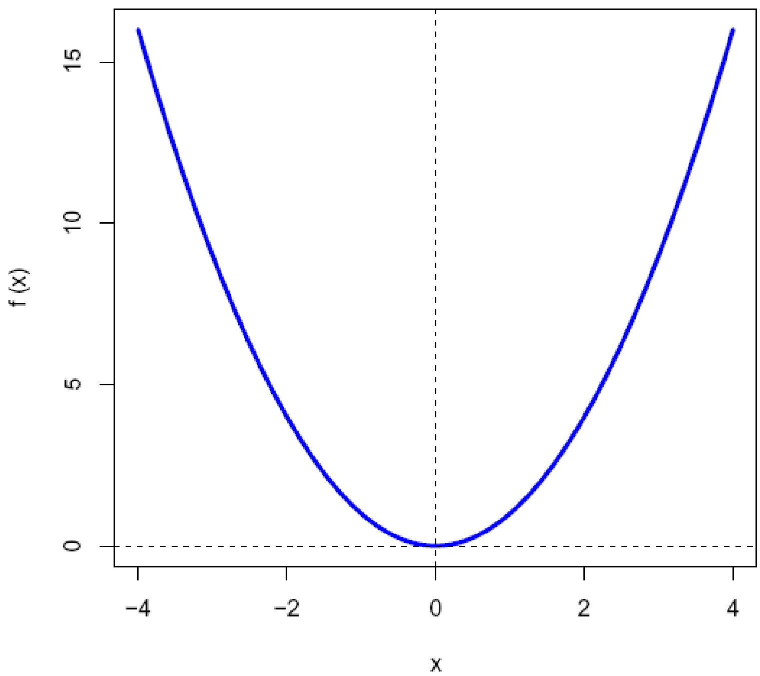
På en sirkel ligger alle punktene i fast avstand fra sentrum. Avstanden tvers over sirkelen gjennom origo er diameteren. Radius er halve diameteren. Diameteren deler sirkelen i to halvdeler. Omkretsen er lengden av sirkelkurven. Forhold mellom omkrets og diameter i en sirkel er lik pi (π). En trekant inne i en halvsirkel blir en rettvinklet trekant.

En elipse med senter i origo får formel:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Formel for en **parabel**:

$$y = ax^2 + bx + c$$



Figur. Funksjonen f(x) = x^2.

Funksjonen $y=x^2$ er en parabel, symmetrisk omkring aksen.

Parallelle stråler langs aksen som treffer et parabelformet hulspeil vil reflekteres og samles i et brennpunkt. Benyttes innen akustikk og optikk.

Formel for en **hyperbel**:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Descartes innførte de 5 regneartene addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon og rotuttrekk.

Krumningen på en rund ball er positiv og konstant. Krumningen på et egg er positiv, men ikke konstant. Et **hyperbolsk plan** har negativ krumning, og kan få plass inne i en sirkel. For det hyperbolske plan gjelder ikke parallellaksiomet.

Konstruksjon av en regulær trekant, kvadrat, pentagon (femkant) og heksagon (sekskant) var kjent fra Euklid.

Som 19-åring kunne Carl Friedrich Gauss i 1796 vise at det var mulig å konstruere en 17-kant (heptadekagon) med passer og lineal.

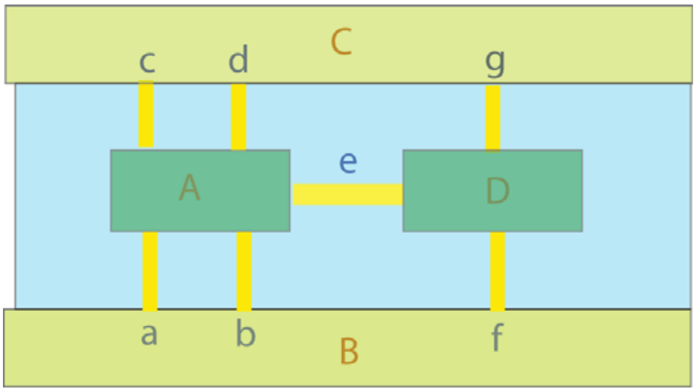
Det betyr at funksjonen 2π/17 kan uttrykkes som kvadratrøtter. Det ble mulig å vise at det var mulig å konstruere multipler av 17 e.g. regulære 34-gon, 51-gon, 85-gon og 255-gon.Et n-gon er et polygon med n sider. Det er interessant at det bare finnes 17 mulige symmetrier for krystaller.

Topologi

Naturens store bok er skrevet med matematiske symboler. Galilei

Topologi omhandler de fundamentale egenskapene ved et objekt. En sirkel og et kvadrat er topologisk like.

I Königsberg i Øst-Preussen, nåværende Russland, har elven Pregel to øyer, og er et eksempel på en topologisk problemstilling, studert av Leonhard Euler. Øyene og breddene er forbundet med syv bruer.
Er det mulig å gå en tur, passere hver av de syv bruene bare en gang og returnere til utgangsstedet ?
Euler fant løsningen på dette i 1736. Det er umulig.



To øyer A og D forbundet med breddene B og C, og hverandre via 7 bruer a,b,c,d,e,f og g. Et eksempel på **grafteori** hvor punkter er koblet sammen med linjer.

Skal en Euler-passering av broer være mulig dvs. mulig å passere en bro bare en gang på turen må følgende være oppfylt:

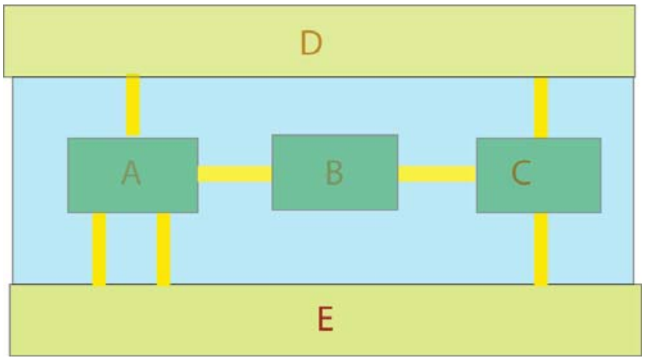
Hvis tallet *n*, som er antall broer som leder til en region,er et oddetall, så må bokstaver som representerer regioner forekomme *((n+1)/2)* ganger.

Hvis tallet *n* er et partall (liketall), så vil bokstaver som beskriver regionen forekomme *n/2* ganger hvis turen starter utenfor regionen og *((n/2) +1)* hvis turen starter i regionen.

I Köningsberg er det odde antall broer til hver region, 5,3,3 og 3 til henholdsvis A, B, C og D.

Hvilket betyr at regionene må forekomme 3,2,2,2=9 ganger som er mer enn antall bruer + 1, altså er det umulig å gå en tur og passere hver bro bare en gang.

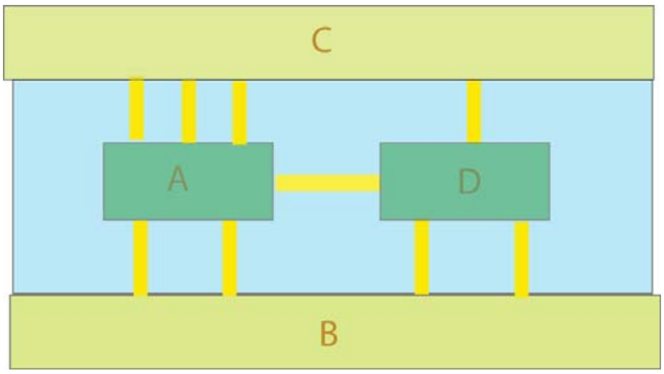
Eksempler på Euler-broer hvor det er mulig å gå en tur og passere hver bro bare en gang:



Ifølge Euler-passering av en bro bare en gang er mulig med

EADCBAEC

Til A er det 4 broer (partall) og A er utenfor startregionen da vil A forekomme 4/2=2 ganger. B har to broer (partall)og vil forekomme 2/2=1 ganger. C har tre broer (oddetall) og vil forekomme (3+1)/2= 2 ganger osv.



Passering via CBDBADACAC

Hvis det hadde vært fire broer til A så vil A forekomme to ganger hvis turen begynner på utsiden av A og tre ganger hvis den begynner i A.

Tilsvarende eksempler kan finnes i kjemiske synteseveier, gater eller spredningsveier for sykdom.

T-banesystemet i Oslo er eksempel på et system hvor mønster og knutepunkter blir riktig, men avstander blir feil. Dette er et viktig prinsipp i studiet av topologi (gr. *topos* – overflate) hvor avstander og størrelser er uvesentlige. En sirkel, trekant og firkant er topologisk like.

Firefargeproblemet, en del av topologien, viser seg at man må benytte fire farger for å fargelegge et kart slik at ingen stater med felles grense har samme farge. Francis Guthrie formulerte problemstillingen i 1852 da han skulle fargelegge et kart over England. Bevist av Kenneth Appel og Wolfgang Hagen i 1976 ved hjelp av et databevis. Det er en nær tilknytning til Graf-teori. Det er umulig for fem land å være plassert slik at hver av dem er i kontakt med de fire andre.

I Euklids *Elementer* (*Elementa*), en samling av all gresk matematisk kunnskap samlet i 13 bøker, omtales punkter (uten utstrekning), linjer, flater og fastelegemer. En rekke punkter danner en linje.

Eulers polyederformel viser sammenhengen mellom antall hjørner, kanter og flater på faste legemer, noe man kan finne igjen i pyramider, prismer og krystaller. **Eulers polyederformel** er:

hvor *F*=flater, *H*=hjørner, *K*=kanter.
Formelen ble også oppdages av Descartes.
Et dodekaeder har 20 hjørner, 30 kanter og 12 flater:
20-30+12=2

En kube har 6 hjørner, 12 kanter og 8 flater: 6-12+8=2
Polygoner kan klassifiseres etter hvor mange kanter og flater, lengden av kanter og vinkelen mellom dem. En fotball består av 12 femkanter og 20 sekskanter.

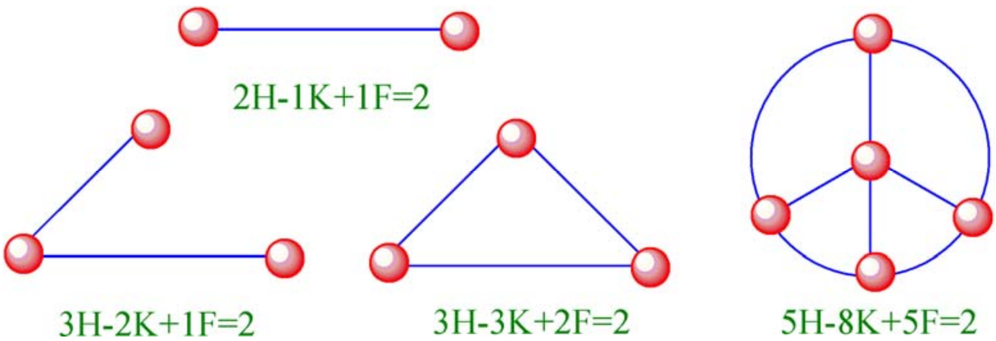
Simon-Antoine-Jean Lhuilier (1750-1840) fant i 1913 unntak fra Eulers polyederformel mvis det var et hull i et objekt.

En kule er den enkleste formen i et tredimensjonalt rom. En kule og en torus er hule overflater. Hullet i en torus (smultring) er ikke på overflaten, men i det omliggende rom. Verken kule eller torus har noen kanter, og begge har en lukket overflate.

Topologi er studiet av posisjon, men hvor størrelsen ikke har betydning. En oversikt over T-banenettet i Oslo er ikke geografisk riktig, men nettverket og mønsteret er riktig. Hvis vi tegner et nettverk av punkter (**P**)(eller hjørner H) og linjer (*L*) som danner flater (*F*) med trekanter så viste Euler at det var følgende sammenheng mellom antallet linjer punkter og flater(**Eulerkarakteristikk**), K er antall kanter:

$$H - K + F = 2$$

I **regulære polygoner** (regulære mangekanter) har alle sidene lik lengde og alle vinklene er like.



Uansett hvordan man tegner streker som krysser hverandre kommer man alltid opp til å ende opp med at H-K+F=2. Når det gjelder den lukkete trekanten har den 2 flater eller regioner, en på innsiden og en på utsiden.

I **grafteori** er en graf satt sammen av **noder** og **kanter**, og noder henger sammen i kanter, og vi får en sammenhengde følge fra node til node via kanter.

I et tredimensjonalt nettverk kan nettverkstrådene gå over eller under hverandre, men det er ikke mulig i et todimensjonalt hvor de må krysse hverandre.

Hvis vi lager nettverket på en kule, for eksempel på en appelsin blir sammenhengen:

$$H - K + F = 2$$

En sirkel kan betraktes som et uendelig mangesidet polygon. Tredimensjonalt blir sirkelen en symmetrisk kule. Den korteste vei mellom to punkter på en kule er **storsirkelen**, en sirkel med sentrum i kloden og omkrets like lang som ekvator. Korteste vei mellom to punkter på en fly- eller båttur er å følge en storsirkel. Tegner man en trekant i et plan er summen av vinklene =180°. Tegner man en trekant på en kule, for eksempel på skallet på en appelsin er summen av vinklene = 270°. Tegner man en trekant på en sadel er summen av vinklene <180°.

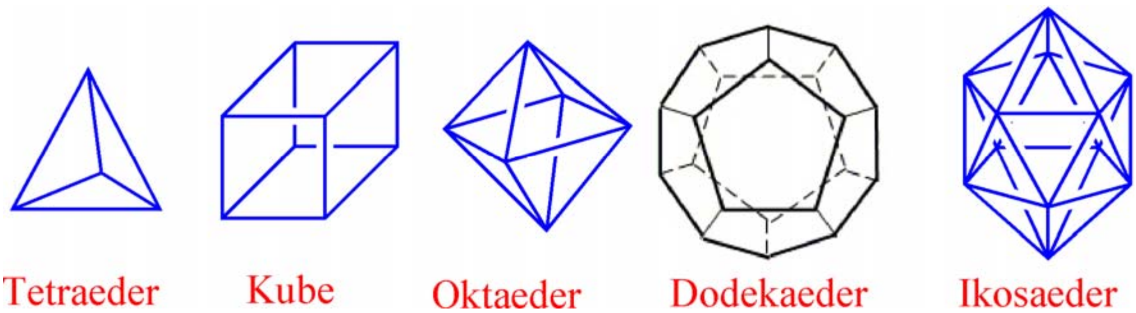
Det er fem **regulære polyedre**, også kalt Platonske legemer. Euklid kunne vise at det ikke fantes flere enn fem. Disse ble tidligere tillagt mytisk kraft og finnes bl.a. igjen i Johannes Keplers (1571-1630) *Mysterium cosmographicum* (1597) som beskrivelse av planetbanene. De regulære polyededre (oktaeder, ikosaeder, dodekaeder, tetraeder, kube) innskrev og omskrev banene til de da seks kjente planetene Merkur, Venus, Jorden, Mars, Jupiter og Saturn, et symmetrisk system.

Tetraeder (4 identiske trekanter)
Kube (6 identiske firkanter)
Oktaeder (8 like trekanter)
Dodekader (12 pentagoner)
Ikosaeder (20 like trekanter)
Det er en sammenheng mellom antall hjørner (H), kanter (K) og flater (F) beskrevet, hvor alle har Eulerkarakteristikk lik 2:

$$H - K + F = 2$$

Polyeder	Hjørner	Kanter	Flater	H - K +F
Tetraeder	4	6	4	2
Kube	8	12	6	2
Oktaeder	6	12	8	2
Dodekader	20	30	12	2
Ikosaeder	12	30	20	2

Regulære polygoner, alle med Eulerkarakteristikk=2



De regulære polyedere er kompakte legemer. En torus er en smultringformet yttergrense med ett hull. En torus har en annen Eulerkarakteristikk enn de regulære polyedere. Topologisk sett er det meget stor forskjell på yttergrensene på en hul kule sammenlignet med yttergrensene på en torus.

For en **torus** er Eulerkarakteristikken:

$$H - K + F = 0$$

En **dobbeltorus** har Eulerkarakteristikk -2, en Klein-flaske har Eulerkarakteristikk =0. En kule og en torus har ingen kanter og er lukkete overflater. En sylinder har to kanter. En CD-plate har to kanter. Et **Möbiusbånd** har bare en kant og er en flate som ser ut som bare en side. (August Ferdinand Möbius).

Et Möbius-bånd er en ikke-orienterbar flate To Möbiusbånd limt sammen kant mot kant gir en **Klein-flaske**. En Klein-flaske (Felix Klein 1849-1925) har en fleksibel hals i flasken som føres tilbake i flasken. Den har således ingen inn- eller utside.

En **hyperkube** er en firedimensjonal analog til kuben, og består av 8 kuber. En firedimensjonal hypersfære består av en sekvens av sfærer.

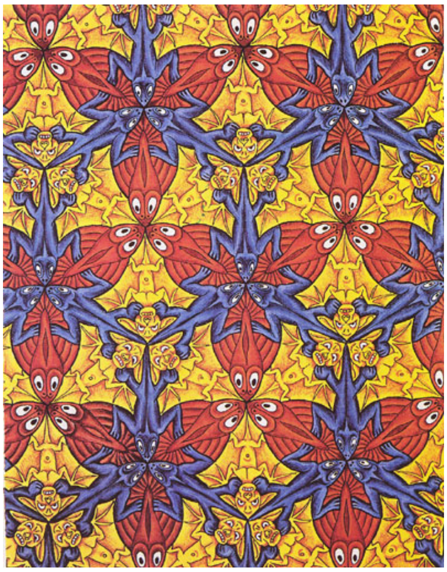
Knuteteori og manifoldteori er en del av topologien. Objekter kan bli transformert ved bøyning, vridning, strekning og sammenpressing. Hvis vi ikke visste bedre er det umulig å si om vi lever på en torus eller en klode. På begge ville området vi befinner oss på være relativt flatt, og går vi rundt øst-vest, eller nord-syd kommer vi tilbake til utgangspunktet på både en torus eller klode.

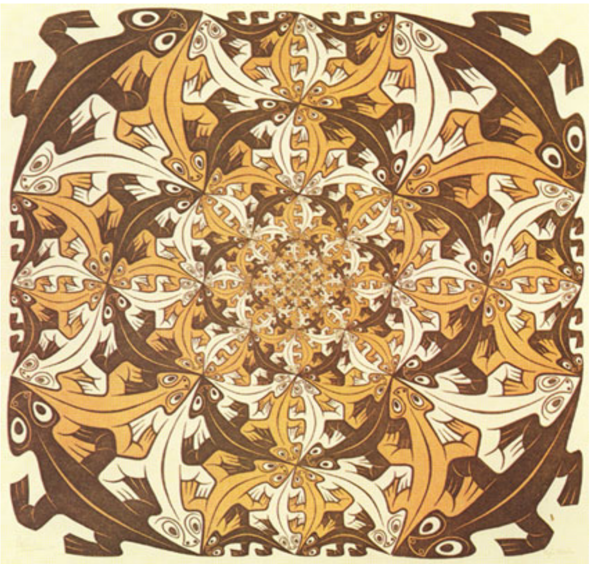
Ifølge **Poincarés konjektur** (Jules Henri Poincaré (1854-1912)er kulen en 2-sfære, og en n-sfære er overflaten på et "n+1-legeme". Tegner man en lukket løkke på en kule er det mulig å minske løkken uten at den forlater overflaten, til den til slutt ender i et punkt. Kulen er det eneste objekt hvor dette er mulig. På en torus finnes det derimot løkker som ikke lar seg skrumpe til et punkt. Legger man en trådløkke omkring en appelsin kan løkken minskes til et punkt uten å kutte i tråden eller appelsinen. Hvis tråden derimot tres igjennom hullet på en smultring (torus) så kan ikke trådløkken minskes til et punkt. Stephen Smale kunne i 1960 vise at Poincarés konjektur gjelder for fem dimensjoner og videre oppover. Den eksentriske russiske matematikeren Grigori Perelman (1966-) beviste Poincarés konjektur i 2002, publisert på internett**.** Perelman sa nei til både prispenger som var utlovet og Field medaljen.

Knutetopologi. En knute er en lukket løkke med topologi =0 Ekvivalente knuter kan transformeres til hverandre. Et Möbius-bånd kan lages ved å klippe ut et papirbånd som skjøtes sammen etter å ha vridd det en gang. Hvis man starter å klippe i båndet ca. 1/3 inn fra kanten gir dette to papirstriper som henger i hverandre, en mindre og en større.

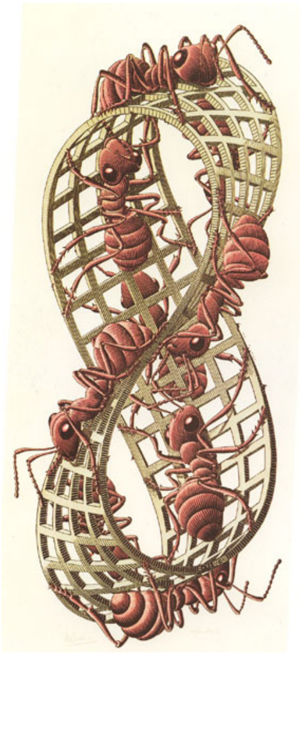
Möbiusbåndet har bare en side hvis antall vridninger er oddetall, og to sider hvis antall vridninger er liketall (partall).
Gauss :*Vorstadien zur Topologie* (1847).

Det Euklidske rom er tredimensjonalt (R^3), men det n-dimensjonale vektorrom (R^n) er ikke forskjellig logisk sett.Et rom med *n* dimensjoner er en manifold. Et punkt har *n* uavhengige koordinater, og når et punkt beveger seg i rommet er det minst en koordiant som endrer seg. Guiseppe Peano (1858-1932) laget aksiomer for vektorrom. Peano gjorde bl.a. undersøkelser av en romlig trekant på en kule. (Tegn en trekant på en appelsin og skrell appelsinen). Clas Hugo Herman Weyl (1885-1955) laget aksiomer for rom, stoff og tid.





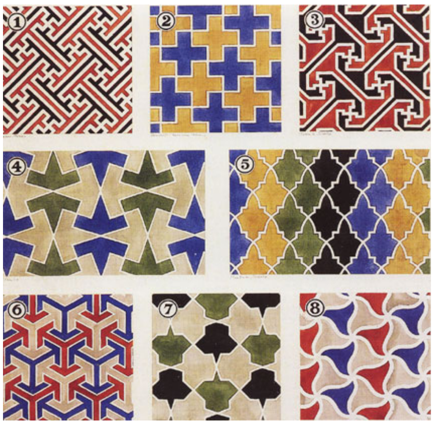
Escher-symmetrier har fascinert matematikere, biologer m.fl.



Escher-symmetrier og Möbius-bånd. Escher har også laget flere grafiske framstillinger som gir en logisk brist i vår hjerne, hvor det for eksempel ser ut som vannet renner oppover. Escher, M.C. & Locher, J.L.: *The infinite world of M.C.Escher*. Abradale Press 1984.

Lim sammen en papirstrimmel etter å ha vridd den en gang. Klipp med saks langs båndet og la deg fascinere at båndet har bare en side ! Resirkuleringssymbolet for resirkulering av innpakningsmateriale o.a. er konstruert som et Möbiusbånd.

Maurtis Cornelis Escher (1898-1972) studerte symmetrier i mosaikk i kirker og moskeer, og laget selv mosaikker bestående av fisk, fugler og øgler. Han var inspirert av den ungarske matematikeren George Pòlya (1887-1985) som fant at det er bare mulig å lage 17 forskjellige symmetrier (*Über die Analogie der Krystallsymmetrie in der Ebene* (Zeitschrift für Krüstallographie (1924)). Røntgendiffraksjon gir et mål på symmetri i krystaller.

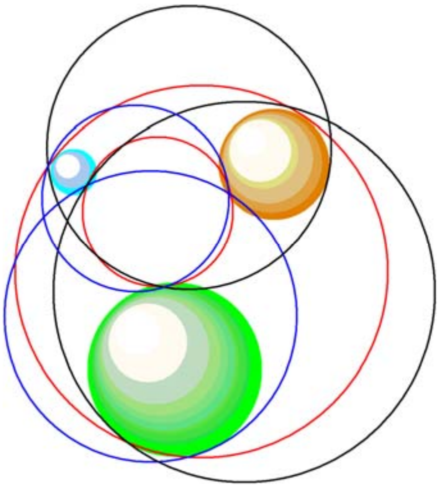


Fotballmolekyl

Et "fotballmolekyl" er et C-60 molekyl (fullerener, etter Buckminster Fuller) som består av 12 pentagoner (5 sider og hjørner) og 20 heksagoner (6 sider og hjørner). Totalantall sider og hjørner blir 12·5 + 20·6 = 180 hjørner og sider. Tre av sidene møtes i hvert hjørne 180/3= 60 hjørner. To av sidene i hhv. pentagoner og heksagoner møtes i hver sidekant 180/2= 90 kanter. Dette tilsvarer 60 karbonatomer (C) og 90 bindinger mellom C-atomene.

Apollonios sirkler

Appolonius fra Perga skrev flere bøker om kjeglesnitt, og laget Apollonios problem. Hvor mange sirkler er det mulig å trekke hvor sirkelen skal berøre alle de tre objektene ?



Her er det tegnet opp 6 muligheter, men det er flere.

Konstruksjon av n-kant

Konstruksjon av en **regulær n-kant** med passer og linjal vil si å plassere hjørnene på en sirkel og med lik avstand fra hverandre. Det betyr at man må kunne konstruere vinkelen θ lik

$$\theta = \frac{360^o}{n}$$

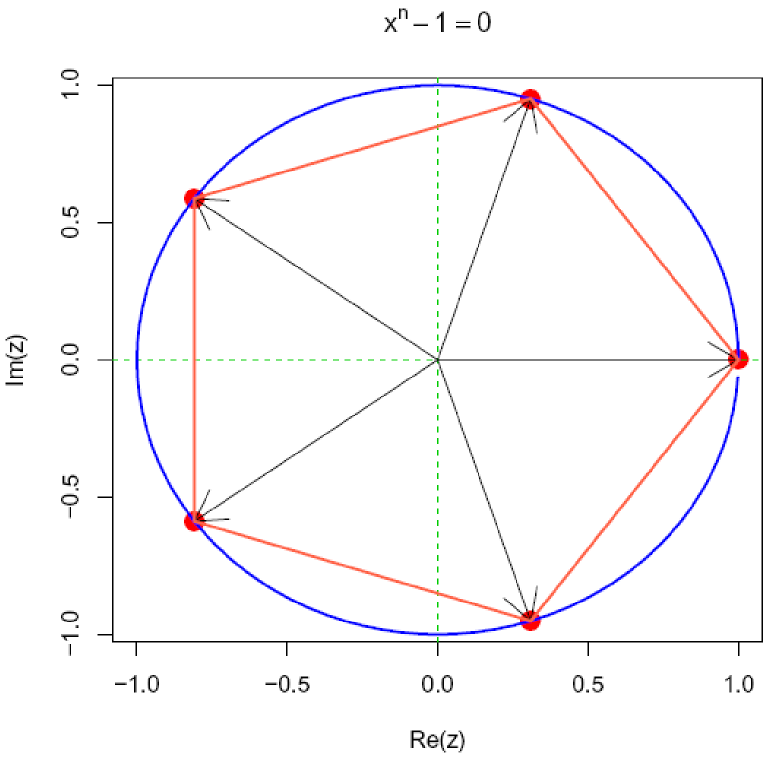
Euklid kjente til konstruksjon av n-kanter hvor n=3,4,5,6,8,10,12,15,16. Konstruksjonen av en regulær 12-kant vil si å kunne konstruere vinkler på 30^o ($12\cdot30^o=360^o$). En regulær trekant kan lages fra denne ved å trekke en linje mellom hvert fjerde hjørne. Siden hvert tall i tallrekken er enten et primtall eller kan uttrykkes som et produkt av primtall kan konstruksjonsproblemet utvides til å gjelde:
For hvilke primtall p er det mulig å konstruere en p-kant med passer og linjal ? Gauss, et matematisk geni, fant at det var mulig å konstruere en 17-kant. For å vise dette måtte han ta i bruk kompleksplanet og komplekse røtter.

Vi starter med ligningen

$$x^n - 1 = 0$$

som har løsningene liggende på en enhetssirkel. Løsningene (røttene) er:

$$cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + isin\left(k\frac{2\pi}{n}\right) \qquad k = 0,1,2,\dots,n-1$$



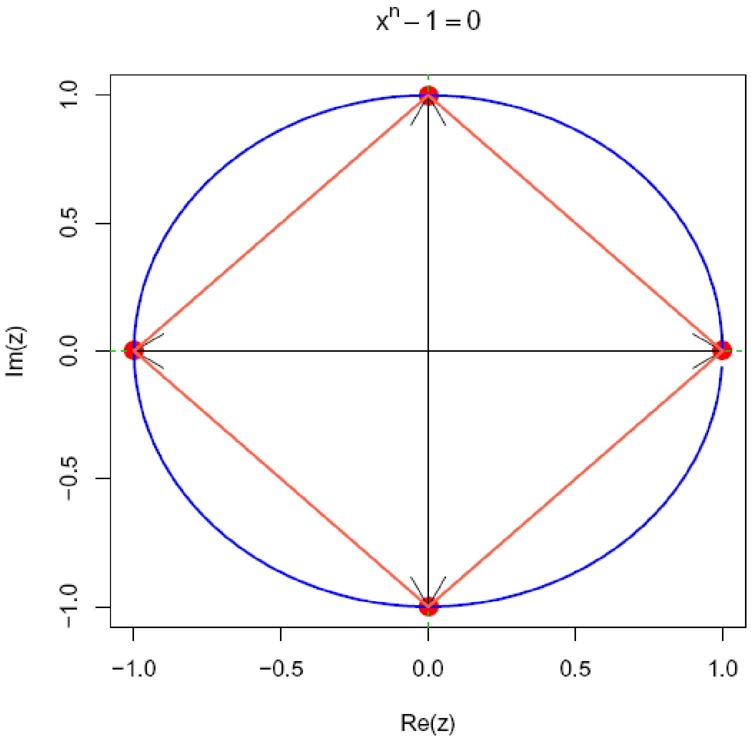
Figur. Løsningene (røttene) til funksjonen x^n-1=0 for n=5 blir liggende på en enhetssirkel i kompleksplanet.

Siden vi har en enhetssirkel er radius=1, så vil cos(x) og sin(x) bli liggende på en sirkel fordi:

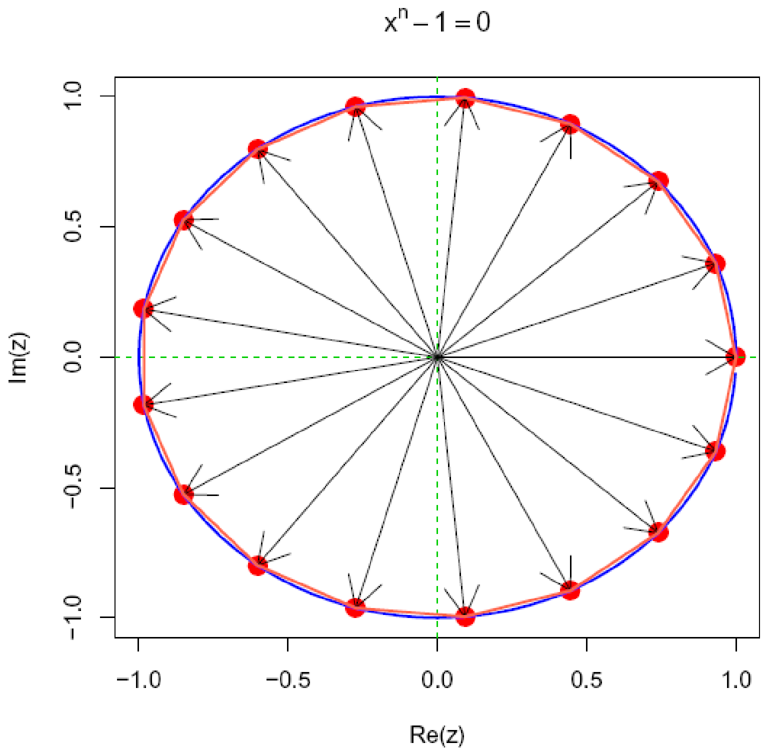
$$cos^2x + sin^2x = 1$$

Vinklene i den regulære femkanten bliri radianer 2*π/5=radianer tilsvarende vinklene i grader 0^o , 72^o ,144^o, 216^o og 288^o.

Vi setter n=4 og finner røttene: 0^o, 90^o, 180^o og 270^o.



Figur. Løsningene (røttene) til funksjonen x^n-1=0 for n=4 blir liggende på en enhetssirkel i kompleksplanet.



Figur. Løsningene (røttene) til funksjonen x^n-1=0 for n=17 blir liggende på en enhetssirkel i kompleksplanet.

For Gauss 17-kant hvor vinklene er 21.17647°. 0.00000°, 21.17647°, 42.35294°, 63.52941° , 84.70588°, 105.88235°, 127.05882°, 148.23529°, 169.41176°, 190.58824°, 211.76471°, 232.94118°, 254.11765°, 275.29412°, 296.47059°, 317.64706° og 338.82353°.

Vi ser litt nærmere på ligningene :

$$x^5 + 1 = 0$$

Fra røtter i høyere grads orden ligninger er veien nå kort over til Galois-grupper, Abel-grupper, og symmetri.

Røttene x_1-x_5 i femtegradsligningen over danner en gruppe

$$E_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 1\}$$

Røttene x_k

$$x_k = cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + isin\left(k\frac{2\pi}{n}\right) \qquad k = 0,1,2, \dots, n-1$$

er generator og primitive n-te røtter av 1, og vi ser at roten x_5=1 blir et identitetselement.

Fjerdegradsligningen

$$x^4 + 1 = 0$$

gir en firkant hvor speiling omkring henholdsvis x- og y-aksen og rotasjon omkring origo gir fire symmetrier.
Røttene blir:

$$x_{1-4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Det viser seg at det er mulig å konstruere en p-kant hvor p er et primtall hvis og bare hvis:

$$p = 2^m + 1$$

hvor m er et naturlig tall. Hvis m inneholder et oddetall som faktor så vil ikke p være et primtall.
For 17-kanten, m=4, p=17:
Vi ser også tilknytning til Fermat-primtallene p_F som er av typen:

$$p_F = 2^{2^n} + 1 \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

og disse tallene øker meget raskt i verdi med økende n:

Fermatprimtall for n=0-5:
3 5 17 257 65537 4294967297