Integrasjon

Halvor Aarnes, UiO, 2014

Innhold

Integrasjon vil si å finne arealer under kurver. Integrering går ut på å tilpasse en rekke rektangler slik at deres totalareal tilsvarer arealet under en funksjonskurve.

$$Hvis \quad F'(x) = f(x) \quad så\ er\ F(x)\ den\ antideriverte\ til\ f(x)$$

Hvis *f(x)* er en gitt funksjon så er integralet av *f(x)* en samling med alle antideriverte til *f(x)*. Integraltegnet ∫ står for en sum

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

hvor *C* er en integrasjonskonstant.

Kjenner vi den deriverte kan denne omformes til et ubestemt integral. **Fundamentalteoremet i kalkulus** viser sammenhengen mellom den deriverte og integral, og danner basis i differensial- og integralregningen. For et bestemt integral i intervallet [a,b]

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^b f(t)\,dt = f(x)$$

$$\int_a^b f(t) = F(b) - F(a)$$

Noen vanlige integraler:

$$\int x^k\,dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C \qquad k \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + C$$

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$$

$$\int \ln(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - x + C$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

Arealet *A* mellom to kontinuerlige funksjoner *f(x)* og *g(x)* hvor *f(x)*≥ *g(x)* er lik:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

$$Konstant\ multiplisering\ for\ integral: \quad \int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)\,dx$$

$$Sumregel\ for\ integral: \quad \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Fundamentalteoremet i kalkulus:
Hvis vi har en kontinuerlig funksjon *f(x)* i intervallet [*a*,*b*] og *F(x)* er den antideriverte til *f(x)* ($F'(x)=f(x)$) for alle *x* i [*a*,*b*] så vil:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Finn integralet:

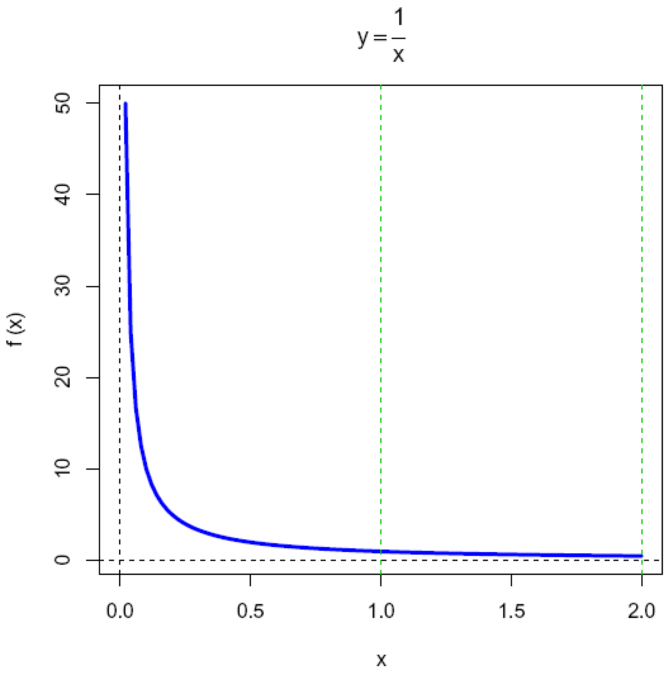
$$\int_0^1 e^x\,dx = e^1 - e^0 = e - 1 \approx 1.718282$$

fordi e^x er lik sin egen antideriverte ($F(x)=e^x$)

Bestem integralet:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) \approx 0.6931472$$

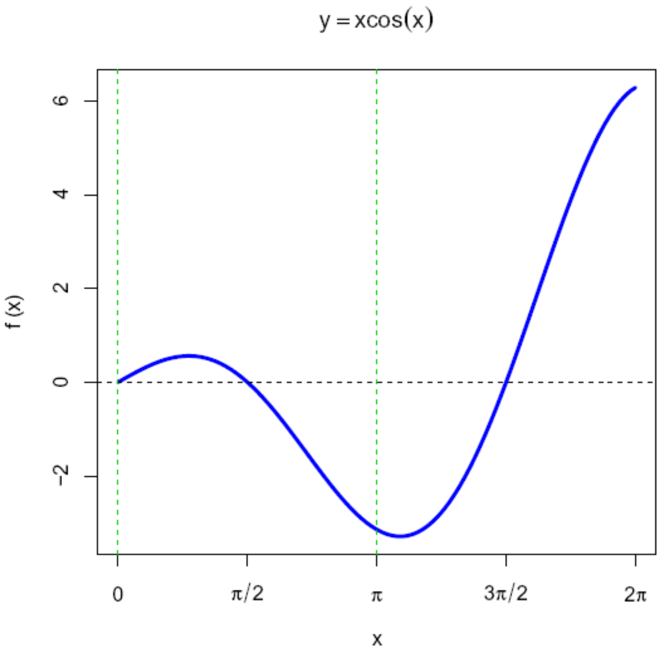
Vi bruker at *d(ln(x))/dx= 1/x*



Figur. Funksjonen y=1/x og integralet i intervallet [1 ,2].

Bestem integralet:

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)dx = -2$$

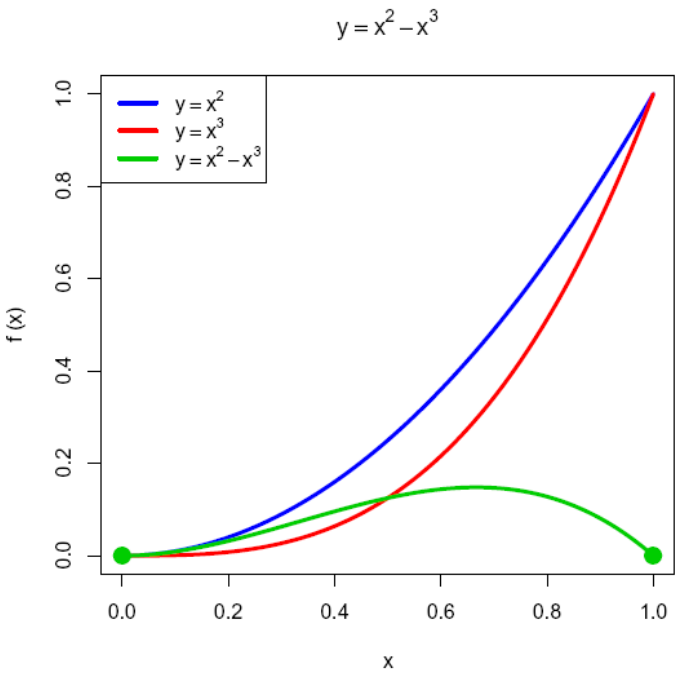


Figur. Integralet for funksjonen y=xcos(x) i intervallet [0,π]

Vi kan finne integralet mellom to funksjoner, det vil si arealet mellom dem:

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

Finn arealet mellom f(x) = x^2 og g(x) = x^3:



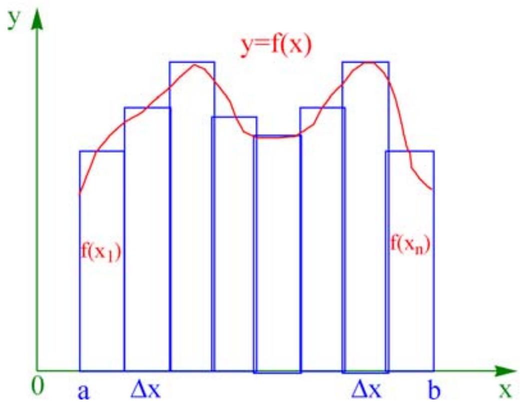
Figur. Funskjonene y=x^2, y=x^3 og y=x^2-x^3, sistnevnte med røttene merket med et punkt. Arealet blir 0.0833..funnet ved numerisk integrasjon.

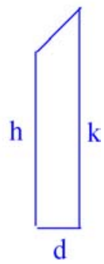
Numerisk integrasjon og Simpsons regel

Areal ved Riemann sum

Man kan beregne arealet under en kurve ved å summere en rekke rektangler som følger kurven under et gitt intervall [a,b], jo flere rektangler, desto mer nøyaktig integral. Hvis vi har et areal under en ikke-negativ kontinuerlig funksjon *y=f(x)* avgrenset av intervallet [*a,b*] hvor $a \le x \le b$, så kan intervallet [*a,b*] deles inn i *n* delintervaller med lik lengde:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$





Arealet av det første rektangel blir $\Delta x \cdot f(x_1)$ osv. Vi kan lage en **Riemann sum** for funksjonen f kalt $S_n(f)$ og arealet blir grenseverdien for denne summen når n → ∞

$$S_n(f) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$Areal\ under\ f(x)\ \ a \le x \le b\text{:}\ \lim_{n\to\infty} S_n(f)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

Hvis f(x) er negativ for noen verdier lages rektangler under x-aksen, og man trekker arealene over og under x-aksen fra hverandre slik at man ender opp i et endelig areal.

Gjennomsnittsverdien for f(x) i intervallet [a,b] blir:

$$Gjennomsnittsverdi\ for\ f: \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Skal man beregne arealet numerisk må man ha en formel å forholde seg til, og finne den antideriverte for å integrere blir komplekst.

Areal ved trapesmetoden

Vi kan finne et approksimert (tilnærmet) areal ved **trapesmetoden**. Arealet av et trapes på figuren blir bredden d (x-verdi) ganger gjennomsnitt av de to paralelle sidene h og k (y-verdi)

$$Areal = \frac{1}{2}(h+k)\cdot d$$

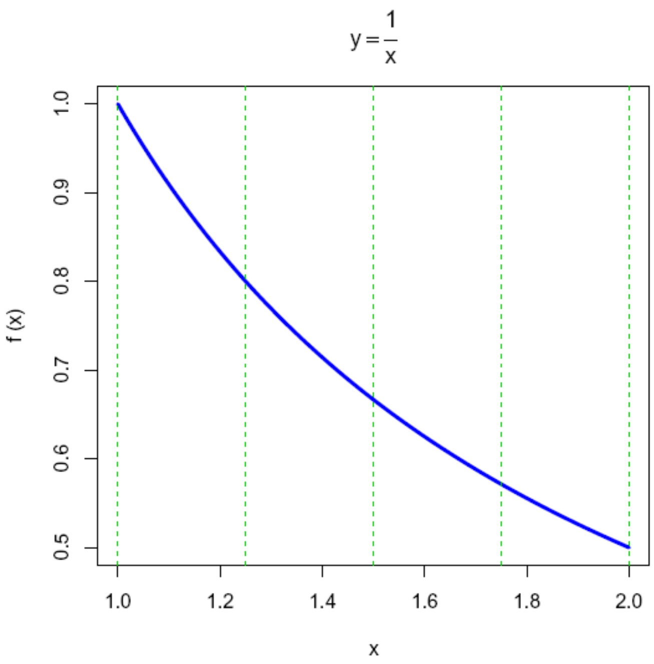
Vi gjør i prinsippet som Riemann summering, og kan summere arealene av trapesene:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]\cdot \Delta x$$

Med en slik trapes approksimering må man også definere en errorfunksjon (erf).

Vi kan bruke trapesmetoden til å finne arealet av

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln(2) = 0.693147 \ldots$$



Figur. Integralet for y=1/x i intervallet [1, 2] med trapesmetoden for n=4.

Vi bruker trapesmetoden for n=4. Bredden av hvert trapes

$$\Delta x = \frac{(2-1)}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$Areal\ (4) = \left(\frac{\mathrm{f}(1)}{2} + \mathrm{f}(1.25) + \mathrm{f}(1.5) + \mathrm{f}(1.75) + \frac{\mathrm{f}(2)}{2}\right) \cdot \Delta\mathrm{x} = 0.6970$$

For n=8

$$\Delta x = \frac{(2-1)}{8} = \frac{1}{8} = 0.125$$

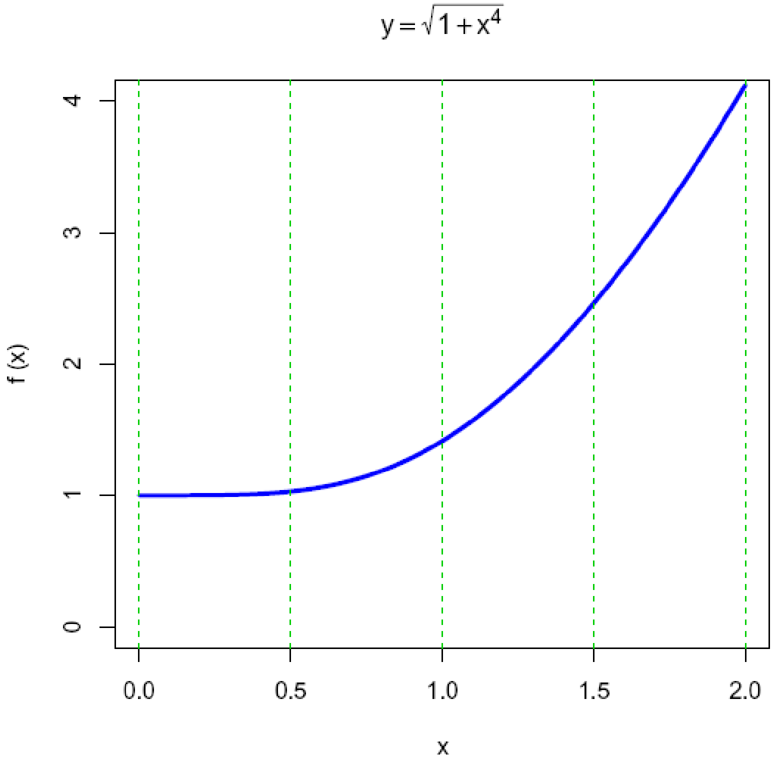
$$Areal\ (8) = \left(\frac{\mathrm{f}(1)}{2} + \mathrm{f}(1.25) + \ \mathrm{f}(1.25) + \mathrm{f}(1.375) + \mathrm{f}(1.5) + \mathrm{f}(1.75) + \frac{\mathrm{f}(2)}{2}\right) \cdot \Delta\mathrm{x} = 0.6941$$

Nøyaktigheten vil øke når n øker og numerisk integrasjon gir svaret 0.6941372.

Trapesmetoden for funksjonen:

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\, dx$$

som med numerisk integrasjon gir arealet lik 0.3653484



$$\Delta x = \frac{(2-0)}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$Areal\ (4) = \left(\frac{\mathrm{f}(0)}{2} + \mathrm{f}(0.5) + \mathrm{f}(1) + \mathrm{f}(1.5) + \frac{\mathrm{f}(2)}{2}\right) \cdot \Delta\mathrm{x} = 0.3734379$$

Numerisk integrasjon og Simpsons regel

Imidlertid ser vi heller på **Simpsons regel** som brukes for numerisk approksimasjon av integraler basert på å betrakte *f* som kvadratiske polynomer. Vi starter med å dele inn integralintervallet [*a*,*b*] i et helt positivt partall *n*.

Vi har Simpsons regel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) + f(x_n)] \cdot \frac{\Delta x}{3}$$

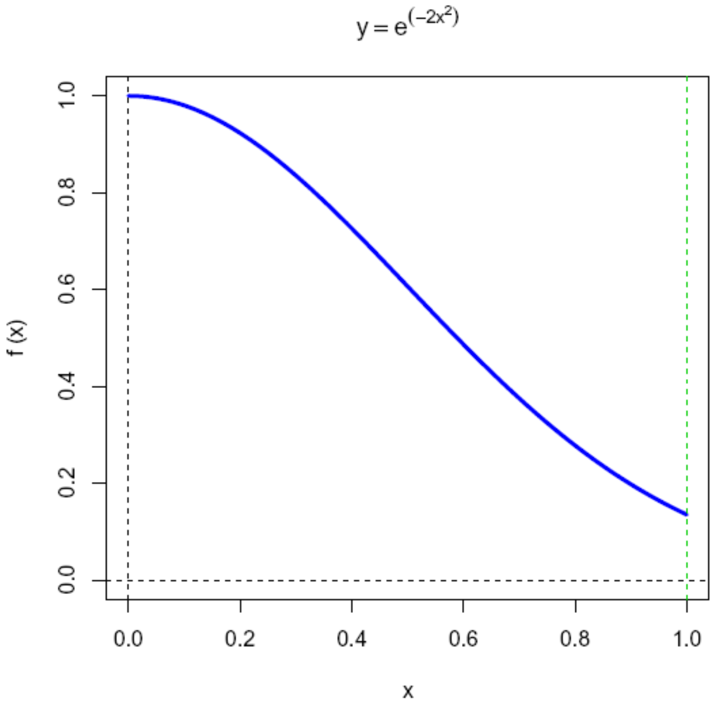
Vi har følgende estimat av absoluttverdien for error (feil):

$$error \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4} \qquad K = max\left|f^{(4)}(x)\right|$$

hvor ved å øke *n* minsker error i fjerde potens.

Hvis man *e.g.* skal integrere:

$$\int_0^1 e^{-2x^2}\,dx$$



med Simpsons regel må for de første partallene være n=2 eller n=4, vi regner ut for n=2 som gir $\Delta x=\frac{1}{2}$ og $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{2}$ $x_2=1$

$$\int_0^1 e^{-2x^2}\,dx \approx [f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]\cdot\frac{\Delta x}{3}$$

$$= [1 +\ 2.426123 +\ 0.1353353]\cdot\ 0.1666667 =\ 0.5935765$$

Vi kan regne ut mer nøyaktig ved å øke *n*.
Vi kan sammenligne med numerisk integrasjon som gir svaret 0.598144

For n=4

$$\int_0^1 e^{-2x^2}\,dx \approx [f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]\cdot\frac{\Delta x}{3}$$

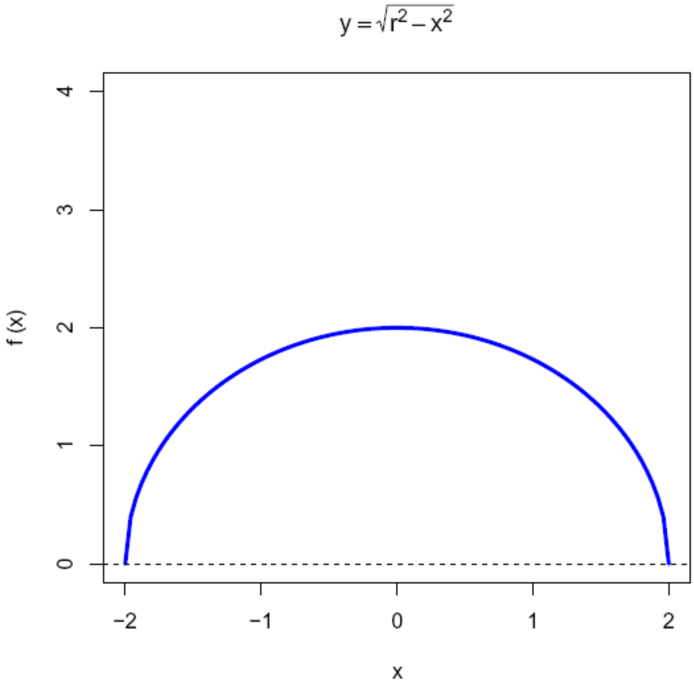
som gir arealet 0.5980828.

Volum ved rotasjon

Vi kan finne volumet av tredimensjonale legemer ved å rotere objektet omkring x-aksen.

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Vi kan finne volumet av en kule ved å rotere flaten av en halvsirkel 2π rundt x-aksen, med radius a=2



$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^r (a^2 - x^2)\, dx = 33.51033$$

En sirkel med sentrum i origo og radius a har formel:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Beregning av buelengden til en graf

Vi kan finne buelengden (s) til en graf beskrevet av en funksjon f(x) over et intervall [a,b]:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Vi beregner buelengden av en halvsirkel ved integrering og sammenligner med utregning fra formel, og vi får det samme:
Vi finner den deriverte av

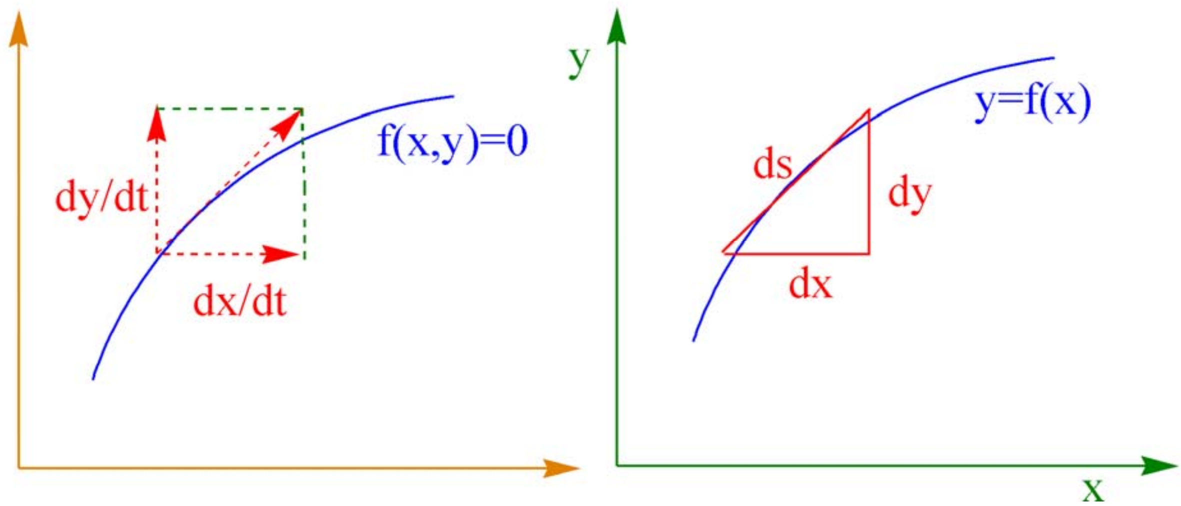
$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Ved numerisk derivasjon finner vi den deriverte
f'(x)= -(0.5 * (2 * x * (r^2 - x^2)^-0.5))

setter inn i formelen for s, regner ut for r=2, foretar numerisk integrasjon og finner buelengden blir 6.283185

Matematisk analyse og kalkulus

Isaac Newton (1642-1727) publiserte i 1687 *Philosophiae naturalis principia matematica* (matematiske prinsipper i naturfilosofien), et grunnleggende verk for moderne eksakt vitenskap som dannet grunnlaget for mekanikk og gravitasjonsteori.



Newton tenkte seg en funksjon *f(x,y)* som var møtepunktet for en vertikal linje *dy/dt* og en horisontal linje *dx/dt* som beveget seg med tiden hvor tangenten som er diagonalen i paralellogrammet blir hastighetsvektoren. Forholdet mellom de to linjene blir *dy/dx*.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) Skrev i 1714 *Historia et origo calculi differentialis* (Historien om opprinnelsen til differensialregningen). Ifølge Leibniz kunne man nå tenke seg meget små (infinitesimale) linjestykker *ds* på kurven *y=f(x)* til å være hypotenusen i en trekant. Deretter kunne man bruke Pythagoras teorem på trekanten med sider *dx* og *dy* slik at:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

Nå dreier man stykket *ds* rundt x-aksen i en sirkel med radius *y*, noe som gir et infinitesimalt areal *dA*:

$$dA = 2\pi y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

Deretter kan vi summere opp de små arealene og finne arealet under kurven:

$$A = \int dA = \int 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

Sykloide

En sykloide dannes av en sirkel med radius *r* som danner en tangent til x-aksen. Hvis *P* er et punkt på sirkelen så følger punktet *P* en sykloide når sirkelen ruller langs x-aksen. Ta et hjul, sett et punkt P på hjulet og rull det bortover bakken. Punktet P vil nå beskrive en sykloide. Sykloiden dannes av koordinatene *(x,y)* i parameterform:

$$x = r \cdot (t - \sin(t))$$
$$y = r \cdot (1 - \cos(t))$$

En bue av sykloiden får vi ved $0 \le t \le 2\pi$
Sykloide buer i Kimbell Art Museum i Texas, arkitekt Louis Kahn.
Hopkins center, Hanover, New Hampshire.

Vi kan betrakte sykloiden beskrevet av:

$$r(t) = [r \cdot (t - \sin(t)), r \cdot (1 - \cos(t))]$$

Den deriverte blir tangenten = diagonalen i parallelogrammet *(r,0)* og *(-r·cos(t),r·sin(t)*:

$$r'(t) = [r \cdot (1 - \cos(t)), r \cdot (\sin(t))]$$

Vi kan finne den deriverte *dx/dt*:

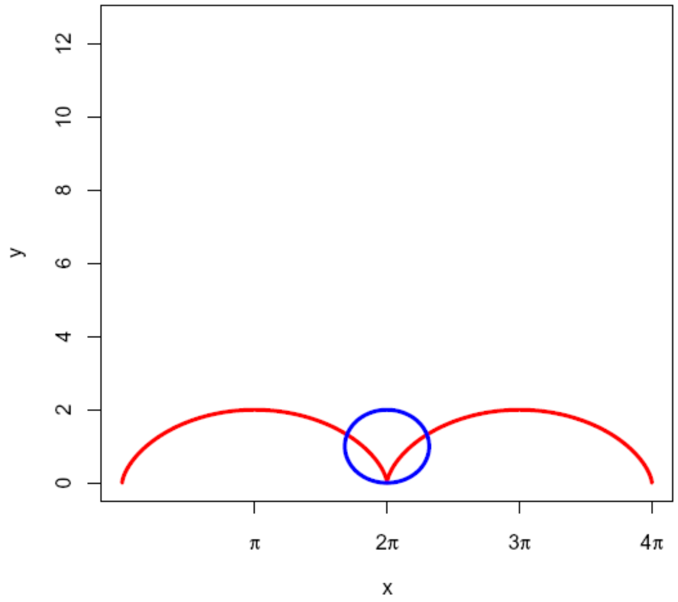
$$\frac{dx}{dt} = r \cdot (1 - \cos(t))$$
$$\frac{dy}{dt} = r \cdot \sin(t)$$

Giles Persone de Roberval kunne i 1634 vise at arealet under sykloiden er tre ganger arealet til sirkelen som lager sykloiden. Roberval skjønte intuitivt av tangenten representerte en bevegelse. Arealet under en av buene er:

$$A = \int_{t=0}^{t=2\pi} y \cdot dx = \int_{t=0}^{t=2\pi} r \cdot (1 - \cos(t)) \cdot dx$$
$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} r^2 \cdot (1 - \cos(t))^2 \cdot dt = 3\pi r^2$$

Christopher Wren viste i 1658 at lengden av sykloiden er fire ganger diameteren til sirkelen som lager sykloiden.
Lengden S av sykloiden ved å integrere hypotenusen i små trekanter hvor lengden er lik kvadratroten av summen av kvadratene av de to sidene i trekanten (Pythagoras)

$$S = \int_{t=0}^{t=2\pi} \left(\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dt$$
$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} \left((r \cdot \sin(t))^2 + \left(r \cdot (1 - \cos(t))\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} 2r \cdot sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8r$$



Figur. Sykloide med r=1. Ved et gitt tidspunkt ligger sentrum i sirkelen ved *(x,y)=(rt,r)*.Lager en sirkel med origo i (2π,1).

Multiple integraler

Vi har tidligere sett at av et integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

angir arealet av et todimensjonalt plan begrenset av y-koordinaten y=f(x), x-aksen og de loddrette linjene ved x=a og x=b. Dette integralet angir total mengde stoff fordelt langs x-aksen mellom a og b.

Vi kan utvide dette til **multiple integraler**. For det tredimensjonale rommet med et **dobbeltintegral** for to variable over et domene D i planet, hvor vi finner volumet av en region S begrenset av overflaten z=f(x,y). Vi kan integrere over et rektangel eller mer generelt:

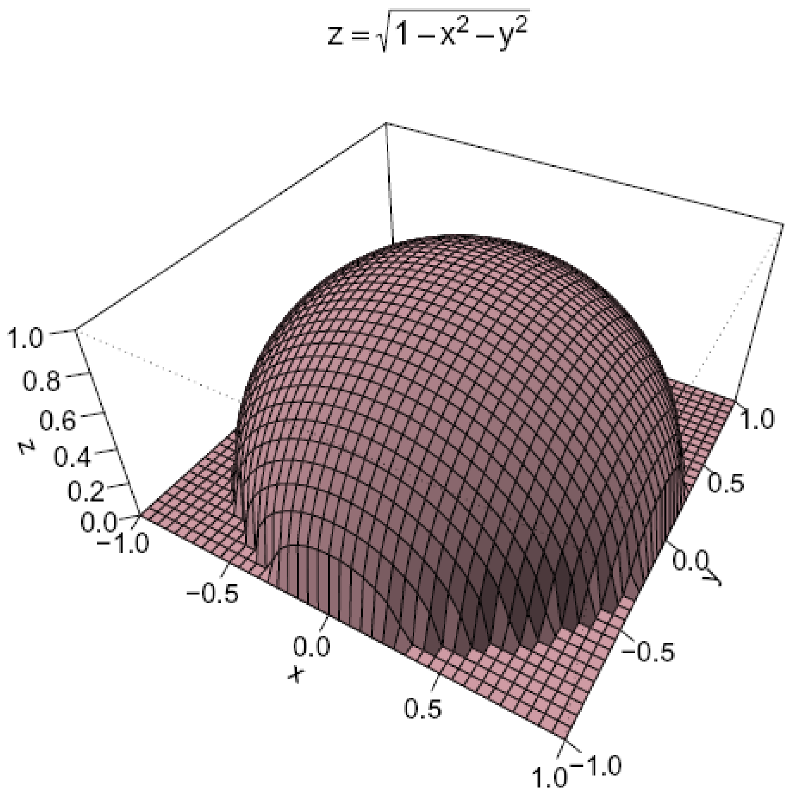
$$\iint f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$D = \{(x,y) | a \leq x \leq b,\ \ c \leq y \leq d\}$$

Volumet av en halvkule med radius 1 er beskrevet av følgende dobbeltintegral:

$$V = \iint \sqrt{1-x^2-y^2}\, dA = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)\, dy = \frac{2\pi}{r}$$

Halvkulen skjærer xy-planet i en sirkel med radius=1.



Vi kan uttrykke en sirkel ikke bare i kartesiske koordinater (x,y) men også i form av polarkoordianter (r,θ), r er radius og theta (θ) er vinkelen.
Vi har:

$$x = rcos\theta \qquad y = rsin\theta \qquad r^2 = x^2 + y^2 \qquad tan\theta = \frac{y}{x}$$

Arealet av en polarkurve begrenset av r=f(θ) og vinklene α=θ og β=θ

$$A = \iint rdrd\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{0}^{f(\theta)} rdr = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(f(\theta)\right)^2 d\theta$$

Vi kan utvide til et **trippelintegral** til å gjelde et tredimensjonalt domene:

$$\iiint_B f(x,y,z)\, dxdydz$$

Trippelintegralet til en funksjon f(x,y,z) kan betraktes som et firedimensjonalt volum (hypervolum). På samme måte som vi hadde polarkoordinater i planet har vi **sylinderkoordinater** (r,θ,z) hvor z er den vertikale koordinaten.

Vi kan også ha tredimensjonale **sfæriske koordinater** (ρ,φ,θ) hvor rho (ρ≥0) er avstanden fra origo O til et punkt P på kula, phi (φ) er vinklen som linjen OP danner med den positive retningen av z-aksen som står normalt på xy-planet, 0≤φ≤π , og theta (θ) er vinklen mellom planet som inneholder OP og z-aksen, 0≤θ≤2π

$$x = \rho sin\varphi cos\theta \quad y = \rho sin\varphi sin\theta \quad z = \rho cos\varphi$$

Kurveintegral (linjeintegral)

Vi kan definere **kurveintegralet** (linjeintegralet) til en funksjon f(x,y) langs en kurve r(t)=(x(t),y(t)) som:

$$\int_a^b f ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 dt}$$

Dette kan brukes til å beregne **buelengden**
Buelengden for kurven r(t)=Rcos(t),Rsin(t) fra 0 til 2π blir:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-Rsin(t))^2 + (Rcos(t))^2}\, dt = \int_0^{2\theta} R\sqrt{sin^2 t + cos^2 t dt} = \int_0^{2\pi} R dt$$

Hvis vi skal integrere rundt en sirkel, som er en lukket kurve, gir dette et **lukket integral** som uttrykkes som:

$$\oint f ds$$

Lagranges multiplikatormetode (Joseph-Louis Lagrange 1736-1813) kan benyttes til å finne maksimums- og minimumspunkter for funksjoner. Hvis vi har to funksjoner f(x,y) og g(x,y) som har et berøringspunkt (x0,y0), så vil de partiellderiverte være proporsjonale i berøringspunktet og det finnes en Lagrange multiplikator lambda (λ) slik at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$$

Litteratur:

Apostol, T.M. *Calculus* (Vol I + II). Blaisdell Publ. Comp. 1962.

R Development Core Team (2011). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http://www.R-project.org/.

Rottmann, Karl: *Matematische Formelsammlung*. Bibliographisces Insitutt. Hochschultaschenbücher-Verlag. 1960.

Wikipedia