MAT1100U 8. september

onsdag 8. september 2021 12:23

$z = a + ib$

$a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$

$\bar{z} = a - ib$

3.1.10

Anta at både $z + w$ og zw er reelle. Vis at da er enten z og w reelle eller de er konjugerte av hverandre.

Kladd:

$z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

$zw = (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(bc + ad)$

$b + d = 0 \quad \land \quad bc + ad = 0$

$b = -d$

$-dc + ad = 0 \qquad d(-c + a) = 0$

$= 0 \quad \lor \quad c = a$

$b = d = 0$ gir $z, w \in \mathbb{R}$

$c = a$ og $b = -d$ gir $z = \bar{w}$

$z = a + ib$

$w = a - ib$

La $z, w \in \mathbb{C}$.

Anta at $z + w$ og $zw \in \mathbb{R}$.

Vi vil vise at z og $w \in \mathbb{R}$ eller $z = \bar{w}$.

Vi skriver $z = a + ib$ og $w = c + id$ der $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ og $i^2 = -1$.

Argumentere:

Vi får

$$z+w = a+ib+c+id = a+c+i(b+d)$$

$$zw = (a+ib)(c+id) = ac-bd+i(bc+ad)$$

Siden $z+w$ og zw er reelle, har vi at

$$b+d=0 \quad \text{og} \quad bc+ad=0$$

$$\underline{b=-d} \quad \text{og} \quad \underline{bc+ad=0}$$

$$\longrightarrow \quad -dc+ad=0$$

$$\underline{d(a-c)=0} \quad \left(\begin{matrix} d=0 \\ \text{eller } a=c \end{matrix}\right)$$

Det vil si at vi har

$$\underline{b=-d \text{ og } d=0} \quad \text{eller} \quad \underline{b=-d \text{ og } a=c}$$

$$b=d=0 \quad \text{eller} \quad z=a+ib \text{ og } w=a-ib$$

Konklusjon:

Så $z, w \in \mathbb{R}$ eller $z=\overline{w}$. ■

- Anta ....
- Vi vil vise at....
- Argumentere (ideer)
- Konkludere

Vis at

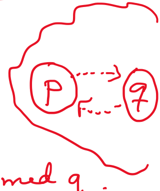
$$p \Rightarrow q$$

Direkte bevis:

Anta p

⋮

Konkludere med q.



Kontrapositivt:

Anta "ikke q"

⋮

Konkluder med "ikke p".

Motsigelsesbevis:

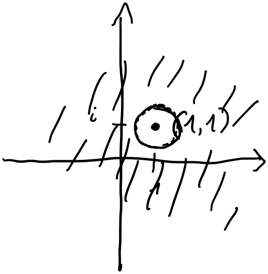
Anta p, ikke q

⋮

Induksjon: alle naturlige tall | Motsigelse. Konkluderer med q.

3.2.10 Skisser områdene i det komplekse planet.

c) $\left\{ z \overset{\text{slik at}}{\mid} |z-(i+1)| \geq \frac{1}{2} \right\}$



$$z = x+iy$$

$$|z-(i+1)| \geq \frac{1}{2}$$

$$|x+iy-i-1| \geq \frac{1}{2}$$

$$|x-1+i(y-1)| \geq \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \geq \frac{1}{2}$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2 \geq \frac{1}{4}$$

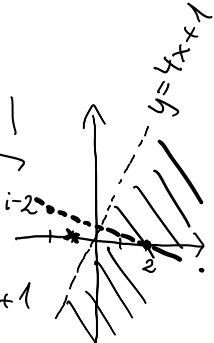
$$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Punktene på og utenfor en sirkel med sentrum i (1,1) og radius lik $\frac{1}{2}$.

---

d) $\{ z \mid \underline{|z-2| < |z-i+2|} \}$

$|z-(i-2)|$



$$z = x+iy$$

$$|x+iy-2| < |x+iy-i+2|$$

$$|x-2+iy| < |x+2+i(y-1)|$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} < \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$$

$$(x-2)^2+y^2 < (x+2)^2+(y-1)^2$$

$$\underline{\underline{x^2}}-4x+\underline{\underline{4}}+\underline{\underline{y^2}} < \underline{\underline{x^2}}+4x+\underline{\underline{4}}+\underline{\underline{y^2}}-2y+1$$

$$2y < 8x + 1$$
$$y < 4x + \frac{1}{2}$$

Punktene som ligger under linja $y = 4x + \frac{1}{2}$.

Forrige gang:

$$e^{a+ib} = e^{a} \cdot e^{ib} = e^{a}(\cos b + i\sin b)$$

Def. $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$

$z = a + ib$ kartesisk form

$= r\cos\theta + ir\sin\theta$ polarform

$= re^{i\theta}$ kompakt polarform

Åpner flere dører: $(n \in \mathbb{N})$

- de Moivres formel $(\cos\theta + i\sin\theta)^{n} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
- formler for $\sin(n\theta)$ og $\cos(n\theta)$
- regne ut potenser av komplekse tall
- definere $\cos z$ og $\sin z$
- trekke røtter

3.4. Å trekke røtter av komplekse tall:

Gitt $z \in \mathbb{C}$.

Se på likningen $x^n = z$.

En løsning av denne likningen kalles en n-te rot av z.

$x^3 = 8$

$\sqrt[3]{8} = 2$

Hvis $z \in \mathbb{R}$:

La $z = a$. Vi har likningen $x^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} \text{den unike løsningen av } x^n = a \\ \qquad \text{når } n \text{ er oddetall} \\ \text{den positive løsningen av } x^n = a \\ \qquad \text{når } n \text{ er partall og } a \geq 0 \end{cases}$$

Vi definerer ikke $\sqrt[n]{a}$ når $a < 0$ og n partall.

$x^4 = 16$

$x = \pm 2$

eks. $\sqrt[4]{16} = 2$

(pos. løsn. av $x^4 = 16$)

$$\boxed{x^2 = -2}$$

Hvordan finne vi n-te røttene til z, $z \in \mathbb{C}$?

Vi utnytter den kompakte polarformen:

$$z = re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$\boxed{2 = 2 \cdot e^{i0}}$$

$$\boxed{w_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}}$$

Prinsipalroten til z

w_0 er en n-te rot av z fordi

$$(w_0)^n = \left(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n = re^{i\theta} = z$$

$$z = re^{i(\theta + 2k\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}}$$

er også n-te røtter av z siden $w_k^n = z$.

Siden $k \in \mathbb{Z}$: uendelig mange røtter (?)

$n=4$:

$$w_0 = r^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\theta}{4}}$$

$$w_1 = r^{\frac{1}{4}} e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi}{4}\right)} = r^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\theta}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$w_2 = r^{\frac{1}{4}} e^{i\left(\frac{\theta + 4\pi}{4}\right)} = r^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\theta}{4}} \cdot e^{i\pi}$$

$$w_3 = r^{\frac{1}{4}} e^{i\left(\frac{\theta + 6\pi}{4}\right)} = r^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\theta}{4}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$w_4 = r^{\frac{1}{4}} e^{i\left(\frac{\theta + 8\pi}{4}\right)} = r^{\frac{1}{4}} \cdot e^{i\frac{\theta}{4}} \cdot \underbrace{e^{i2\pi}}_{1} = w_0$$

$$w_5 = r^{\frac{1}{4}} e^{i\left(\frac{\theta + 10\pi}{4}\right)} = r^{\frac{1}{4}} \cdot e^{i\frac{\theta}{4}} \cdot \underbrace{e^{i\frac{5\pi}{2}}}_{e^{i\frac{\pi}{2}}} = w_1$$

$$\vdots$$

$w_0 = w_4$, $w_1 = w_5$, ...

Fire 4. røtter: w_0, w_1, w_2 og w_3.

n-te røtter: $w_k = w_{k'} \iff k-k' = sn \;, s\in\mathbb{Z}$

La $w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$ og $w_{k'} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k'\pi}{n}\right)}$

for at $w_k = w_{k'} \iff \left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) - \left(\frac{\theta+2k'\pi}{n}\right) = 2\pi s$ $(s\in\mathbb{Z})$

$$\frac{\pi(k-k')}{n} = \pi s$$

$$k-k' = ns \qquad \blacksquare$$

Dvs. $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ er n forskjellige n-te røtter av z.

Oppsummering: $z\neq 0$, $z = re^{i\theta}$ har nøyaktig n n-te røtter som er gitt ved $w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

Merk! Alle n-te røttene ligger på sirkelen med radius $r^{\frac{1}{n}}$.

Hvordan regne ut røttene:

roterer med $\frac{2\pi}{n}$

$$w_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$$

$$w_1 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right)} = \underbrace{r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}}_{w_0} \cdot e^{i\frac{2\pi}{n}} = w_0 \boxed{e^{i\frac{2\pi}{n}}}$$

$$w_2 = w_1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

.

$\vdots$

$$w_k = w_{k-1} \cdot e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

---

eks. Finn 5. røttene til 1.

$$z = 1 = 1e^{i0}$$

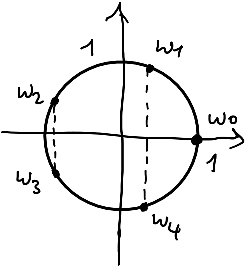
$$w_0 = 1^{\frac{1}{5}} e^{i\frac{0}{5}} = \underline{\underline{1}}$$

$$w_1 = \underline{\underline{1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{5}}}}$$

$$w_2 = e^{i\frac{2\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{5}} = \underline{\underline{e^{i\frac{4\pi}{5}}}}$$

$$w_3 = e^{i\frac{4\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{5}} = \underline{\underline{e^{i\frac{6\pi}{5}}}}$$

$$w_4 = e^{i\frac{6\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{5}} = \underline{\underline{e^{i\frac{8\pi}{5}}}}$$



$$w_1 = \overline{w_4}$$

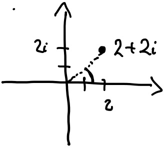
$$w_2 = \overline{w_3}$$

---

eks. Finn 4. røttene til $z = 2 + 2i$.

$$z = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 8^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$w_0 = \left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{16}} = \underline{\underline{8^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16}}}}$$

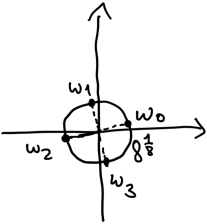


$$|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$w_1 = 8^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{4}} = \underline{8^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{9\pi}{16}}}$$

$$w_2 = 8^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{9\pi}{16}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{4}} = \underline{\underline{8^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{17\pi}{16}}}}$$

$$w_3 = 8^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{17\pi}{16}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{4}} = \underline{\underline{8^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{25\pi}{16}}}}$$



Kvadratrøtter:

$$z = re^{i\theta}$$

$$w_0 = \sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$$

prinsipalroten: $\sqrt{}$

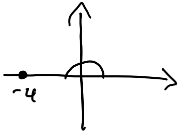
Den andre kvadratroten:

$$w_1 = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot \underbrace{\boxed{e^{i\frac{2\pi}{2}}}}_{=-1} = \underline{\underline{-\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}}}$$

eks. $\sqrt{-4}$ prinsipalroten av -4

$$-4 = 4e^{i\pi}$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{2i}}$$



Generelt: Hvis $a>0$: $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot i$

$$-1 = i\cdot i \underset{\text{ok}}{=} \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} \overset{\text{feil!}}{=} \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

(prinsipalroten av -1 er lik i)

NB! $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ gjelder kun når $a,b>0$

---

eks. $z^2+(1-i)z-i=0$

Kompleks andregradslikning i z.

$a^c\cdot b^c \overset{?}{=} (ab)^c$

$a,b\in\mathbb{C}$

$$z = \frac{-(1-i)\pm\sqrt{(1-i)^2+4i}}{2} = \frac{-(1-i)\pm\boxed{\sqrt{2i}}}{2}$$

prinsipalroten til $2i$

$(1-i)^2+4i$

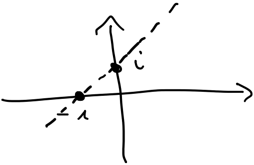
$= 1-2i-1+4i$

$= 2i$

$$z = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$w_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{1+i}$$

$$= \frac{-(1-i)\pm(1+i)}{2} = \begin{cases} \underline{\underline{i}} \\ \underline{\underline{-1}} \end{cases}$$

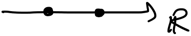


Reelle andregradslikninger:

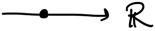
$$az^2+bz+c=0 \qquad a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$$

$b^2-4ac = \Delta$ (diskriminanten)

$\Delta > 0$: to løsninger

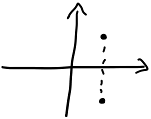


$\Delta = 0$: én løsning



$\Delta < 0$: to komplekse løsninger

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

konjugerte
av hverandre