

Om noen av emnene i analyse ved MI

En komité bestående av Helmer Aslaksen, Erik Bédos, Erik Løw, Kent-André Mardal, Tale Bakken Ulfsby og Ragnar Winther ble nedsatt 23. februar 2016 av utdanningsleder ved MI med mandat til å foreta en kritisk gjennomgang av noen av analyse-emnene på instituttet.

1 Rundt emnet MAT 2400 Reell analyse

Abstraksjonsnivået i MAT 2400 har i en god del år skapt problemer for flere grupper studenter, spesielt lektorstudentene. Vi har derfor vurdert om MAT 2400 burde erstattes av et mindre krevende kurs i reell analyse. Etter å ha sett på mulige bøker som kunne passe til et slikt emne og sett nøyere på vårens utgave av MAT 2400 (der introduksjonen til Lebesgue-integrasjon nå er blitt ertsatt med et kapittel om differensialregning i normerte rom), er vår anbefaling at MAT 2400 bør videreføres, med et pensum i tråd med nåværende versjon, men med noen mindre endringer/innskrenkninger i stoffmengden. Bl.a. mener vi at Baires kategoriteorem og dets konsekvenser, som for eksempel Banach-Steinhaus teoremet, ikke hører hjemme i et analysekurs for fjerde semester. Det er viktig at dette emnet framstår som attraktivt og relevant, ikke bare for studenter som går i retning av klassiske ren matematiske disipliner, men også for studenter som ønsker å arbeide med mer anvendte matematiske disipliner som differensialligninger, matematisk finans, mekanikk, numerisk analyse, og statistikk. En god del av studentene i disse gruppene har behov for et nivå innen matematisk analyse som går ut over hva de lærer de tre første semestrene, både når gjelder matematisk presisjon og omfang. Et detaljert forslag til revidert emnebeskrivelse er gitt nedenfor.

I tillegg mener vi at det bør opprettes et nytt emne, MAT 2100 *Elementær reell analyse*, muligens som en prøveordning i to eller tre år hvis det er tillatt. Et forslag til emnebeskrivelse er vedlagt. Vi tror nemlig at det er behov for et kurs beregnet for studenter som ønsker å dvele mer ved de teoretiske aspektene av envariabel reell analyse, og/eller som føler at de ikke er matematisk modne nok for MAT 2400. Dette gjelder spesielt for lektorstudentene, men vil også være aktuelt for andre studentkategorier. Blandt bøkene vi har vurdert som egnet for et slikt kurs har vi festet oss ved boka til S. Abbott *Understanding analysis* (2. utgave, 2015, Springer Verlag). Den virker spennende og pedagogisk gjennomtenkt.

Begge emnene bør gies på våren og kunne taes i 4. semester av et bachelorstudium. Studiepoengsreduksjon for studentene som velger å ta begge kursene bør unngås. Det bør ellers fremheves i studieplaner at MAT2100 ikke vil gi de ønskede forkunnskapene for de emnene som bygger videre på MAT2400, som

f.eks. MAT3400/4400 og MAT3500/4500.

Vi ble forøvrig bedt om å vurdere om MAT 2400 burde heller gies på høsten, mens MAT 2410 *Innføring i kompleks analyse* (som er et høst-emne) burde gies på våren i stedet. Isolert sett kunne dette være en god idé, men når man tar i betraktning at 5. semester er satt av som utviklingssemester for mange studenter, samtidig som MAT 2400 spiller en sentral rolle i oppbyggingen av flere studieveier, mener vi at det ville være uheldig med et slikt bytte av semester.

MAT 2100 Elementær reell analyse (vår)

Forslag til emnebeskrivelse:

Emnet er beregnet for studenter som ønsker en grundig innføring i de teoretiske aspektene av envariabel reell analyse og en opptrening i grunnleggende bevisteknikker som brukes i analyse. Temaer som dekkes er:

Reelle tall (aksiomatisk presentasjon, kardinalitetsbetraktninger, åpne og lukkede mengder, kompakthet), reelle følger og rekker (konvergens), reelle funksjoner (kontinuitet, mellomverdisetningen, derivasjon, middelverditeoremet), Riemann-integrasjon og analysens fundamentalteorem, følger og rekker av reelle funksjoner (punktvis og uniform konvergens, derivasjon og integrasjon). Glimt av teorien for metriske rom og Fourier rekker. Utvalgte eksempler/anvendelser (som vil kunne variere fra år til år).

MAT 2400 Reell Analyse (vår)

Dagens emnebeskrivelse:

Reell tall og Euklidske rom, topologi i metriske rom, kontinuerlige funksjoner, følger og rekker av funksjoner, uniform konvergens, deriverbare avbildninger, det inverse og implisitte funksjonsteorem, Riemann-integrasjon, Fubinis teorem og skifte av variable.

Forslag til ny emnebeskrivelse:

Emnet tar for seg analyse i metriske rom, med hovedvekt på normerte rom. Aspekter som dekkes er bl.a. kompletthet, kompakthet, kontinuitet, punktvis og uniform konvergens, differensialregning og Riemann-integrasjon. Blandt hovedresultater kan nevnes Banachs fikspunkt teorem, Arzelà-Ascoli kompakthetsteorem, Weierstrass' approksimasjonsteorem, inversfunksjonsteoremet og implisittfunksjonsteoremet. Det gies anvendelser til differensiallikninger (eksistens- og entydighetsresultater) og teorien for Fourierrekker.

2 Om emnet MAT 2410 Innføring i kompleks analyse

I emnebeskrivelsen for MAT 2410 står det at emnet skal inkludere en introduksjon til Fourieranalyse og Fourierrekker. Dette har ikke blitt tatt like seriøst av alle foreleserne. Siden dette stoffet passer bedre inn i MAT 2400 (slik foreslått ovenfor) er det naturlig at det taes ut av emnebeskrivelsen for MAT 2410. Vi foreslår ellers å dreie kurset noe, slik at kompleks analyse ikke fremstår som et felt løsrevet fra resten av analysen, men som nært knyttet opp til vektoranalysen.

En bok som vil passe ypperlig som pensumbok til en slik variant er T. Gamelins bok *Complex analysis* (2001, Springer Verlag). Her er et sitat fra forordet :

Complex analysis provides a good training ground for multivariable calculus. It allows students to consolidate their understanding of parametrized curves, tangent vectors, arc length, gradients, line integrals, independence of path and Green's theorem. The ideas surrounding independence of path are particularly difficult for students in calculus, and they are not absorbed by most students until they are seen again in other courses.

Det kan også nevnes at boka inneholder en seksjon om fluid dynamikk i planet, som sammen med konforme avbildninger gir interessant informasjon om strømlinjer i forskjellige geometrier.

MAT 2410 Innføring i kompleks analyse (høst)

Dagens emnebeskrivelse:

Introduksjon til Fourieranalyse, Fourierrekker, innføring i analytiske funksjoner, konforme avbildninger, Mbiustransformasjoner, Cauchys sats og formler, Taylor- og Laurent-rekker, maksimumsprinsippet, isolerte singulre punkter, residueregning, argumentprinsippet.

Forslag til revidert emnebeskrivelse:

Kompleks eksponensial-, logaritme- og rotfunksjon, analytiske funksjoner, Cauchy-Riemann ligningene, harmoniske funksjoner, konforme avbildninger, Mbiustransformasjoner, linjeintegraler, anvendelser i fysikk, Cauchys sats og integralformel, potens- og Laurent-rekker, maksimumsprinsippet, isolerte singulære punkter, residueregning, argumentprinsippet, Rouchés teorem, Schwarz' lemma, Poissons integralformel, enkelttsammenhengende områder og Riemanns avbildningssats.

3 Om tema-emnene MAT2440, MAT-INF2360, MAT-INF3360 og MAT-INF3100

Seksjon 4 har diskutert følgende tematiske analyse-emner

- MAT-INF 2360 Anvendelser av lineær algebra
- MAT 2440 Differensialligninger og optimal kontrollteori
- MAT-INF 3100 Lineær optimering
- MAT-INF 3360 Innføring i partielle differensialligninger

der mer spesifikke klasser av matematiske modeller studeres. Seksjonen har sendt et forslag til komitéen, som vi har diskutert videre. Forslaget, som presenteres nedenfor, har vår tilslutning.

Tilbakemeldinger på emnene MAT-INF 3100 og MAT-INF 3360 har stort sett vært gode. Derfor er det ingen grunn til å gjøre større forandringer med disse emnene. Det foreslås derfor at MAT-INF 3100 og MAT-INF 3360 forblir hovedsakelig som de er i dag. Når det gjelder MAT-INF 3360 er det et ønske, spesielt fra mekanikk-miljøet, at det legges til rette for at dette kan være et naturlig 4. semesteremne. Som en konsekvens, foreslås det at emnet omgjøres til et 2000-emne.

Emnet MAT 2440 er definitivt moden for en revisjon. Store deler av det stoffet som undervises om differensialligninger er allerede dekket i de tre første semestrene. Det foreslås derfor at MAT 2440 legges ned og ertstattes med et noe mer avansert emne,

MAT 3xxx *Dynamiske systemer*,

Et slikt emne vil være spesielt relevant for biologiske og medisinske problemstillinger, og vil derfor også til dels dekke det tomrommet som oppsto da MAT-BIO 2100 ble lagt ned. Vi gjør samtidig oppmerksom på at en slik omlegging naturlig vil føre til at kontrollteori-delen av dagens MAT 2440 faller ut. Dette kunne tenkes å ha konsekvenser for matematisk finans, men vi har fått tilbakemeldinger fra stokastisk analyse gruppen om at dette er uproblematisk, da materialet fra dagens MAT 2440 ikke oppfattes som sentralt for dem.

Det er ellers behov for et bacheloremne i numerisk analyse, som tar hensyn til at studentene allerede er kjent med mange numeriske metoder fra de tre første semestrene. Det foreslås derfor at emnet MAT-INF 2360 legges ned og erstattes med et nytt emne,

MAT-INF 3xyz *Grunnleggende numerisk analyse,*

hvor det legges vekt på en systematisk tilnærming til konstruksjon og analyse av numeriske metoder. Og siden numeriske metoder for differensialligninger dekkes i de respektive emnene for ordinære og partielle differensialligninger, vil slike metoder ikke bli lagt vekt på her. Isteden bør det forsøkes å gjøre emnet mer sentralt for ”big data statistics” og lignende problemstillinger. Emnet tenkes i hovedsak bygget opp rundt tre tema, nemlig representasjon og approksimasjon av funksjoner, metoder for store lineære ligningssystemer, og ikke lineære systemer med optimering. Et slikt emne vil overlape ca. 50 prosent med dagens MAT-INF 2360, men det vil ha et bredere fokus og vil derfor være mer relevant for flere brukergrupper. Det mer tekniske materiale i dagens MAT-INF 2360, spesielt rettet mot behandling av lyd og bilder, kan eventuelt utvides til et nytt masteremne.

Emnene MAT-INF 3100, MAT 3xxx og MAT-INF 3xyz vil typisk tas i 5. eller 6. semester. For alle de fire emnene bør det forventes bakgrunn fra MAT 1100, 1110, og 1120, supplert med MAT-INF 1100. Derimot bør undervisningen legges opp slik at man ikke forutsetter MAT 2400 Reell analyse. Et slikt krav ville kunne føre til en ikke-ønsket begrensning av rekrutteringen til emnene. På den annen side er det klart at i alle disse emnene vil studenter med en sterk bakgrunn i analyse ha en fordel.

Når det gjelder lærebøker fungerer de som brukes i dag i MAT-INF 3100 og MAT-INF 3360 tilfredsstillende. For emnet om dynamiske systemer ser boken til J.D. Meiss *Differential dynamical systems* (2007, SIAM) til å være passende. For emnet i numerisk analyse er det muligens noe vanskeligere å finne en passende lærebok, siden de fleste bøker enten er mer elementære eller mer avanserte enn det vi ønsker, eller mangler et tema. For eksempel, vil en bok som den til Quarteroni, Sacco og Saleri, *Numerical mathematics*, TAM 37 (2000, Springer), behandle omtrent alt materiale som ønskes dekket. Men samtidig er den kanskje vel avansert og den omhandler også mye mer enn hva som kan dekkes innenfor rammen av 10 studiepoeng. En mulig løsning er derfor at det skrives noe tilleggsmateriale til dette emnet. I så fall vil det være nødvendig at det settes av ressurser i form av nedsatt undervisningsbelastning.

Nedenfor følger forslag til emnebeskrivelse. For MAT-INF 3100 og MAT-INF 3360 samsvarer dette med dagens beskrivelse.

MAT-INF 3100 Lineær optimering (vår)

Emnebeskrivelse:

Emnet er en innføring i lineær optimering samt anvendelser av disse feltene. Det behandler grunnleggende teori og metoder ved: konvekse mengder, polyedre, systemer av lineære ulikheter, lineær programmering, simpleks metoden og dualitet.

Hva lærer du? Målet med kurset er at studentene skal: ha kjennskap til grunnleggende optimering, kunne formulere og løse praktiske lineære optimeringsproblemer (LP), kjenne til simpleksalgoritmen og visse andre algoritmer for LP, kjenne ulike matematiske aspekter ved lineær optimering, kjenne til dualitet, og anvendelser i bl.a. spillteori og optimering i nettverk (grafer).

MAT-INF 3360 (2260?) Innføring i partielle differensialligninger (vår)

Emnebeskrivelse:

Partielle differensiallikninger, rand- og initial-verdiproblemer. Representasjon og analyse av løsningene ved Fourierrekker, differensmetoder med stabilitetsanalyse, maksimumsprinsipper og energi-integraler.

Hva lærer du? Emnet skal gi studentene redskap til å analysere de viktigste partielle differensiallikninger som brukes i anvendt matematikk, og til å utvikle og vurdere metoder og numerisk simulering av likningene.

MAT 3xxx Dynamiske systemer (vår)

Forslag til emnebeskrivelse:

Emnet tar for seg modellering med dynamiske systemer, eksistens og entydighet, numeriske metoder, faseplan, stabilitet og kaos, bifurkasjonsteori, Hamiltonske systemer.

Hva lærer du? Emnet gir innføring i teorien for systemer av ordinære differensialligninger. Spesielt fokuseres det på ikke-lineære systemer og kvalitativ analyse av disse. Egenskaper til numeriske metoder blir også diskutert. I tillegg legges det vekt på å presentere bruk av dynamiske systemer som et modelleringsverktøy innen områder som naturvitenskap, teknologi, medisin og økonomi.

MAT-INF 3xyz Grunnleggende numerisk analyse (høst)

Forslag til emnebeskrivelse:

Representasjon og approksimasjon av funksjoner med bl.a. interpolasjon, numerisk integrasjon, minste kvadraters metode, fast Fourier transform, og multiresolusjonsanalyse. Direkte og iterative metoder for store lineære ligningssystemer. I tillegg behandles numeriske metoder for ikke-lineære ligningssystemer og optimeringsproblemer med eller uten føringer.

Hva lærer du? *Hensikten med emnet er å gi en systematisk innføring i konstruksjon og analyse av numeriske metoder, og å gjøre studentene kjent med sentrale numeriske metoder som blir rutinemessig brukt innen en rekke områder av naturvitenskap, teknologi og økonomi.*

4 Om emnene MAT 3400/4400 og MAT 4410

I dag er mål- og integrasjonsteorien og funksjonalanalysen spredt over emnene MAT 3400/4400 *Lineær analyse med anvendelser* og MAT 4410 *Videregående lineær analyse* (med litt innledende funksjonalanalyse i MAT 2400, mens den mer avanserte funksjonalanalysen kommer i MAT 4450). Denne løsningen ble valgt for noen år tilbake med tanke på vordende masterstudenter som ønsker å velge retningen PDE eller stokastisk analyse, slik at disse har den nødvendige bakgrunnen når de begynner på masterstudiet. For studenter som tenker å gå i retningen operatoralgebraer er denne inndelingen uten betydning, de må ta begge emnene uansett. En av ulempene med ordningen er at kurskombinasjoner av denne typen er sjeldne ved andre institusjoner, og at utvekslingsstudenter (inn- og utreisende) ofte får problemer med innpassningen.

Komitéen mener at grunntanken med ordningen fremdeles er god og hensiktsmessig, og at den bør derfor fortsette. Imidlertid mener komitéen at MAT 3400/4400 ikke bør gies som et høst-emne, slik det er i dag, men omgjøres til et vår-emne, slik at det naturlig kan taes i 6. semester av bachelorstudiet. Som påpekt tidligere er 5. semester valgt som utviklingsemester for flertallet av de aktuelle studentene, og det er vanskelig å finne et emne som tilsvarer MAT 3400/4400 i utlandet. Dessuten gies MAT 4410 på høsten, så MAT 4410 vil da bli et en naturlig fortsettelse av MAT 3400/4400, uten det unødvendige oppholdet som finnes i dagens opplegg.

I beskrivelsen av MAT 3400/4400 er Fourier-analyse nevnt. Dette vil nå inngå i MAT 2400, så det bør taes ut. Vi har benyttet anledningen til å revidere beskrivelsene for begge emnene.

MAT 3400/4400 Lineær analyse med anvendelser (foreslåes endret til VÅR)

Dagens emnebeskrivelse:

Emnet gir en innføring i funksjonalanalyse og målteori med vekt på anvendelser. Blant temaene som dekkes er: Banach- og Hilbertrom; spektralteori for kompakte operatorer med anvendelser på Sturm-Liouville-teori og Fredholm-teori; grunnleggende mål- og integrasjonsteori; L^p -rom inkludert komplementhet og Jensens, Hlders og Minkowskis ulikheter, Fourier-analyse.

Forslag til revidert emnebeskrivelse:

Emnet gir en innføring i mål- og integrasjonsteori og i operatorsteori (hovedsaklig på Hilbert rom). Blant temaene som dekkes er: Grunnleggende mål- og integrasjonsteori, inklusivt L^p -rom med komplementhet, produktmål, Tonellis og Fubinis teoremer. Begrensede lineære operatorer (bl.a. adjungerte operatorer, ortogonale projeksjoner, kompakte operatorer og Hilbert-Schmidt operatorer). Spektralteoremet for kompakte selv-adjungerte operatorer. Anvendelser på Sturm-Liouville-teori og Fredholm-teori.

MAT4410 Videregående lineær analyse (høst)

Dagens emnebeskrivelse:

Emnet gir en innføring i mer avanserte elementer av funksjonalanalyse og målteori. Blant temaene som dekkes er: Videre Banachrom-teori (med bl.a. Banach-Steinhaus' teorem, åpen-avbildnings-teoremet, lukket-graf-teoremet og Hahn-Banachs teorem); videre mål- og integrasjonsteori (med bl.a. produktmål, Tonellis og Fubinis teoremer, fortegnsmål, komplekse mål, Hahns, Jordans og Radon-Nikodyms teoremer, betingede forventninger, L^p/L^q -dualitet og Riesz' representasjonsteorem, ulike konvergensmåter for målbare funksjoner).

Forslag til revidert emnebeskrivelse:

Emnet tar for seg nye deler av mål- og integrasjonsteorien, samt grunnleggende funksjonalanalyse. Blant temaene som dekkes er: Fortegnsmål, komplekse mål, Hahns, Jordans og Radon-Nikodyms teoremer. Absolutt kontinuerte funksjoner og funksjoner med begrenset variasjon, analysens fundamentalteorem. Baires kategori teorem og dets konsekvenser (åpen avbildning teoremet, lukket graf teoremet, Banach-Steinhaus teoremet), dual rom, Hahn-Banachs teorem, L^p/L^q -dualitet, Riesz' representasjonsteorem.