Abelprisvinner 2012

Endre Szemerédi

Aritmetiske progresjoner

En aritmetisk progresjon er en sekvens av naturlige tall med konstant differanse. De naturlige tallene inneholder mange aritmetiske progresjoner, men for delmengder av de naturlige tallene er det ikke opplagt at vi kan finne aritmetiske progresjoner. En generell problemstilling er å avgjøre hvor små mengder vi kan plukke ut og fortsatt være sikker på at de inneholder aritmetiske progresjoner.

Gangetabellen er en viktig del av pensum på barneskolen. Barna skal kunne utenatt 2-gangeren, *2,4,6,...,* 3-gangeren, *3,6,9,12,15,...,* osv. Det matematiske begrepet for slike regler er *aritmetiske progresjoner*. Begrepet aritmetisk progresjon omfatter imidlertid også endelige sekvenser som *10,13,16,19*. Dette er en aritmetisk progresjon av lengde *4*, med (konstant) differanse *3* og startverdi *10*. 2-gangeren er en aritmetisk progresjon av uendelig lengde, med differanse *2* og startverdi *2*. Når vi angir lengde, differanse og startverdi er den aritmetiske progresjonen entydig bestemt. Hvis du blir bedt om å skrive opp en aritmetisk progresjon av lengde *5*, differanse *7* og startverdi *23*, er riktig svar *23,30,37,44,51*. Merk at *4,5,6,7,8,9* også er en aritmetisk progresjon, differansen er *1* i dette eksemplet.

Den nederlandske matematikeren ***Pierre Joseph Henry Baudet*** formulerte i 1921 følgende formodning: *Dersom man fordeler de naturlige tallene 1,2,3,.. og til uendelig i et vilkårlig antall bokser, så vil alltid minst en av boksene inneholde en aritmetisk progresjon av vilkårlig lengde.* Baudet døde rett etter at han formulerte dette, bare 30 år gammel. Baudets formodning ble bevist i 1927 av en annen nederlandsk matematiker, ***Bartel Leendert van der Waerden***.

I 1936 lanserte ***Erdős*** og ***Turán*** en sterkere versjon av dette resultatet. De mente at den bakenforliggende årsaken til eksistens av aritmetiske

Dersom vi kun fargelegger med to farger, f.eks. rød og blå, er det lett å se at vi trenger tallene fra *1* til *9* for å være sikker på at vi finner en aritmetisk progresjon av lengde *3*. Hvorfor? La oss prøve på det motsatte, å skrive opp en sekvens av lengde *9* uten aritmetiske progresjoner av lengde *3*. Tallene *1, 5* og *9* kan da ikke ha samme farge. Så anta først at *1* og *5* er røde, og at *9* er blå. Da vil rødfargen til *1* og *5* tvinge *3* til å være blå. Men *9* er også blå, så *6* må være rød. Men da er *5* og *6* røde, og *4* og *7* må nødvendigvis være blå. Tallet *8* må være rødt siden *7* og *9* er blå, og tallet *2* må også være rødt siden *3* og *4* er blå. Men da er *2, 5* og *8* alle røde, som motsier antakelsen om at vi ikke har aritmetiske progresjoner av lengde *3*. Tilfellet hvor *1* og *9* er røde og *5* er blå kan man behandle på samme måte. På den annen side har sekvensen RBRBBRBR, av lengde *8*, ingen aritmetiske progresjoner av lengde *3*. Det betyr at *9* er den nøyaktige grensen for denne egenskapen. Denne grensen kalles *van der Waerden tallet W(2,3)*.

progresjoner er at minst en av Baudets bokser må ha positiv tetthet. For en delmengde *A* av de naturlige tallene definerer vi begrepet *øvre tetthet* på følgende måte: For ethvert naturlig tall *N* snitter vi mengden *A* med mengden *{1,2,…,N}*, teller antall hele tall i mengden og deler dette antallet med *N*. Dette rasjonale tallet mellom *0* og *1* måler størrelsen til *A* sammenliknet med antall tall mellom *1* og *N*. Dette gjør vi for økende tall *N*. Dersom forholdet for store tall *N* ikke overskrider et gitt tall, sier vi at dette tallet er en øvre grense for disse forholdene. Den minste øvre grensen for store *N* kalles den *øvre tettheten* for *A*.

Vi kan også definere en *nedre tetthet,* gitt ved den største nedre grensen for forholdene, når *N* er et stort tall.

Vi skal gi tre eksempler som illustrerer dette begrepet.
Eksempel 1. La *A* være alle partallene. For en gitt *N* vil antallet partall mellom *1* og *N* være *N/2* hvis *N* selv er et partall, og *(N-1)/2* hvis *N* er et oddetall. Forholdet vi leter etter er derfor *1/2*, som er den øvre tettheten for partallene.
Eksempel 2. La nå *A* være en endelig mengde, for eksempel alle heltallene fra *1* til *100*. For *N* mindre enn *100* vil forholdet være *1*, men for *N* større enn *100* vil forholdet avta og etter hvert gå mot null. Så den øvre tettheten er *0* i dette tilfellet.
Eksempel 3. I det siste eksemplet betrakter vi mengden *A={10,100,1000,…}*. Sammenlikner vi denne mengden med mengden $\{1,2,3,\ldots,10^k\}$ for et naturlig tall *k,* ser vi at forholdet blir $k/10^k$. Når *k* vokser vil dette forholdet gå mot *0*, og igjen har vi øvre tetthet lik *0*.

I 1953 viste ***Roth*** at enhver delmengde av de naturlige tallene med positiv (og ikke 0) øvre tetthet inneholder en aritmetisk progresjon av lengde *3*. I 1969 viste ***Endre Szemerédi*** at delmengde må inneholde en aritmetisk progresjon av lengde *4*, og så, i 1975, viste han at delmengden må inneholde en aritmetisk progresjon av vilkårlig lengde.

Erdős formulerte i 1973 en sterkere versjon av Erdős-Turán-formodningen: *La A være en delmengde av de naturlige tallene slik at resiproksummen til A, dvs. summen av alle tallene i A sine multiplikative inverser, er større enn ethvert naturlig tall. Da må A inneholde aritmetsike progresjoner av vilkårlig lengde.* Erdős utlovet en pris på US$ 3000 for et bevis for dette resultatet. Problemet er i dag verdt US$ 5000. Man kan vise at mengder av naturlige tall med positiv øvre tetthet nødvendigvis har resiprok-summer som går mot uendelig. Så Erdős´ formodning impliserer Szemerédis teorem. Det er også velkjent at mengden av primtall også har resiprok-sum som går mot uendelig. Dette ble først bevist av ***Leonhard Euler*** i 1737. Resultatet til ***Ben Green*** og ***Terence Tao*** fra 2004 om eksistens av aritmetiske progresjoner av vilkårlig lengde i mengden av primtall er derfor et spesialtilfelle av denne formodningen til Erdős.

Resultatene vedrørende eksistens av aritmetiske progresjoner baserer seg på et samspill mellom størrelse, tilfeldigheter og struktur i en mengde. Jo større mengden er, jo større er sjansen for at den har aritmetiske progresjoner. Szemerédi sier at positiv øvre tetthet er en tilstrekkelig betingelse. For mindre mengder, av tetthet null, gjelder ikke Szemerédis teorem, og vi må forsøke med andre metoder. Mengden av primtall har tetthet null, men Green og Tao lykkedes likefullt i å bevise at mengden har noen strukturelle analogier med de naturlige tallene. Dette var nok til å vise eksistens av aritmetiske progresjoner av vilkårlig lengde, basert på Szemerédis theorem.