Yakov G. Sinai, Abelprisvinner 2014

KAOS

Kaos er et velkjent dagligdags begrep, og noe alle opplever fra tid til annen. For matematikere har det vært viktig å presisere hva som ligger i begrepet, og å finne metoder for hvordan det kan måles.

Ordet kaos kommer fra gresk $\chi\acute{\alpha}o\varsigma$ (chaos), som betyr "avgrunn" eller "svelg", og som opprinnelig beskrev det "umåtelige formløse rom som var verdens begynnelse, og som alle ting oppstod fra". I dag ville man kanskje beskrive kaos som en tilstand av full forvirring og mangel på orden, der det virker nærmest umulig å oppnå stabilitet.

Vi kan tenke oss flere former for kaos. Et system som er underlagt en systematisk tilfeldighet vil ofte framstå som kaotisk, slik som en serie terningkast. Resultatet kan gjerne bli 3, 1, 5, 3, 3, 2, 6, 1, ... Vi tar for gitt at det ikke finnes noe mønster i en slik sekvens. Den totale uforutsigbarheten i et slikt **stokastisk system** vil ofte bli oppfattet som synonymt med kaos.

En annen form for kaos er det som kalles **deterministisk kaos**. At noe er deterministisk betyr at det er forutbestemt, og begrepet deterministisk kaos kan derfor virke noe paradoksalt. Men det kaotiske aspektet kommer inn i det forutbestemte systemet gjennom en dramatisk avhengighet av utgangsposisjon. Vi kan se på et enkelt eksempel. Ned mot toppen av en stor ball slipper vi små kuler. Etter at kulene har landet på ballen triller de videre ned, til en eller annen side. Det kaotiske i situasjonen ligger i at vi ikke klarer å treffe nøyaktig på toppunktet, men alltid litt til en av sidene. Avviket bestemmer hvor kula fortsetter sin ferd nedover. Ørsmå endringer i utgangspunktet kan gjerne føre til at kula havner på motsatt side av ballen. Dette er et typisk eksempel på deterministisk kaos, deterministisk fordi i det øyeblikket kulene har landet, så er deres videre skjebne (les: hvor de triller) beseglet, og kaos fordi mikroskopiske endringer i landingssted kan gi dramatiske endringer i det videre forløp.

Andre eksempler på deterministisk kaos er væutviklingen, eller det klassiske tre-legeme-problemet. Tre-legeme-problemet dreier seg om å beskrive banene til tre legemer som påvirker hverandre gjensidig gjennom gravitasjonskrefter. Systemet er deterministisk fordi alle bevegelsene er styrt av enkle fysiske lover, og det er kaotisk fordi en bitte liten endring i en av banene, over litt tid vil føre systemet inn i en helt annen tilstand enn den ellers ville være på vei mot. Denne effekten kalles også sommerfugleffekten, og henspiller på at vingeslagene til en sommerfugl kan være nok til å endre utgangspunktet for et værfenomen, slik at konsekvensen blir storm i stedet for stille.

Når alt kommer til alt er jo det tilsynelatende tilfeldige systemet med kast av terninger også et deteministisk system. Dersom utgangsposisjon, utgangshastighet, bordets forfatning og terningens presise form er kjent, så kan vi alltid regne oss fram til hva terningen lander på. Men gjør vi ørsmå feilberegninger, eller dersom det kommer et uforutsett lite vindpust, så vil resultatet endre seg. Så selv om systemet i prinsippet er determinsistisk, så framstår det for oss som tilfeldig.

Vi kan illustrere ulike dynamiske system og deres karakteristika ved hjelp av et rundt fat og en klinkekule. Systemets initialtilstand er posisjonen til klinkekula, og det dynamiske systemet gir en nøyaktig beskrivelse av kulas bane når vi slipper den fra et eller annet sted på fatet. Kula vil raskt trille ned mot midten av fatet, mot det laveste punktet. Etter litt pendling vil den omsider falle til ro på bunnen av fatet. Det betyr at i dette systemet vil alle baner konvergere mot ett felles likevektspunkt. Dersom vi gjør det samme eksperimentet med en klinkekule på et helt plant underlag, vil ikke lenger klinkekulebanene samles i ett punkt, men snarere fortsette i alle retninger, langs rettlinjede baner. Forandrer vi utgangsvinkelen til kula ørlite grann, vil kula etter hvert bevege seg bort fra den opprinnelige banen, men avviket vil øke på en kontrollert måte.

Den matematiske kvantiseringen av dette fenomenet kalles Lyapunovs eksponent, oppkalt etter den russiske matematikeren Aleksandr Lyapunov. Generelt uttrykker Lyapunovs eksponent i hvilken grad to baner som i utgangspunktet er veldig nær hverandre, vil avvike i det lange løp. I det normale forløpet, slik som i det plane tilfellet, er Lyapunovs eks-ponent 0, mens situasjonen der alle banene etter hvert ender i samme punkt har negativ Lyapunovs eksponent. Det mest interessante tilfellet er likevel der hvor Lyapunovs eksponent er positiv. Det betyr at baner som i utgangspunktet er veldig tett på hverandre, etter hvert for et voldsomt avvik. Lyapunovs eksponent måler hvor fort avviket utvikler seg. Jo fortere avviket vokser, jo større er Lyapunovs eksponent. Den franske mate-matikeren Jacques Hadamard beskrev i 1898 et dynamisk system hvor Lyapunovs eksponent overalt er positiv. Det betyr at det dynamiske systemet alltid oppviser kaotisk oppførsel. Det sies at Hadamard med dette oppdaget kaos, eller i det minste at han var den første som på en formell måte beskrev et kaotisk dynamisk system.

Sammenhengen mellom Kolmogorov-Sinai-entropi og Lyapunovs eksponent er gitt i det som kalles Pesins teorem, navngitt etter den russiske matematikeren Yakov Pesin. Essensen i Pesins teorem er at dersom Kolmogorov-Sinai-entropien til et dynamisk system er positiv, så er Lyapunovs eksponent også positiv, og omvendt. Dette resultatet er på ingen måte opplagt. Lyapunovs eksponent uttrykker i hvilken grad vi kan finne tilstander for systemet som ligner veldig på hverandre, men som raskt utvikler seg i veldig forskjelllige retninger. Positiv Kolomogorov-Sinai-entropi sier at dynamikken til systemet som helhet oppviser en viss grad av uforutsigbarhet. Pesins teorem sier at de to størrelsene er likeverdige i forhold til å avslører om et dynamisk system er kaotisk eller ikke.