John F. Nash, Jr. og Louis Nirenberg,
Abelprisvinnere 2015

NASH-KUIPER-TEOREMET

Rundt midten av 1950-tallet publiserte John F. Nash, Jr. to arbeider som i dag er kjent som Nash sine to embeddings-resultater. Begge arbeidene dreier seg om såkalte isometriske, eller avstandsbevarende, embeddinger av geometriske objekter i Euklidske rom.

De to teoremene er svært forskjellige. Det første resultatet, gjerne omtalt som C^1-teoremet, er lett å bevise, men har noen svært lite intuitive konsekvenser. Det andre er mye vanskeligere å bevise, men resultatet i seg selv er omtrent det man kunne forvente. C^1-teoremet kom i 1954 og fikk en noe skjerpet konklusjon gjennom et arbeid av Nicolaas Kuiper året etter. C^k-teorem kom i 1956.

Nash-Kuiper-teoremet. La (M, g) være en Riemannsk mangfoldighet av dimensjon m og $f : M \to \mathbb{R}^n$ en kort C^∞-imbedding inn i et Euklidsk rom $\mathbb{R}^n$, hvor $n \geq m+1$. Da finnes for en vilkårlig valgt $\epsilon > 0$ en imbedding $f_\epsilon : M \to \mathbb{R}^n$ av klasse C^1, som er

(i) isometrisk: for alle par av tangentvektorer $v, w \in T_x(M)$,

$$g(v, w) = \langle df_\epsilon(v), df_\epsilon(w) \rangle$$

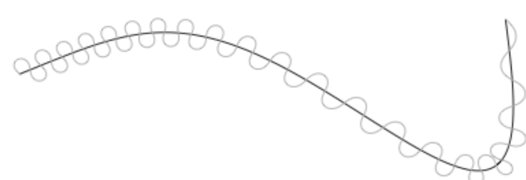
(ii) ϵ-nær til f:

$$|f(x) - f_\epsilon(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in M.$$

I beviset for Nash-Kuiper-teoremet blir en kort embedding av en Riemannsk mangfoldighet inn i et Euklidsk rom omdannet til en C^1-isometrisk embedding. En kort embedding er en avbildning som bevarer eller forkorter alle lengder. Vi skal gi en skisse for beviset for Nash-Kuiper-teoremet, gjennomført i det en-dimensjonale tilfellet. Det geometriske objektet er en sirkel, og vi skal legge sirkelen inn i et helt vanlig plan.

La C være en regulær plan kurve, parametrisert ved en avbildning $\mathbf{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$. Kurven gjennomløpes med en hastighet $v_0(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\|$. La $v(t)$ være en annen hastighetsfunksjon, overalt større enn $v_0(t)$, dvs. $v(t) \geq v_0(t)$ for alle $t \in [0, 1]$. Kjernen i det en-dimensjonale isometriproblemet er å avgjøre om det er mulig å konstruere en ny regulær kurve C', parametrisert ved $\mathbf{r}' : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ slik at kurven gjennomløpes med hastighet $v(t)$. Dette er ikke spesialt problematisk, men dersom vi i tillegg krever at den nye kurven skal holde seg veldig nær den gamle, øker vanskelighetsgraden. For å være mer presis, vi krever at $\|\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}(t)\| \leq \epsilon$ for ethvert valg av $\epsilon > 0$.

Svaret på spørsmålet er ja, det er mulig, og det vet vi takket være Nash-Kuiper-teoremet.



Den nye kurven C' bygges ut fra den gamle ved å legge til en svingende bevegelse på tvers av kurven. Hvis ekstra-svingene har tilstrekkelig kort bølgelengde og også tilstrekkelig liten amplitude, ja så vil de to betingelsene, angjeldende fart og nærhet til

John F. Nash, Jr. og Louis Nirenberg, Abelprisvinnere 2015

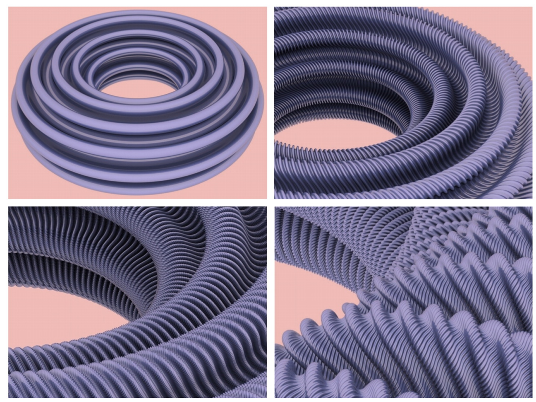
den opprinnelige kurven være oppfyllt. Jo kortere bølgelengde, jo lenger kurve. Selv med en veldig liten amplitude er det mulig å lage kurven så lang vi måtte ønske.

(*Foto: Bernard Thompson*)

Et illustrerende eksempel er en syklist som sykler opp en bratt bakke. Den opprinnelige kurven er sporet etter bakhjulet, mens forhjulet tegner den nye kurven. Syklisten styrer hurtig fra den ene siden til den andre og konsekvensen er at forhjulet beveger seg en lenger vei enn bakhjulet. Dermed vil også forhjulet ha større fart.

Den en-dimensjonale versjonen av Nash sitt teorem er nokså intuitiv, men den to-dimensjonale er absolutt ikke det, snarere motsatt. Det kan illustreres på følgende måte.

Start med et papirark og rull det til en sylinder. Det er ikke spesielt vanskelig. Det neste skrittet er derimot mye værre. Vi skal bøye sylinderen til en smultring-formet flate uten å strekke eller rive i papiret. Dette virker å være helt umulig. Den ytre omkretsen av smultringen er mye lenger enn den indre, men i sylinderen er de like lange. Nash sitt resultat sier at dette likevel er mulig, i det minste rent teoretisk. Nash beviste resultatet i 1954, men det var først i 2012 at et tverrfaglig team i Frankrike, HEVEA-prosjektet, klarte å lage illustrasjoner av prosessen der sylinderen bøyes til en smultring på denne måten. Illustrasjonene i figuren gir et bilde av prosessen, papiret må foldes uendelig mange ganger, i flere retninger, og på den måten danne en smultring-flate hvor det opprinnelige papiret faktisk er helt intakt.



Bilder av en isometrisk embedding av en flat torus inn i $\mathbb{R}^3$. (*Kilde: HEVEA Project/PNAS*)