Deformasjoner av vektorbunter med konneksjoner

Arne B. Sletsjøe

Universitetet i Oslo

November 12, 2010

Innledende bemerkninger

X: en kompakt Riemannflate av genus $g \geq 2$

$\pi := \pi_1(X)$ fundamentalgruppa til X.

V: vektorbunt på X med overgangsfunksjoner $\theta_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ for en lokal (trivialiserende) overdekning $\{(U_i, \phi_i)\}$.

$\nabla : V \to V \otimes_{\mathbb{C}} \Omega^1_X$ en (flat) konneksjon på X, dvs en $\mathbb{C}$-lineær avbildning som tilfrdesstiller "Leibniz regel", $\nabla(f.s) = s \otimes df + f\nabla(s)$, $s \in V$, $f \in \mathcal{O}_X$ og Ω^1_X; holomorfe 1-former på X.

Theorem (Riemann-Hilbert-korrespondansen)

Det er en ekvivalens mellom kategoriene av vektorbunter på X med en (flat) konneksjon og kategorien av endelig-dimensjonale representasjoner av fundamentalgruppa $\pi_1(X)$.

$$\{\text{Endelig-dimensjonale representasjoner } \rho \text{ av } \pi_1(X)\}$$
$$\updownarrow$$
$$\{\text{lokale systemer } \Theta \text{ på } X\}$$
$$\updownarrow$$
$$\{\text{Vektorbunter med konneksjoner } (V, \nabla) \text{ på } X\}$$

Riemann-Hilbert-korrespondansen

Den universelle overdekningen $p : \tilde{X} \to X$ har en naturlig struktur som holomorf prinsipal-bunt med strukturgruppe π. Representasjonen ρ induserer en virkning av $\gamma \in \pi$ på den trivielle bunten $\tilde{X} \times \mathbb{C}^n$ ved $\gamma.(\tilde{x}, \lambda) = (\tilde{x}\gamma^{-1}, \rho(\gamma)\lambda)$. Banerommmet $V_\rho := \tilde{X} \times_\pi \mathbb{C}^n$ definerer et lokalt system på X av rang n.

Riemann-Hilbert-korrespondansen

Den universelle overdekningen $p : \tilde{X} \to X$ har en naturlig struktur som holomorf prinsipal-bunt med strukturgruppe π. Representasjonen ρ induserer en virkning av $\gamma \in \pi$ på den trivielle bunten $\tilde{X} \times \mathbb{C}^n$ ved $\gamma.(\tilde{x}, \lambda) = (\tilde{x}\gamma^{-1}, \rho(\gamma)\lambda)$. Banerommmet $V_\rho := \tilde{X} \times_\pi \mathbb{C}^n$ definerer et lokalt system på X av rang n.

Gitt et lokalt system Θ på X. En vei $\gamma : [0,1] \to X$ definerer en isomorfi

$$\gamma(\Theta) : \Theta_{\gamma(0)} \longrightarrow \Theta_{\gamma(1)}$$

der $\Theta_{\gamma(t)} \simeq (\gamma^*\Theta)_t \simeq \mathbb{C}^n$. Dette gir en n-dimensjonal lineær representasjon av fundamentalgruppa.

Riemann-Hilbert-korrespondansen

V vektorbunt av rang n, med konneksjon ∇, (U, z) en trivialiserende omegn med basis $\{e_i\}$ for $V|_U$. La $\omega = \sum \omega_i e_i$ for $\omega_i \in \mathcal{O}(U)$. Løsning av $\nabla\omega = 0$ svarer til et **lokalt system**

$$\frac{d\omega_i}{dz} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

where $\nabla e_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j dz$. Løsningen av et slikt system danner et n-dimensjonalt kompleks vektorrom.

Riemann-Hilbert-korrespondansen

V vektorbunt av rang n, med konneksjon ∇, (U, z) en trivialiserende omegn med basis $\{e_i\}$ for $V|_U$. La $\omega = \sum \omega_i e_i$ for $\omega_i \in \mathcal{O}(U)$. Løsning av $\nabla\omega = 0$ svarer til et **lokalt system**

$$\frac{d\omega_i}{dz} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

where $\nabla e_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j dz$. Løsningen av et slikt system danner et n-dimensjonalt kompleks vektorrom.

Motsatt vil et lokalt system Θ definere en vektorbunt $V = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} \Theta$ og en konneksjon ved

$$\nabla\omega = \sum_{i=1}^{n}(d\omega_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j)e_i$$

Čech-de Rham-kohomologi

Definition

La $\nabla : V \to V \otimes \Omega^1_X$ *være en flat konneksjon på* X ($\nabla^2 = 0$, *alle konneksjoner på Riemannske flater er flate). Vi definerer det generaliserte de Rham-komplekset*

$$C^q(V, \nabla) = Hom_{\mathcal{O}_X}(V, V \otimes \Omega^q_X)$$

med differensial $d_\Omega : C^q(V, \nabla) \to C^{q+1}(V, \nabla)$ *gitt ved*

$$d_\Omega \phi(s) = (\nabla \wedge 1_{\Omega^q})\phi(s) + (-1)^{q+1}(\phi \wedge 1_{\Omega^1})\nabla(s)$$

Kan vise at d_Ω er $\mathcal{O}_X$-lineær og at $d_\Omega^2 = 0$ (følger av at $\nabla^2 = 0$)

Čech-de Rham-kohomologi

Observer at $C^q(V|_U, \nabla) = \Gamma(U, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X(U)}}(V, V \otimes \Omega^q_X))$ for åpne $U \subset X$.
Vi lar $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(V, V \otimes \Omega^q_X)$ betegne det tilhørende knippet på X.

For $V = \mathcal{O}_X$ og $\nabla = d$ får vi tilbake det ordinære de Rham komplekset

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X \xrightarrow{d} \Omega^2_X \cdots$$

Čech-de Rham-kohomologi

Definition

Čech-de Rahm-komplekset:

$$K^{p,q}(X, V, \nabla) = \check{C}^p(\mathcal{U}, Hom_{\mathcal{O}_X}(V, V \otimes \Omega_X^q))$$

med differensial $\partial = d_\Omega + (-1)^q \delta_{\check{C}}$ *og for en overdekning* $\mathcal{U}$ *av* X*.* *Kohomologien av det assosierte totalkomplekset,* $\mathcal{H}^n(X, V, \nabla)$*, kaller vi* **Čech-de Rham-kohomologi**.

Čech-de Rham-kohomologi

Dobbeltkompleksen $K^{p,q}$ sitter i første kvadrant, og vi har følgende standard resultat:

Proposition

Det eksisterer en spektralsekvens

$$E_2^{p,q} = H^q \check{H}^p(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(V, V \otimes \Omega_X^\bullet))$$

som konvergerer mot $\mathcal{H}^{p+q}(X, V, \nabla)$.

Noen observasjoner:
Siden vi jobber med holomorfe former på en kurve X, så har vi at $\Omega_X^j = 0$ for $j \geq 2$, og $E_2^{p,q} = 0$ for $q \geq 2$.

Čech-de Rham-kohomologi

Noen observasjoner:
Siden vi jobber med holomorfe former på en kurve X, så har vi at $\Omega^j_X = 0$ for $j \geq 2$, og $E_2^{p,q} = 0$ for $q \geq 2$.

Knippet $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(V, V \otimes \Omega^j)$ er kvasi-koherent og $dim\, X = 1$. Dermed har vi $\check{H}^p(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(V, V \otimes \Omega^q_X)) = 0$ for $p \geq 2$, dvs. $E_2^{p,q} = 0$ for $p \geq 2$.

Det betyr at spektralsekvensen degenererer, og vi har en korteksakt sekvens

$$0 \to E_2^{0,1} \to \mathcal{H}^1(X, V, \nabla) \to E_2^{1,0} \to 0$$

hvor $E_2^{p,q}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} 0 \to E_2^{1,0} \to \check{H}^1(X, \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(V)) \to & \check{H}^1(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(V, V \otimes \Omega_X^1)) \\ & \to \mathcal{H}^2(X, V, \nabla) \to 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{H}^0(X, V, \nabla) \to \check{H}^0(X, \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(V)) \to & \check{H}^0(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(V, V \otimes \Omega_X^1)) \\ & \to E_2^{0,1} \to 0 \end{aligned}$$

Čech-de Rham-kohomologi

Ved Serre-dualitet får vi

$$(E_2^{1,0})^* \simeq E_2^{0,1}$$

og isomorfier

$$\mathcal{H}^1(X, V, \nabla) \simeq \mathcal{H}^1(X, V, \nabla)^*$$
$$\mathcal{H}^2(X, V, \nabla) \simeq \mathcal{H}^0(X, V, \nabla)^*$$

Definition

En **løfting** *av en vektorbunt med konneksjon* (V, ∇) *over* X *til en punktert lokal artinsk* $\mathbb{C}$*-algebra* (R, π) *i* a *er en vektorbunt med konneksjon* (V_R, ∇^R) *over* $X \times_{Spec(\mathbb{C})} Spec(R)$ *slik at* V_R *er en løfting av* V, *flat over* R, *og* ∇^R *er en konneksjon på* V_R, *høyre* R*-lineær og med en avbildning* $(V_R, \nabla^R) \to (V, \nabla)$ *slik at den induserte avbildningen*

$$\eta : (V_R, \nabla^R) \otimes_R \mathbb{C} \to (V, \nabla)$$

er en isomorfi.

Deformasjoner av vektorbunter med konneksjoner

Definition

En **løfting** *av en vektorbunt med konneksjon* (V, ∇) *over* X *til en punktert lokal artinsk* $\mathbb{C}$*-algebra* (R, π) *i a er en vektorbunt med konneksjon* (V_R, ∇^R) *over* $X \times_{Spec(\mathbb{C})} Spec(R)$ *slik at* V_R *er en løfting av* V*, flat over* R*, og* ∇^R *er en konneksjon på* V_R*, høyre* R*-lineær og med en avbildning* $(V_R, \nabla^R) \to (V, \nabla)$ *slik at den induserte avbildningen*

$$\eta : (V_R, \nabla^R) \otimes_R \mathbb{C} \to (V, \nabla)$$

er en isomorfi.

To løftinger (V_R, ∇^R) *og* (V'_R, ∇'^R) *er ekvivalente dersom det er en isomorfi* $\phi : V_R \to V'_R$ *slik at*

$$\eta' \circ (\phi \otimes_R 1_{\mathbb{C}}) = \eta, \qquad \nabla'^R \circ \phi = (\phi \otimes_{\mathbb{C}} 1_{\Omega^1_X}) \circ \nabla^R$$

Definer deformasjonsfunktoren

$$Def_{(V,\nabla)} : \underline{a} \longrightarrow \underline{sets}.$$

ved

$$Def_{(V,\nabla)}(R) = \{løftinger\ av\ (V,\nabla)\ to\ R\}/\backsim$$

Deformasjoner av vektorbunter med konneksjoner

Theorem

La $\pi : R \to k$ *være et objekt i* $\underline{a}$ *og* $(V_R, \nabla^R) \in Def_{(V,\nabla)}(R)$ *en klasse av løftinger av* (v, ∇) *to* R*. La* $u : S \to R$ *være en surjektiv avbildning i* $\underline{a}$*, slik at* $\mathbf{m}_S \cdot \ker u = 0$*. Det sitter en obstruksjon* $[\psi] \in \mathcal{H}^2(X, V \otimes \ker u, \nabla)$ *slik at* $[\psi] = 0$ *i* $\mathcal{H}^2(X, V \otimes \ker u, \nabla)$ *er ekvivalent med at det finnes en løfting av* (V_R, ∇^R) *til* S*.*

Dersom obstruksjonen $[\psi] = 0$*, så er mengden av løftinger av* (V_R, ∇^R) *til* S *gitt som et prinsipalt homogent rom over* $\mathcal{H}^1(X, V \otimes \ker u, \nabla)$*.*

Ved å bruke $Def_{(V,\nabla)}$ på $u : R = k[x]/(x^2) \to k$, med $\ker u \simeq k$, får vi at tangentrommet til deformasjonsfunktoren er gitt ved $\mathcal{H}^1(X, V, \nabla)$.

Deformasjoner av vektorbunter med konneksjoner

For $R = \mathbb{C}[t]/(t^2)$ har vi følgende:
Løfting av V, gitt ved overgangsfunksjoner $\hat{\theta}_{ij} = \theta_{ij} + t\alpha_{ij}$ med kosykel-betingelsen

$$\hat{\theta}_{ij} \circ \hat{\theta}_{jk} = \hat{\theta}_{ik}$$

som gir

$$\theta_{ij} \circ \alpha_{jk} + \alpha_{ij} \circ \theta_{jk} - \alpha_{ik} = 0$$

Vi har $\theta_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ hvor ϕ_i er den lokale trivialiseringen av V. Det gir ved multiplikasjon med ϕ_i^{-1} fra venstre og ϕ_k fra høyre

$$\phi_i^{-1}\alpha_{ij}\phi_j - \phi_i^{-1}\alpha_{ik}\phi_k + \phi_j^{-1}\alpha_{jk}\phi_k = 0$$

som er presis en Čech-kosykelbetingelse for kosykelen $\xi_{ij} = \phi_i^{-1}\alpha_{ij}\phi_j$; $\delta_{\check{C}}\xi = 0$.

Deformasjoner av vektorbunter med konneksjoner

Utvidelsen av konneksjonen ∇ over en åpen U_i må tilfredsstille Leibniz regel, dvs.

$$(\nabla + \nu_i t)(f.s) = s \otimes \, df + f.(\nabla + \nu_i t)(s)$$

som gir at ν_i er $\mathcal{O}_{X|_{U_i}}$-lineær, og mer, $\{\nu_i\} \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(V\, V \otimes \Omega^1_X))$ danner en Čech 0-kosykel, $d_\Omega \nu = 0$, siden $\Omega^2 = 0$. Vi skal løfte vektorbunten og konneksjonen simultant, noe som gir en ekstra betingelse;

$$\{\nabla \xi_{ij} - \xi_{ij}\nabla + \nu_i - \nu_j\} = d_\Omega \xi - \delta_{\check{C}} \nu = 0$$

eller $\partial(\xi, \nu) = 0$ i Čech-de Rham-komplekset.

Tilbake til Riemann-Hilbert-korrespondansen

La $A = \mathbb{C}[\pi]$ være grupperingen til fundamentalgruppa. Lineære representasjoner av π er det samme som lineære representasjoner av A. Deformasjonsfunktoren til en representasjon $\rho : A \to \mathrm{End}(V)$ har tangentrom gitt ved $Ext^1_A(V, V)$, og obestruksjonsrom $Ext^2_A(V, V)$. Riemann-Hilbert-korrespondansen gir en ekvivalens av kategorier og må bevare deformasjonsteori, det betyr at

$$Ext^i_A(V, V) \simeq \mathcal{H}^i(X, V, \nabla)$$

For en simpel representasjon V har vi $Hom_A(V, V) \simeq \check{H}^0(X; V; \nabla) \simeq k$, og derfor, ved dualitet, $Ext^2_A(V, V) \simeq k$. Og videre,

$$\check{h}^1(X, \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(V) = n^2(g-1) + 1 = \check{h}^0(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(V, V \otimes \Omega^1_X)$$

som gir

$$dim\, Ext^1_A(V, V) = 2n^2(g-1) + 2$$