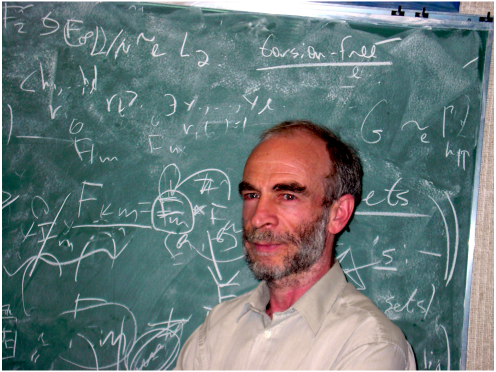
Geometrisk gruppeteori

Arne B. Sletsjøe

Universitetet i Oslo

Felleskollokvium, 08.05.2009



Abelprisen 2009 er tildelt:

Mikhail Leonidovich Gromov

for hans revolusjonerende bidrag til geometrien.

Komiteens begrunnelse

Abelkomiteen trekker spesielt fram tre felt:

Komiteens begrunnelse

Abelkomiteen trekker spesielt fram tre felt:

- "Gromov spilte en avgjørende rolle i den første utviklingen av moderne global Riemannsk geometri."

Komiteens begrunnelse

Abelkomiteen trekker spesielt fram tre felt:

- "Gromov spilte en avgjørende rolle i den første utviklingen av moderne global Riemannsk geometri."
- "Gromov er blant grunnleggerne av symplektisk geometri."

Komiteens begrunnelse

Abelkomiteen trekker spesielt fram tre felt:

- "Gromov spilte en avgjørende rolle i den første utviklingen av moderne global Riemannsk geometri."
- "Gromov er blant grunnleggerne av symplektisk geometri."
- "I sine studier av grupper av polynomiell vekst innførte Gromov ideer som for alltid har forandret vår oppfattelse av diskrete uendelige grupper."

Pseudoholomorfe kurver

La M være en symplektisk $2n$-dimensjonal mangfoldighet, dvs. glatt og utstyrt med en ikke-degenerert, lukket 2-form ω. La J være en nesten kompleks struktur på M, som temmes av ω. Det betyr at J er en automorfi av tangentbunten til M med $J^2 = -1$ og at $\omega(v, Jv) > 0$ for $v \in T_M$.

Pseudoholomorfe kurver

La M være en symplektisk $2n$-dimensjonal mangfoldighet, dvs. glatt og utstyrt med en ikke-degenerert, lukket 2-form ω. La J være en nesten kompleks struktur på M, som temmes av ω. Det betyr at J er en automorfi av tangentbunten til M med $J^2 = -1$ og at $\omega(v, Jv) > 0$ for $v \in T_M$.

Definisjon

*En J-**holomorf (pseudoholomorf)** kurve er en (j, J)-holomorf avbildning*

$$u : \Sigma \to M$$

fra en Riemannsk flate (Σ, j) til en nesten kompleks mangfoldighet (M, J).

Pseudoholomorfe kurver

La M være en symplektisk $2n$-dimensjonal mangfoldighet, dvs. glatt og utstyrt med en ikke-degenerert, lukket 2-form ω. La J være en nesten kompleks struktur på M, som temmes av ω. Det betyr at J er en automorfi av tangentbunten til M med $J^2 = -1$ og at $\omega(v, Jv) > 0$ for $v \in T_M$.

Definisjon

*En J-**holomorf (pseudoholomorf)** kurve er en (j, J)-holomorf avbildning*

$$u : \Sigma \to M$$

fra en Riemannsk flate (Σ, j) til en nesten kompleks mangfoldighet (M, J).

Begrepet ble introdusert av Gromov i 1985 og ligger til grunn for bl.a. symplektisk topologi og Gromov-Witten-invarianter.

Hausdorff-avstand

La $X, Y \subset Z$ være to kompakte delmengder av et metrisk rom Z. **Hausdorffavstanden** $H(X, Y)$ mellom X og Y er gitt ved

$$H(X, Y) = max\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y)\}$$

Hausdorff-avstand

La $X, Y \subset Z$ være to kompakte delmengder av et metrisk rom Z. **Hausdorffavstanden** $H(X, Y)$ mellom X og Y er gitt ved

$$H(X,Y) = max\{\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} d(x,y), \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} d(x,y)\}$$

Hvis X og Y ikke ligger i samme rom, betrakter vi alle isometriske avbildninger av X og Y inn i samme rom Z. **Gromov-Hausdorff-metrikken** er gitt ved infimum av Hausdorff-avstanden mellom X og Y i varierende Z.

Hausdorff-avstand

La $X, Y \subset Z$ være to kompakte delmengder av et metrisk rom Z. **Hausdorffavstanden** $H(X, Y)$ mellom X og Y er gitt ved

$$H(X, Y) = max\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y)\}$$

Hvis X og Y ikke ligger i samme rom, betrakter vi alle isometriske avbildninger av X og Y inn i samme rom Z. **Gromov-Hausdorff-metrikken** er gitt ved infimum av Hausdorff-avstanden mellom X og Y i varierende Z.

Lemma

$H(X, Y) = 0$ *hvis og bare hvis* X *og* Y *er isometriske.*

Hausdorff-avstand

Eksempel:
To sirkler med radius 1 og 2 har Gromov-Hausdorff-avstand 1, ved å legge sirklene konsentrisk inn i samme rom.

Hausdorff-avstand

Eksempel:
To sirkler med radius 1 og 2 har Gromov-Hausdorff-avstand 1, ved å legge sirklene konsentrisk inn i samme rom.

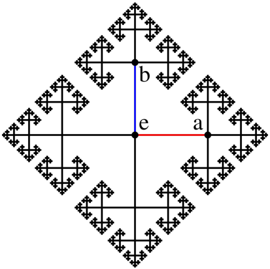
Denne definisjonen gjør mengden av alle komplette separable metriske rom til et eget metrisk rom. Begrepene ble introdusert av Gromov under hans ICM foredrag i 1978: *Synthetic Riemannian Geometry*.
Gromov gir bl.a. konvergens- og kompakthetsegenskaper for dette metriske rommet.

Geometrisk gruppeteori

Innen geometrisk gruppeteori studerer man algebraiske objekter (grupper) ved å betrakte dem som geometriske objekter (metriske rom).

Geometrisk gruppeteori

Innen geometrisk gruppeteori studerer man algebraiske objekter (grupper) ved å betrakte dem som geometriske objekter (metriske rom).



Cayley-grafen til den frie gruppa på to generatorer

Metrikk på en gruppe

La den endelige mengden S generere en gruppe G. Da kan ethvert element i G uttrykkes som et **ord** i generatorene: $g = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n}$, hvor $x_i \in S$ for alle i og $\epsilon_i = \pm 1$. Tallet n kalles **lengden** av ordet. For $g, h \in G$ definerer vi $d_S(g, h)$ til å være lengden av det korteste ordet som representerer $g^{-1}h$.

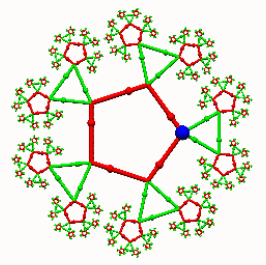
Metrikk på en gruppe

La den endelige mengden S generere en gruppe G. Da kan ethvert element i G uttrykkes som et **ord** i generatorene: $g = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n}$, hvor $x_i \in S$ for alle i og $\epsilon_i = \pm 1$. Tallet n kalles **lengden** av ordet. For $g, h \in G$ definerer vi $d_S(g, h)$ til å være lengden av det korteste ordet som representerer $g^{-1}h$. Funksjonen d_S er en metrikk for G.

Metrikk på en gruppe

La den endelige mengden S generere en gruppe G. Da kan ethvert element i G uttrykkes som et **ord** i generatorene: $g = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n}$, hvor $x_i \in S$ for alle i og $\epsilon_i = \pm 1$. Tallet n kalles **lengden** av ordet. For $g, h \in G$ definerer vi $d_S(g,h)$ til å være lengden av det korteste ordet som representerer $g^{-1}h$. Funksjonen d_S er en metrikk for G.

Metrikken $d_S(g,h)$ er presis lengden av en geodesisk kurve i Cayley-grafen $\Gamma(G,S)$ mellom punktene g og h.



Isometrier mellom metriske rom

Definisjon

En **isometri** *mellom to metriske rom* (X, d) *og* (X', d') *er en avbildning* $f : X \to X'$ *slik at*

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Dersom f *er surjektiv, så er også* f^{-1} *en isometri og vi sier at rommene er isometriske.*

Kvasi-isometrier

La λ, k være positive reelle tall. En avbildning $f : X \to X'$ er en (λ, k)-**kvasi-isometri** dersom

$$\frac{1}{\lambda} d(x,y) - k \leq d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y) + k$$

for alle $x, y \in X$.

Kvasi-isometier

$(\mathbf{Z}, d)$ og $(\mathbf{R}, d)$ er kvasi-isometriske med vanlig metrikk $d(x, y) = |x - y|$. Embeddingen $\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ er en isometri, dvs. en $(1, 0)$-kvasi-isometri. Avbildningen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ som runder av til nærmeste hele tall er en $(1, \frac{1}{2})$-kvasi-isometri.

Kvasi-isometier

$(\mathbf{Z}, d)$ og $(\mathbf{R}, d)$ er kvasi-isometriske med vanlig metrikk $d(x, y) = |x - y|$. Embeddingen $\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ er en isometri, dvs. en $(1, 0)$-kvasi-isometri. Avbildningen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ som runder av til nærmeste hele tall er en $(1, \frac{1}{2})$-kvasi-isometri.
Dersom S og T er generatormengder (endelige) for samme gruppe G, så er (G, d_S) og (G, d_T) kvasi-isometriske. Lar vi λ være den maksimale lengden av et ord i S uttrykt ved elementer i T eller motsatt, vil identiteten danne en $(\lambda, 0)$-kvasi-isometri fra (G, d_S) til (G, d_T).

Vekst

La G være en endelig-generert gruppe med endelig generator-mengde S. **Vekstfunksjonen** $\gamma = \gamma_S : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ for G mhp S er gitt ved

$$\gamma(n) = |\{g \in G \mid d_S(g, 1) \leq n\}|$$

Vekst

La G være en endelig-generert gruppe med endelig generator-mengde S. **Vekstfunksjonen** $\gamma = \gamma_S : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ for G mhp S er gitt ved

$$\gamma(n) = |\{g \in G \mid d_S(g, 1) \leq n\}|$$

Vi sier at to vekstfunksjoner γ og γ' er ekvivalente, $\gamma \sim \gamma'$, dersom $\gamma(n) \leq C\gamma(\alpha n)$ for alle n og $C, \alpha > 0$.

Vekst

La G være en endelig-generert gruppe med endelig generator-mengde S. **Vekstfunksjonen** $\gamma = \gamma_S : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ for G mhp S er gitt ved

$$\gamma(n) = |\{g \in G \mid d_S(g, 1) \leq n\}|$$

Vi sier at to vekstfunksjoner γ og γ' er ekvivalente, $\gamma \sim \gamma'$, dersom $\gamma(n) \leq C\gamma(\alpha n)$ for alle n og $C, \alpha > 0$.
Asymptotisk oppførsel til vekstfunksjonen kalles **vekst**.

Vekst

Polynomiell vekst; $\gamma(n) \sim n^{\alpha}$

Vekst

Polynomiell vekst; $\gamma(n) \sim n^{\alpha}$
Superpolynomiell vekst:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \gamma(n)}{\ln n} = \infty$$

Vekst

Polynomiell vekst; $\gamma(n) \sim n^\alpha$
Superpolynomiell vekst:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \gamma(n)}{\ln n} = \infty$$

Eksponensiell vekst: $\gamma(n) \sim e^n$

Vekst

Polynomiell vekst; $\gamma(n) \sim n^\alpha$
Superpolynomiell vekst:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \gamma(n)}{\ln n} = \infty$$

Eksponensiell vekst: $\gamma(n) \sim e^n$
Subeksponensiell vekst:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \gamma(n)}{n} = 0$$

Vekst

Polynomiell vekst; $\gamma(n) \sim n^\alpha$
Superpolynomiell vekst:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \gamma(n)}{\ln n} = \infty$$

Eksponensiell vekst: $\gamma(n) \sim e^n$
Subeksponensiell vekst:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \gamma(n)}{n} = 0$$

Mellomliggende vekst: Både superpolynomiell og subeksponensiell

Vekst

Noen viktige observasjoner:

Vekst

Noen viktige observasjoner:
Vekstrate er invariant under kvasi-isometri.

Vekst

Noen viktige observasjoner:
Vekstrate er invariant under kvasi-isometri.
Den asymptotiske oppførselen til vekstfunksjonen er den samme for en undergruppe av endelig indeks.

Vekst

Noen viktige observasjoner:
Vekstrate er invariant under kvasi-isometri.
Den asymptotiske oppførselen til vekstfunksjonen er den samme for en undergruppe av endelig indeks.
Endelig genererte abelske grupper har polynomiell vekst

Vekst

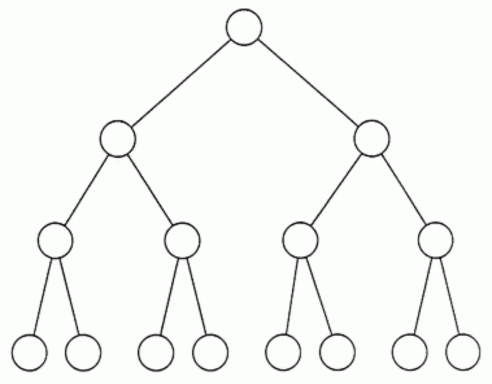
Noen viktige observasjoner:
Vekstrate er invariant under kvasi-isometri.
Den asymptotiske oppførselen til vekstfunksjonen er den samme for en undergruppe av endelig indeks.
Endelig genererte abelske grupper har polynomiell vekst
Endelig genererte nilpotente grupper har polynomiell vekst

Vekst

Noen viktige observasjoner:
Vekstrate er invariant under kvasi-isometri.
Den asymptotiske oppførselen til vekstfunksjonen er den samme for en undergruppe av endelig indeks.
Endelig genererte abelske grupper har polynomiell vekst
Endelig genererte nilpotente grupper har polynomiell vekst
Fri grupper på $k \geq 2$ generatorer har eksponensiell vekst

Grigorchuks eksempel, 1983

La T være et uendelig binært rettet tre. La $G =< a, b, c, d >\subset Aut(T)$ der a bytter 0 og 1 på øverste nivå og b, c, d er gitt ved $b = \phi(a, c)$, $c = \phi(a, d)$ og $d = \phi(Id, b)$. Funksjonen $\phi(f, g)$ er gitt ved $\phi(f, g)(0\omega) = f(\omega)$ og $\phi(f, g)(1\omega) = g(\omega)$. Da har G mellomliggende vekst.



Tidligere resultater for endelig-genererte grupper

Formodning

Enhver endelig presentert gruppe G av polynomiell vekst inneholder en undergruppe av endelig indeks som selv er en undergruppe av en nilpotent Liegruppe. (Milnor, 1968)

Theorem

La G være en endelig generert lineær gruppe. Da inneholder G en fri ikke-abelsk undergruppe (og har derfor eksponensiell vekst) eller G er oppløsbar opp til endelig indeks. (Tits, 1972)

Theorem

En lineær oppløsbar gruppe G vil enten inneholde en nilpotent undergruppe av endelig indeks og ha polynomiell vekst eller ikke, og ha eksponensiell vekst. (Wolf, 1968)

Gromovs teorem

Theorem

La G være en endelig generert gruppe. Da har G polynomiell vekst hvis og bare hvis G har en nilpotent undergruppe av endelig indeks.

Gromovs teorem

Theorem

La G være en endelig generert gruppe. Da har G polynomiell vekst hvis og bare hvis G har en nilpotent undergruppe av endelig indeks.

M.Gromov: *Groups of polynomial growth and expanding maps (with an appendix by J. Tits)*
Publ. math. de IHES, tome 53, (1981), pp. 53-78

Bevis for Gromovs teorem

La X_i være en sekvens av metriske rom. Vi sier at sekvensen X_i konvergerer mot Y dersom den konvergerer i Hausdorff-metrikken mot grenserommet Y:

$$\lim_{i \to \infty} H(X_i, Y) = 0$$

Bevis for Gromovs teorem

La X_i være en sekvens av metriske rom. Vi sier at sekvensen X_i konvergerer mot Y dersom den konvergerer i Hausdorff-metrikken mot grenserommet Y:

$$\lim_{i\to\infty} H(X_i, Y) = 0$$

La X være et metrisk rom med metrikk d. For $\lambda > 0$ lar vi λX ha det samme underliggende rommet, men med en ny metrikk d^λ gitt ved $d^\lambda(x, y) = \lambda \cdot d(x, y)$.

Bevis for Gromovs teorem

La X_i være en sekvens av metriske rom. Vi sier at sekvensen X_i konvergerer mot Y dersom den konvergerer i Hausdorff-metrikken mot grenserommet Y:

$$\lim_{i\to\infty} H(X_i, Y) = 0$$

La X være et metrisk rom med metrikk d. For $\lambda > 0$ lar vi λX ha det samme underliggende rommet, men med en ny metrikk d^λ gitt ved $d^\lambda(x,y) = \lambda \cdot d(x,y)$.

Eksempel: La $X = \mathbf{R}$. Da er λX isometriske for alle verdier av $\lambda > 0$ ved isometrien $x \mapsto \frac{1}{\lambda}x$. Det gir

$$d^\lambda(\frac{1}{\lambda}x, \frac{1}{\lambda}y) = \lambda d(\frac{1}{\lambda}x, \frac{1}{\lambda}y) = d(x,y)$$

Bevis for Gromovs teorem

La λ_i være en følge av reelle tall med grense 0, og betrakt følgen $\lambda_i X$ av metriske rom. Vi er interessert i "grenserommene" $Y = \lim \lambda_i X$.

Bevis for Gromovs teorem

La λ_i være en følge av reelle tall med grense 0, og betrakt følgen $\lambda_i X$ av metriske rom. Vi er interessert i "grenserommene" $Y = \lim \lambda_i X$.
Eksempler:

Bevis for Gromovs teorem

La λ_i være en følge av reelle tall med grense 0, og betrakt følgen $\lambda_i X$ av metriske rom. Vi er interessert i "grenserommene" $Y = \lim \lambda_i X$.

Eksempler:

Dersom X er kompakt er grensen ett-punkts-rommet.

Bevis for Gromovs teorem

La λ_i være en følge av reelle tall med grense 0, og betrakt følgen $\lambda_i X$ av metriske rom. Vi er interessert i "grenserommene" $Y = \lim \lambda_i X$.

Eksempler:

Dersom X er kompakt er grensen ett-punkts-rommet.

For $X = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ med fikserte generatorer a, b vil $\lambda_i X$ konvergere mot $\mathbf{R}$ med Minkowski-metrikken $d((a,b),(a',b')) = |a - a'| + |b - b'|$.

Bevis for Gromovs teorem

For gruppa G lar vi $G_i = \lambda_i G$ for en følge $\lambda_i \to 0$. Gromov viser at gruppa L av isometrier av Y er en Liegruppe med endelig mange komponenter.

Bevis for Gromovs teorem

For gruppa G lar vi $G_i = \lambda_i G$ for en følge $\lambda_i \to 0$. Gromov viser at gruppa L av isometrier av Y er en Liegruppe med endelig mange komponenter. Et teknisk argument som sammenlikner egenskaper til G_i med egenskaper til grenserommet Y gir at følgende er oppfyllt:
Egenskap $(*)$: For hver endelig genererte uendelige undergruppe $G' \subset G$ så finnes en undergruppe $\Delta \subset G'$ av endelig indeks slik at for hver $p = 1, 2, \ldots$ finnes det en homomorfi $\Delta \to \mathbf{L}$ slik at bildet inneholder minst p elementer.

Bevis for Gromovs teorem

For gruppa G lar vi $G_i = \lambda_i G$ for en følge $\lambda_i \to 0$. Gromov viser at gruppa L av isometrier av Y er en Liegruppe med endelig mange komponenter. Et teknisk argument som sammenlikner egenskaper til G_i med egenskaper til grenserommet Y gir at følgende er oppfyllt:
Egenskap $(*)$: For hver endelig genererte uendelige undergruppe $G' \subset G$ så finnes en undergruppe $\Delta \subset G'$ av endelig indeks slik at for hver $p = 1, 2, \ldots$ finnes det en homomorfi $\Delta \to \mathbf{L}$ slik at bildet inneholder minst p elementer.
Gromov viser så sitt "Algebraisk lemma":
La G være en endelig generert gruppe av polynomiell vekst og la $\mathbf{L}$ være en Liegruppe med endelig mange sammenhengskomponenter. Anta G oppfyller $(*)$. Da har G en nilpotent undergruppe av endelig indeks.

Bevis for Gromovs teorem

For gruppa G lar vi $G_i = \lambda_i G$ for en følge $\lambda_i \to 0$. Gromov viser at gruppa L av isometrier av Y er en Liegruppe med endelig mange komponenter. Et teknisk argument som sammenlikner egenskaper til G_i med egenskaper til grenserommet Y gir at følgende er oppfyllt:
Egenskap $(*)$: For hver endelig genererte uendelige undergruppe $G' \subset G$ så finnes en undergruppe $\Delta \subset G'$ av endelig indeks slik at for hver $p = 1, 2, \ldots$ finnes det en homomorfi $\Delta \to \mathbf{L}$ slik at bildet inneholder minst p elementer.
Gromov viser så sitt "Algebraisk lemma":
La G være en endelig generert gruppe av polynomiell vekst og la $\mathbf{L}$ være en Liegruppe med endelig mange sammenhengskomponenter. Anta G oppfyller $(*)$. Da har G en nilpotent undergruppe av endelig indeks.
QED.

Hyperbolske grupper

Begrepet **Hyperbolsk gruppe** ble introdusert av Gromov tidlig på 80-tallet. Han observerte at mange resultater av *Max Dehn* om fundamentalgrupper for hyperbolske Riemannflater ikke egentlig hadde noe å gjøre med hverken dimensjon 2 eller at de stammet fra en mangfoldighet, men at de holdt i en mye mer generell setting. I en innflytelsesrik artikkel fra 1987 trakk Gromov opp linjene for et vidt-rekkende forskningsprogram rundt hyperbolske grupper.

Hyperbolske grupper

Den **indre radiusen** til en trekant er radius i den innskrevne sirkel. F.eks. er den indre radiusen til en likesidet trekant med side a gitt ved $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Når $a \to \infty$, så vil den indre radiusen også gå mot ∞. For hyperbolske plan er π en øvre grense for arealene av trekanter, og derfor også for indre radier.

Geodesiske metriske rom

Definisjon

*En trekant er δ-**tynn** dersom den innskrevne radius er mindre enn δ.*

Geodesiske metriske rom

Definisjon

*En trekant er δ-**tynn** dersom den innskrevne radius er mindre enn δ.*

Definisjon

*Et **geodesisk segment** av lengde ℓ er en isometrisk embedding $\iota : [0, \ell] \to X$ slik at $d(\iota(x), \iota(y)) = y - x$ for alle $0 \leq x \leq y \leq \ell$. En **geodesisk trekant** er en trekant der kantene er geodesiske segmenter.*

Geodesiske metriske rom

Definisjon

*En trekant er δ-**tynn** dersom den innskrevne radius er mindre enn δ.*

Definisjon

*Et **geodesisk segment** av lengde ℓ er en isometrisk embedding $\iota : [0, \ell] \to X$ slik at $d(\iota(x), \iota(y)) = y - x$ for alle $0 \leq x \leq y \leq \ell$. En **geodesisk trekant** er en trekant der kantene er geodesiske segmenter.*

Definisjon

*Et metrisk rom (X, d) er **geodesisk** dersom det finnes et geodesisk segment mellom hvert par av punkter.*

Geodesiske metriske rom

Definisjon

*En trekant er δ-**tynn** dersom den innskrevne radius er mindre enn δ.*

Definisjon

*Et **geodesisk segment** av lengde ℓ er en isometrisk embedding $\iota : [0, \ell] \to X$ slik at $d(\iota(x), \iota(y)) = y - x$ for alle $0 \leq x \leq y \leq \ell$. En **geodesisk trekant** er en trekant der kantene er geodesiske segmenter.*

Definisjon

*Et metrisk rom (X, d) er **geodesisk** dersom det finnes et geodesisk segment mellom hvert par av punkter.*

Definisjon

*Et geodesisk metrisk rom X er **hyperbolsk** dersom $\exists \delta > 0$ slik at at alle trekanter er δ-tynne.*

Geodesiske metriske rom

Lemma

La (X, d) og (X', d') være kvasi-isometriske rom. Da er (X, d) hyperbolsk hvis og bare hvis (X', d') er hyperbolsk.

Geodesiske metriske rom

Lemma

La (X, d) og (X', d') være kvasi-isometriske rom. Da er (X, d) hyperbolsk hvis og bare hvis (X', d') er hyperbolsk.

Eksempler:

Geodesiske metriske rom

Lemma

La (X, d) og (X', d') være kvasi-isometriske rom. Da er (X, d) hyperbolsk hvis og bare hvis (X', d') er hyperbolsk.

Eksempler:

- Begrensede geodesiske metriske rom

Geodesiske metriske rom

Lemma

La (X, d) og (X', d') være kvasi-isometriske rom. Da er (X, d) hyperbolsk hvis og bare hvis (X', d') er hyperbolsk.

Eksempler:

- △ Begrensede geodesiske metriske rom
- △ Trær

Geodesiske metriske rom

Lemma

La (X, d) og (X', d') være kvasi-isometriske rom. Da er (X, d) hyperbolsk hvis og bare hvis (X', d') er hyperbolsk.

Eksempler:

- Begrensede geodesiske metriske rom
- Trær
- Hyperbolske rom $\mathbf{H}^n$

Geodesiske metriske rom

Lemma

La (X, d) og (X', d') være kvasi-isometriske rom. Da er (X, d) hyperbolsk hvis og bare hvis (X', d') er hyperbolsk.

Eksempler:

- Begrensede geodesiske metriske rom
- Trær
- Hyperbolske rom $\mathbf{H}^n$
- Euklidske rom er ikke hyperbolske

Hyperbolsk gruppe

Gitt en gruppe G med generatormengde S, og la $K = |\Gamma(G, S)|$ være den geometiske realiseringen (som er kvasi-isometrisk med G). Hvis K er et hyperbolsk metrisk rom sier vi at gruppa G er **hyperbolsk**

Hyperbolsk gruppe

Gitt en gruppe G med generatormengde S, og la $K = |\Gamma(G, S)|$ være den geometiske realiseringen (som er kvasi-isometrisk med G). Hvis K er et hyperbolsk metrisk rom sier vi at gruppa G er **hyperbolsk**

Eksempler:

Hyperbolsk gruppe

Gitt en gruppe G med generatormengde S, og la $K = |\Gamma(G, S)|$ være den geometiske realiseringen (som er kvasi-isometrisk med G). Hvis K er et hyperbolsk metrisk rom sier vi at gruppa G er **hyperbolsk**

Eksempler:

- Endelige grupper

Hyperbolsk gruppe

Gitt en gruppe G med generatormengde S, og la $K = |\Gamma(G, S)|$ være den geometiske realiseringen (som er kvasi-isometrisk med G). Hvis K er et hyperbolsk metrisk rom sier vi at gruppa G er **hyperbolsk**

Eksempler:

- Endelige grupper
- Frie grupper, siden Cayley-grafen er et tre

Hyperbolsk gruppe

Gitt en gruppe G med generatormengde S, og la $K = |\Gamma(G,S)|$ være den geometiske realiseringen (som er kvasi-isometrisk med G). Hvis K er et hyperbolsk metrisk rom sier vi at gruppa G er **hyperbolsk**

Eksempler:

- △ Endelige grupper
- △ Frie grupper, siden Cayley-grafen er et tre
- △ Fundamentalgruppa til en flate av genus $g \geq 2$ er kvasi-isometrisk med $\mathbf{H}^2$, derfor hyperbolsk

Hyperbolsk gruppe

Gitt en gruppe G med generatormengde S, og la $K = |\Gamma(G,S)|$ være den geometiske realiseringen (som er kvasi-isometrisk med G). Hvis K er et hyperbolsk metrisk rom sier vi at gruppa G er **hyperbolsk**

Eksempler:

- Endelige grupper
- Frie grupper, siden Cayley-grafen er et tre
- Fundamentalgruppa til en flate av genus $g \geq 2$ er kvasi-isometrisk med $\mathbf{H}^2$, derfor hyperbolsk
- Fundamentalgruppa til flater med negativ Euler-karakteristikk

Hyperbolsk gruppe

Gitt en gruppe G med generatormengde S, og la $K = |\Gamma(G, S)|$ være den geometiske realiseringen (som er kvasi-isometrisk med G). Hvis K er et hyperbolsk metrisk rom sier vi at gruppa G er **hyperbolsk**

Eksempler:

- Endelige grupper
- Frie grupper, siden Cayley-grafen er et tre
- Fundamentalgruppa til en flate av genus $g \geq 2$ er kvasi-isometrisk med $\mathbf{H}^2$, derfor hyperbolsk
- Fundamentalgruppa til flater med negativ Euler-karakteristikk
- Fundamentalgruppa til kompakte Riemannske mangfoldigheter med strikt negativ seksjonell krumning

Hyperbolsk gruppe

Gitt en gruppe G med generatormengde S, og la $K = |\Gamma(G, S)|$ være den geometiske realiseringen (som er kvasi-isometrisk med G). Hvis K er et hyperbolsk metrisk rom sier vi at gruppa G er **hyperbolsk**

Eksempler:

- Endelige grupper
- Frie grupper, siden Cayley-grafen er et tre
- Fundamentalgruppa til en flate av genus $g \geq 2$ er kvasi-isometrisk med $\mathbf{H}^2$, derfor hyperbolsk
- Fundamentalgruppa til flater med negativ Euler-karakteristikk
- Fundamentalgruppa til kompakte Riemannske mangfoldigheter med strikt negativ seksjonell krumning

Theorem

Enhver hyperbolsk gruppe er endelig presentert. (Rips)

Alternativ definisjon av hyperbolske grupper

Isoperimetriske ulikhet for euklidske plan:

Alternativ definisjon av hyperbolske grupper

Isoperimetriske ulikhet for euklidske plan: Gitt en (passe pen) plan kurve C, av buelengde ℓ og som omslutter et begrenset område D. Da har vi at

$$Areal(D) \leq \frac{\ell^2}{4\pi}$$

Alternativ definisjon av hyperbolske grupper

Isoperimetriske ulikhet for euklidske plan: Gitt en (passe pen) plan kurve C, av buelengde ℓ og som omslutter et begrenset område D. Da har vi at

$$Areal(D) \leq \frac{\ell^2}{4\pi}$$

Analogt resultat for en kurve i det hyperbolske plan

$$Areal(D) \leq \ell$$

Isoperimetrisk ulikhet for endelig presenterte grupper

La $\mathcal{P}\langle X|R\rangle$ være en endelig presentasjon av en gruppe G. La $\omega \in F(X)$ være et ord som representerer enheten $1 \in G$. Da kan ω skrives som et produkt av kojugasjonaer av elementer i R og deres inverser:

$$\omega = (u_1^{-1} r_1^{\epsilon_1} u_1) \dots (u_n^{-1} r_n^{\epsilon_n} u_n)$$

Isoperimetrisk ulikhet for endelig presenterte grupper

La $\mathcal{P}\langle X|R\rangle$ være en endelig presentasjon av en gruppe G. La $\omega \in F(X)$ være et ord som representerer enheten $1 \in G$. Da kan ω skrives som et produkt av kojugasjonaer av elementer i R og deres inverser:

$$\omega = (u_1^{-1} r_1^{\epsilon_1} u_1) \dots (u_n^{-1} r_n^{\epsilon_n} u_n)$$

Det minste antall faktorer i en slik presentasjon kalles **arealet** av ω, $Areal(\omega)$.

Isoperimetrisk ulikhet for endelig presenterte grupper

La $\mathcal{P}\langle X|R\rangle$ være en endelig presentasjon av en gruppe G. La $\omega \in F(X)$ være et ord som representerer enheten $1 \in G$. Da kan ω skrives som et produkt av kojugasjonaer av elementer i R og deres inverser:

$$\omega = (u_1^{-1} r_1^{\epsilon_1} u_1) \dots (u_n^{-1} r_n^{\epsilon_n} u_n)$$

Det minste antall faktorer i en slik presentasjon kalles **arealet** av ω, $Areal(\omega)$. Definer en funksjon $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ved

$$f(\ell) = max\{Areal(\omega) \,|\, \omega \in F(X),\, \omega = 1,\, \ell(\omega) = \ell\}$$

(kalles *Dehn funksjon* eller *isoperimetrisk funksjon* for presentasjonen $\mathcal{P}$)

Isoperimetrisk ulikhet for endelig presenterte grupper

La $\mathcal{P}\langle X|R\rangle$ være en endelig presentasjon av en gruppe G. La $\omega \in F(X)$ være et ord som representerer enheten $1 \in G$. Da kan ω skrives som et produkt av kojugasjonaer av elementer i R og deres inverser:

$$\omega = (u_1^{-1} r_1^{\epsilon_1} u_1) \ldots (u_n^{-1} r_n^{\epsilon_n} u_n)$$

Det minste antall faktorer i en slik presentasjon kalles **arealet** av ω, $Areal(\omega)$. Definer en funksjon $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ved

$$f(\ell) = max\{Areal(\omega) \,|\, \omega \in F(X), \, \omega = 1, \, \ell(\omega) = \ell\}$$

(kalles *Dehn funksjon* eller *isoperimetrisk funksjon* for presentasjonen $\mathcal{P}$)

Definisjon

En gruppe G er **hyperbolsk** *dersom Dehnfunksjonen er majorert av en lineær funksjon.*

Dehnfunksjon for en euklidks torus

Fundamentalgruppa til en torus er gitt ved $G = \angle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1}\rangle$. Betrakt ordet $\omega_n = [x^n, y^n]$. En kan vise at $Areal(\omega_n) = n^2$, mens $\ell(\omega_n) = 4n$.

Dehnfunksjon for en euklidks torus

Fundamentalgruppa til en torus er gitt ved $G = \angle x, y \,|\, xyx^{-1}y^{-1}\rangle$. Betrakt ordet $\omega_n = [x^n, y^n]$. En kan vise at $Areal(\omega_n) = n^2$, mens $\ell(\omega_n) = 4n$.

For $n = 3$:

$$[x^2, y^2] = xxyyx^{-1}x^{-1}y^{-1}y^{-1} = x[x, y]x^{-1} \cdot xy[x, y]y^{-1}x^{-1} \cdot [x, y] \cdot y$$

Ordproblemet

Gitt en gruppe G med en endelig presentasjon $\langle X \mid R \rangle$. **Ordproblemet** for G handler om å avgjøre algoritmisk om er gitt ord ω i generatormengden X faktisk representerer $1 \in G$? En løsning av ordproblemet betyr at algoritmen i endelig tid spytter ut et svar, JA eller NEI.

Proposisjon

Hyperbolske grupper har løsbart ordproblem.

Gromovs program

Gromovs program for å studere kvasi-isometriske egenskaper til grupper (1987):

Gromovs program

Gromovs program for å studere kvasi-isometriske egenskaper til grupper (1987):

- Egenskaper som er invariant under kvasi-isometrier, som vekst-rate Dehnfunksjoner, hyperbolistet,

Gromovs program

Gromovs program for å studere kvasi-isometriske egenskaper til grupper (1987):

- Egenskaper som er invariant under kvasi-isometrier, som vekst-rate Dehnfunksjoner, hyperbolistet,
- Resultater som bruker kvasi-isometriske invarianter til å vise algebraiske egenskaper for grupper

Gromovs program

Gromovs program for å studere kvasi-isometriske egenskaper til grupper (1987):

- △ Egenskaper som er invariant under kvasi-isometrier, som vekst-rate Dehnfunksjoner, hyperbolistet,
- △ Resultater som bruker kvasi-isometriske invarianter til å vise algebraiske egenskaper for grupper
- △ Klassifikasjon av grupper opp til kvasi-isometri