Ligger 10 punkt på en tredjegradskurve?

Faglig Pedagogisk dag, UiO 5.11.2021

Kristian Ranestad

Et tredjegradspolynom

$$F(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2+a_7x^3+a_8x^2y+a_9xy^2+a_{10}y^3$$

har 10 koeffisienter, så 9 punkter

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_9,y_9)$$

i planet vil alltid være nullpunkter for et tredjegradspolynom,
men ikke alltid 10!

Gitt koordinatene til punktene kan en bruke lineær algebra,
10 ukjente koeffisienter, 10 homogene likninger

$$F(x_1,y_1)= \dots = F(x_{10},y_{10})= 0 ,$$

til å avgjøre dette.

Kan en avgjøre dette geometrisk? Gitt punktene i planet, kan en avgjøre om de ligger på en tredjegradskurve, bare med (blyant og) linjal?

Et lineært polynom

$$F(x,y)=a_1+a_2x+a_3y$$

har 3 koeffisienter, så 2 punkter

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$$

i planet vil alltid være nullpunkter for et lineært polynom, men ikke alltid 3!

Med 3 punkter

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$$

får vi tre likninger

$$a_1+a_2x_1+a_3y_1=0$$
$$a_1+a_2x_2+a_3y_2=0$$
$$a_1+a_2x_3+a_3y_3=0$$

som har en løsning forskjellig fra (0,0,0) bare hvis punktene ligger på linje.

Uavhengig av koordinater, gitt tre punkter i planet, kan vi bruke linjal til å avgjøre om de ligger på linje…. (med en hvis nøyaktighet)

Kjeglesnitt

$$F(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2$$

har 6 koeffisienter, så 5 punkter

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_5,y_5)$$

i planet vil alltid være nullpunkter for et andregradspolynom,

men ikke alltid 6!

Gitt koordinatene til punktene kan en bruke lineær algebra (6 ukjent, 6 homogene likninger) til å avgjøre dette.

Kan en avgjøre dette geometrisk? Gitt 6 punkter i planet, kan en avgjøre

om de ligger på et kjeglesnitt, bare med (blyant og) linjal?

Pascal (Braikenridge – Maclaurin)

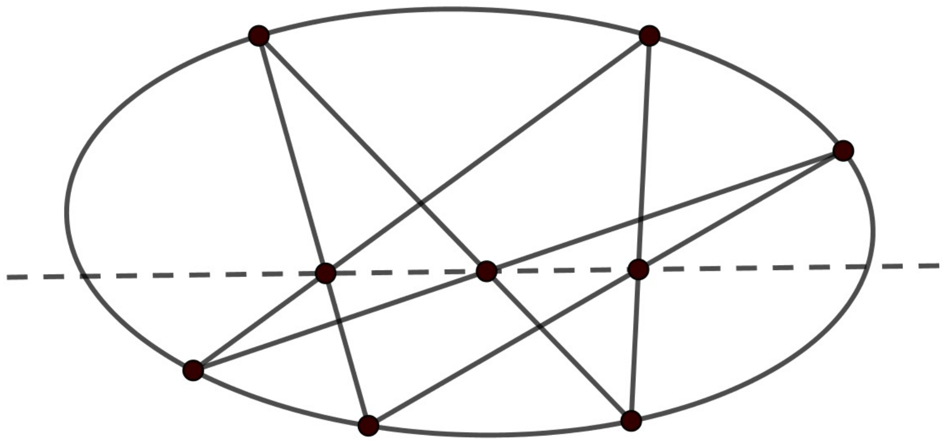
Gitt 6 punkter P,Q,R,S,T,U i planet.

La A være skjæringspunktet mellom linja L_{PT} gjennom P og T og linja L_{QS} gjennom Q,S.

La B være skjæringspunktet mellom linja L_{PU} gjennom P og U og linja L_{RS} gjennom R,S.

La C være skjæringspunktet mellom linja L_{QU} gjennom Q og U og linja L_{RT} gjennom R,T.

Da ligger A,B,C på linje hvis og bare hvis P,Q,R,S,T,U ligger på et kjeglesnitt.



Caylay Bacharach

Anta at 9 punkter er de felles punktene til to tredjegradskurver.

Da ligger 3 av dem på linje hvis og bare hvis de 6 andre ligger på et kjeglesnitt

Om 16 punkter er de felles punktene til to fjerdegradskurver.

Da ligger 6 av dem på et kjeglesnitt, hvis og bare hvis de 10 andre ligger på en tredjegradskurve.

Om en kurve av grad d_1+d_2-3 inneholder alle unntatt en av d_1d_2 felles punkter for to kurver av grad d_1 og d_2, da inneholder de også det siste punktet.

Gitt 10 punkter: ligger de på en tredjegradskurve?

Kall de 10 punktene

$$p_1, p_2, \ldots, p_{10.}$$

Vi vil finne først 6 punkter

$$q_1, \ldots, q_6,$$

slik at disse sammen med punktene p_i er felles punkter for to fjerdegradskurver.

Deretter kan vi avgjøre om punktene p_i ligger på tredjegradskurve, ved å sjekke om punktene $q_{i.}$ ligger på kjeglesnitt.

To fjerdegradskurver

La C_1 være kjeglesnittet gjennom $p_1,\ldots,p_5$,
og la C_2 være kjeglesnittet gjennom $p_6,\ldots,p_{10}$.

La D_1 være kjeglesnittet gjennom p_1,p_2,p_3,p_6,p_7,
og la D_2 være kjeglesnittet gjennom p_4,p_5,p_8,p_9,p_{10}.

Da vil kurvene

$$C_1C_2 \text{ og } D_1D_2$$

være fjerdegradskurver med 16 felles punkter. Seks punkter, som vi kaller

$$q_1,\ldots,q_6,$$

i tillegg til de ti punktene

$$p_1,\ldots,p_{10}.$$

Kan vi finne punktene q_i med linjal?

C_1 har punktene p_1,p_2,p_3 felles med D_1, så de har et punkt til felles, vi kaller det q_1.

C_1 har punktene p_4,p_5 felles med D_2, så de har to punkter til felles, vi kaller dem q_2, q_3.

C_2 har punktene p_6,p_7 felles med D_1, så de har to punkter til felles, vi kaller dem q_4,q_5.

C_2 har punktene p_8,p_9,p_{10} felles med D_2, så de har et punkt til felles, vi kaller det q_6.

To oppgaver

Gitt tre felles punkter til to kjeglesnitt, finn det fjerde, med bare linjal.

Gitt to felles punkter til to kjeglesnitt, finn linja gjennom de to siste, med bare linjal.

Gitt tre felles punkter til to kjeglesnitt, finn det fjerde, med bare linjal.

La C og D være kjeglesnitt med felles punkter i p,q,r, og ellers punkter s,t på C, og u,v på D.

Cremona dualitet. (punkter <-> linjer)

Sender punkter til linjer og linjer til punkter

Cremona Cr med hensyn til p,q,r

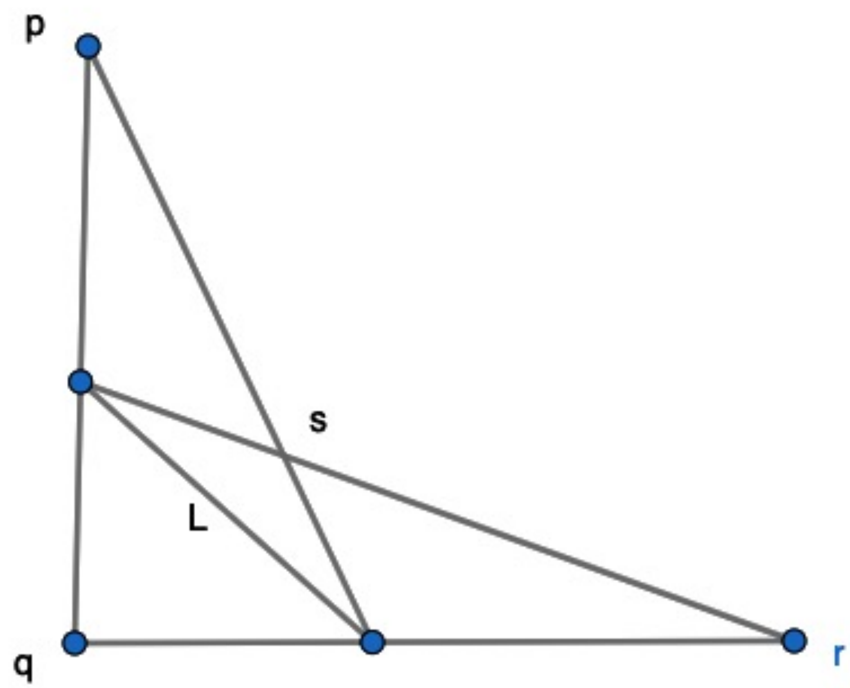
La L_{pq} være linja gjennom p,q.
La L_{qr} være linja gjennom q,r.

Cr(punkt)=linje:

s -> linja L_s gjennom s_r og s_p,
der s_r er felles punkt for L_{sr} og L_{pq}
og s_p er felles punkt for L_{sp} og L_{qr}

Cr(linje)=punkt:

L-> det felles punktet p_L mellom linjene L_p og L_r
der p og det felles punktet til L_{qr} og L ligger på L_p, og
der r og det felles punktet til L_{pq} og L ligger på L_r.



Løsning, problem 1

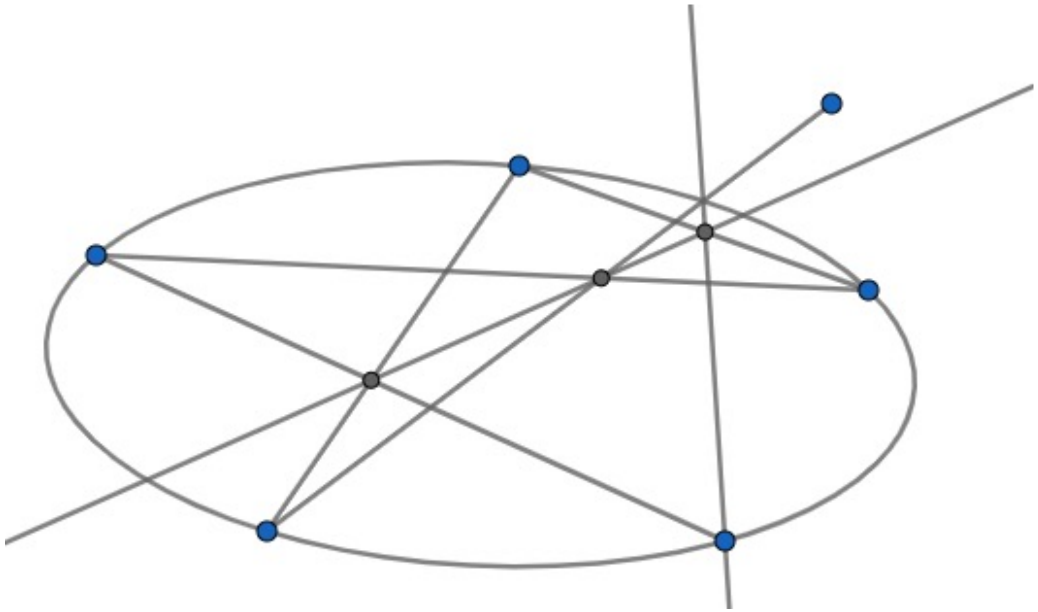
La C og D være kjeglesnitt med felles punkter i p,q,r,
og ellers punkter s,t på C, og u,v på D.

La $p_{s,t}$ være det felles punktet til L_s og L_t
La $p_{u,v}$være det felles punktet til L_u og L_v
La L være linja gjennom $p_{s,t}$ og $p_{u,v}$.

Da ligger p_L på C og D!

Pascal 1

La C være et kjeglesnitt med punkter p,q,r,s,t, og la L være ei linje gjennom p



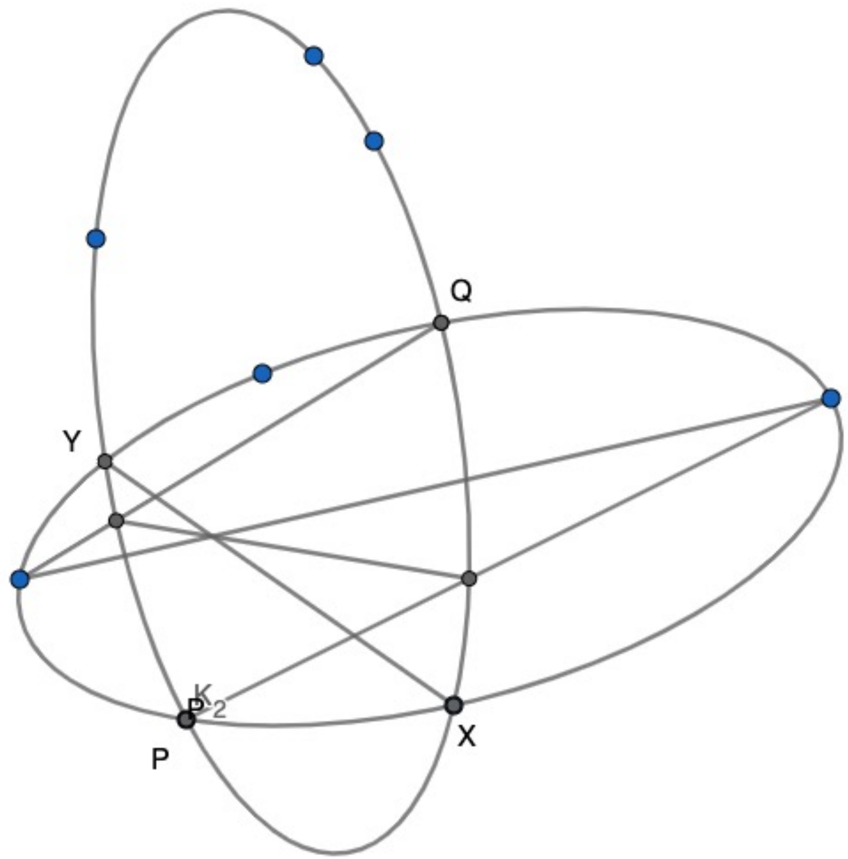
Da kan vi bruke Pascals teorem til å finne punktet p_L som er felles for C og L i tillegg til p.

Pascal 2

La C og D være kjeglesnitt med felles punkter i p,q og ellers punkter r,s,t på C, og u,v,w på D.

La x,y være de to siste felles punktene på C og D, og la $L_{x,y}$ være linja gjennom x og y.

Pascal 2: Hvis $L_{p,r}$ inneholder p' på D, og $L_{q,s}$ inneholder q' på D, så ligger det felles punktet $p_{r,s}$ til linjene $L_{p',q'}$ og $L_{r,s}$ på $L_{x,y}$.



Problem 2, løsning

La C og D være kjeglesnitt med felles punkter i p,q og ellers punkter r,s,t på C, og u,v,w på D.

Bruk Pascal 2 to ganger til å finne

$p_{r,s}$ og $p_{s,t}$.

Da er $L_{x,y}$ linja gjennom $p_{r,s}$ og $p_{s,t}$.

Så til 10 punkter

Gitt

p_1 felles punkt til C_1 og D_1 utenom r,s,t

p_2 felles punkt til C_2 og D_2 utenom u,v,w

L_q linja gjennom to felles punkt q_1,q_2 til C_1 og D_2
L_r linja gjennom to felles punkt r_1,r_2 til C_2 og D_1

Skal avgjøre om p_1,p_2,q_1,q_2,r_1,r_2 ligger på et kjeglesnitt.

Løsning

La L_p være linja gjennom p_1,p_2
og la G være et av de felles punktene til C_1 og D_1 (utenom p_1),
og la P være felles punkt til L_q og L_r.

La W være felles punkt til $L_{P,G}$ og C_1. (Pascal 1)
La Z være felles punkt til $L_{P,G}$ og D_1. (Pascal 1)
La X være felles punkt til L_p og C_1, (Pascal 1)
la Y være felles punkt til L_p og D_1. (Pascal 1)
La U være felles punkt til $L_{W,X}$ og L_q,
og la V være felles punkt til $L_{Z,Y}$ og L_r .
Da ligger p_1,p_2,q_1,q_2,r_1,r_2 på kjeglesnitt, hvis og bare hvis
U,V og p_2 ligger på linje.

Referanse

Will Traves and David Wehlau:

«Ten points on a Cubic»

https://arxiv.org/pdf/2105.12058.pdf

Takk for oppmerksomheten