# Linjegeometri

Kristian Ranestad

3. Januar 2006

Hva er en konveks mengde med punkter?

En punktmengde er konveks dersom alle linjestykkene med endepunkter i mengden er helt inneholdt i mengden.

Eksempler:
Et linjestykke (den konvekse punktmengden **utspent av** endepunktene).

En trekant (den konvekse punktmengden utspent av hjørnepunktene.)

Hva er en konveks mengde med linjer?
Hvilke linjer ligger mellom to linjer?

Gir dette mening?

# Definisjon

Vi må avgrense oss til **stigende** linjer.

Med koordinater: Hver linje har en retningsvektor med koordinater.

En linje der alle koordinatene til retningsvektoren er positive kalles stigende.

En linje i planet er derfor stigende dersom den har positivt stigningstall.

En **ramme-konveks** mengde av stigende linjer i planet er mengden av stigende linjer som treffer hvert rektangel i en gitt mengde av akse-parallelle rektangler.

(Et **akse-parallelt** rektangel har sidekanter parallelle med koordinataksene.)

Den ramme-konvekse mengden av linjer utspent av en samling stigende linjer i planet er alle de linjene som treffer alle de akse-parallelle rektanglene som igjen treffer de opprinnelige linjene.

# Eksempel: Intervall av linjer i planet

De linjene som "ligger mellom" to stigende linjer som skjærer hverandre i planet, er alle de linjene gjennom skjæringspunktet som har positivt stigningstall mellom stigningstallene til de to opprinnelige linjene.

# Eksempel: Intervall av linjer i rommet

For to stigende linjer $L_1$ og $L_2$ i rommet, hvilke linjer ligger mellom disse?

Der er tre linjestykker i rommet som er parallelle med koordinataksene og som har endepunkt på de to linjene.

De linjene som "ligger mellom" $L_1$ og $L_2$ er alle linjene som treffer disse tre linjestykkene.

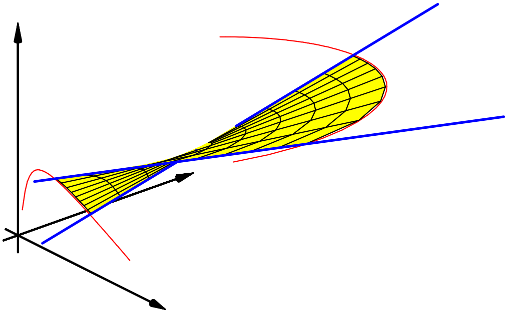

Figure: Intervall av linjer

# Plücker koordinater

En linje $\ell$ i 3-rommet er bestemt av et punkt $p = (x_1, x_2, x_3)$ på $\ell$ og en retningsvektor $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Legg merke til at vi kan erstatte $p$ med $p + \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{R}$, mens $v$ kan erstattes med $\mu v, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Så hvis vi fikserer en koordinat for $p$ og en for $v$ har vi 4 "frie" parametere, mengden av linjer i rommet er 4-dimensional.

2x2 underdeterminantene i matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

bestemmer $\ell$ og er entydige opp til multiplikasjon med skalar. Disse er de berømte Plücker koordinatene til linja $\ell$:

$$p_{01} = v_1, p_{02} = v_2, p_{03} = v_3,$$

$$p_{12} = x_1 v_2 - x_2 v_1, p_{13} = x_1 v_3 - x_3 v_1, p_{23} = x_2 v_3 - x_3 v_2$$

Dersom $v_1 = 0$, så er linja parallell med planet gjennom 2. og 3. aksen. I fortsettelsen ser vi bort fra disse linjene. Da kan vi sette $v_1 = 1$, og Plücker koordinatene blir

$$p_{01} = 1, p_{02} = v_2, p_{03} = v_3,$$

$$p_{12} = x_1 v_2 - x_2, p_{13} = x_1 v_3 - x_3, p_{23} = x_2 v_3 - x_3 v_2$$

og er entydige for linja.

Mengden av linjer er 4-dimensional.

Antall variable Plücker koordinater $p_{02}, \dots, p_{23}$ er imidlertid 5. Derfor vil ikke alle 5-tupler bestemme en linje.

Dette kan forklares ved at Plücker koordinatene til ei linje tilfredstiller en kvadratisk relasjon:

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$$

# Grassmannen av linjer

Mengden av linjer, kalt Grassmannen av linjer, er ikke en konveks mengde i rommet av Plücker koordinater.

# Cremona koordinater

*Cremona koordinatene* $(y, w)$ til ei linje $\ell$ som ikke er parallell med noe koordinatplan, er definert på følgende måte

$$y_1 = \frac{x_1}{v_1}, y_2 = \frac{x_2}{v_2}, y_3 = \frac{x_3}{v_3}$$

$$w_1 = \frac{1}{v_1}, w_2 = \frac{1}{v_2}, w_3 = \frac{1}{v_3}$$

Legg merke til at

$$(y_1, y_2, y_3) \sim (y_1, y_2, y_3) + \lambda(1, 1, 1)$$

og

$$(w_1, w_2, w_3) \sim (\mu w_1, \mu w_2, \mu w_3)$$

# Cremona-konveksitet

Ved å kreve $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ and $w_1 + w_2 + w_3 = 1$, blir koordinatene entydige.
Da danner Cremona koordinatene til linjer en 4-dimensional (lineær) konveks mengde i rommet av 6-tupler.

Nå kan vi definere:
En mengde med stigende linjer er **Cremona-konveks** dersom mengden av Cremona koordinater er konveks.

## Setning

*En mengde av stigende linjer som er ramme-konveks er også Cremona-konveks.*

For å forstå Cremona koordinatene bedre foretar vi et bytte av Plücker koordinatene:

$$q_{01} = \frac{1}{p_{01}}, q_{02} = \frac{1}{p_{02}}, q_{03} = \frac{1}{p_{03}}$$

og

$$q_{12} = \frac{p_{12}}{p_{01}p_{02}}, q_{13} = \frac{p_{13}}{p_{01}p_{03}}, q_{23} = \frac{p_{23}}{p_{02}p_{03}}.$$

Legg merke til at de nye koordinatene er nesten de samme som Cremona-koordinatene

$$q_{01} = w_1, q_{02} = w_2, q_{03} = w_3$$

og

$$q_{12} = y_1 - y_2\,, q_{13} = y_1 - y_3\,, q_{23} = y_2 - y_3$$

og dersom en deler Plücker relasjonen

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} \;=\; 0$$

på $p_{01}p_{02}p_{03}$ blir denne til en lineær relasjon

$$q_{23} - q_{13} + q_{12} \;=\; 0\,.$$

La $\ell$ være en linje med punkt og retningsvektor gitt ved henholdsvis første og andre rad i matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & -p_{12} & -p_{13} \\ 1 & p_{02} & p_{03} \end{pmatrix}$$

To lineære ligninger som bestemmer linja $\ell$ er da

$$b_2(\ell) = \frac{p_{12}}{p_{02}} - x_1 + \frac{1}{p_{02}} x_2 = q_{12} - x_1 + q_{02} x_2$$

og

$$b_3(\ell) = \frac{p_{13}}{p_{03}} - x_1 + \frac{1}{p_{03}} x_3 = q_{13} - x_1 + q_{03} x_3$$

# En hyperboloide

Gitt 2 linjer $\ell_1, \ell_2$, danner vi matrisen

$$M(\Gamma) = \begin{pmatrix} b_2(\ell_1) & b_3(\ell_1) \\ b_2(\ell_2) & b_2(\ell_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{12} - x_1 + q_{02}x_2 & q_{13} - x_1 + q_{03}x_3 \\ q'_{12} - x_1 + q'_{02}x_2 & q'_{13} - x_1 + q'_{03}x_3 \end{pmatrix}$$

og determinanten til denne matrisen definerer den hyperboloiden som linjene mellom $\ell_1$ og $\ell_2$ ligger på.

Hva kan dette brukes til?

# Helly's setning (1923)

## Setning

*Hvis der er et felles punkt for hvert utvalg av 3 i en mengde av konvekse delmengder i planet, da har hele familien av konvekse mengder et felles punkt.*

## Eksempel

*Hvis der er et felles punkt for hvert utvalg av 3 i en mengde av linjestykker i planet, da har hele familien av linjestykker et felles punkt.*

# Helly's setning (1923)

## Setning

*Hvis der er et felles punkt for hvert utvalg av 4 i en mengde av konvekse delmengder i rommet, da har hele familien av konvekse mengder et felles punkt.*

## Eksempel

*Hvis der er et felles punkt for hvert utvalg av 4 i en mengde av terninger i rommet, da har hele familien av terninger et felles punkt.*

# Santalo's setning (1940)

## Setning

*Hvis hvert utvalg av 6 (eller færre) rektangler i en samling parallelle rektangler i planet har en linje som treffer alle, så fins det en linje som treffer alle rektanglene i samlingen.*

(Rektanglene er parallelle dersom en kan velge koordinater slik at alle sidene er parallelle med koordinataksene. )

Grünbaum har vist at 6 er best mulig. Det fins 6 kvadrater, slik at hvert utvalg av 5 treffes av ei linje, men ikke alle 6.

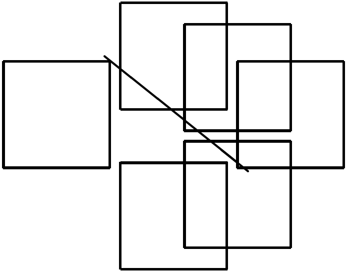

Figure: Grünbaums eksempel

$6 = 2 \cdot 3$

2 angir antall mulige fortegn til stigningstallet

3 er en mer en dimensjonen til mengden av linjer i planet.

Dersom vi kan finne et plan som parametriserer linjer med positivt stigningtall, så er Santalo's setning en variant av Helly's setning.

# Santalo's setning for stigende linjer

## Setning

*Hvis hvert utvalg av* 5 *i en samling av akse-parallelle bokser i rommet har en stigende linje som treffer alle, så har hele samlingen av bokser en stigende linje som treffer alle.*

hint: mengden av stigende linjer danner en konveks mengde i et 4-dimensionalt rom.

Takk for oppmerksomheten