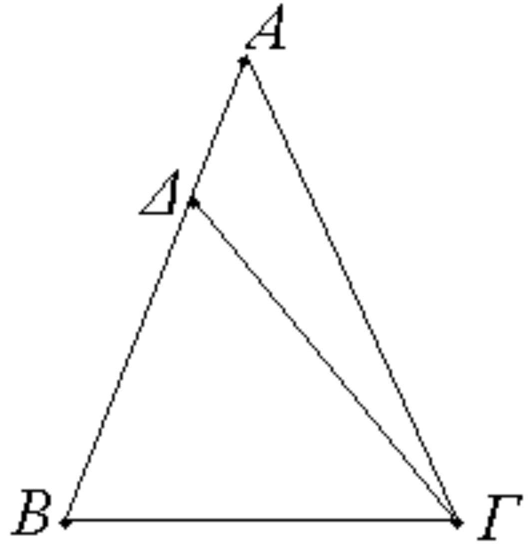
Om å lese i matematikk

Kristian Ranestad (UiO)

Faglig Pedagogisk dag 1.11.2012

Euclid (300 BC)

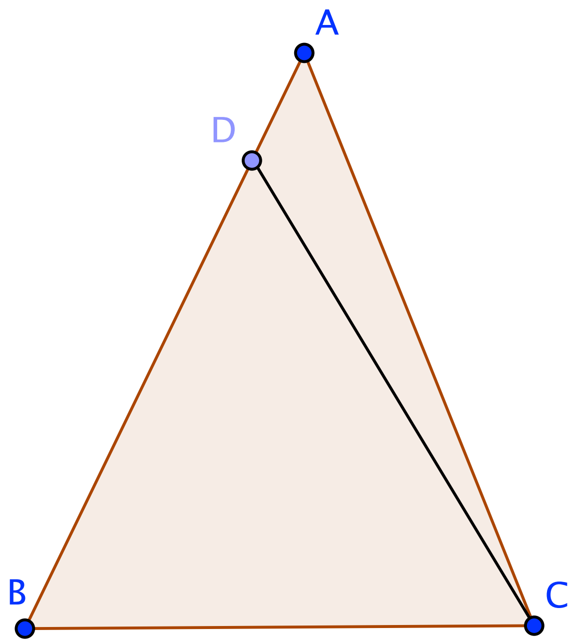


- **Πρότασις ς΄. [6]**

- ***Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις***
- ***ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίαις ὑποτείνουσαι***
- ***πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.***

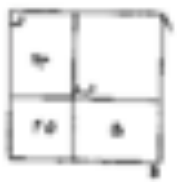
- Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν
- τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ πλευρᾷ
- τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση. Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάττονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα. Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

- **Proposition 6**
  If in a triangle two angles equal one another, then the sides opposite the equal angles also equal one another.

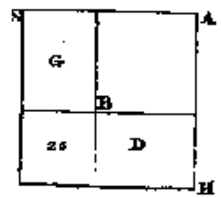


- Let *ABC* be a triangle having the angle *ABC* equal to the angle *ACB.*
- I say that the side *AB* also equals the side *AC.*
- If *AB* does not equal *AC,* then one of them is greater.
- Let *AB* be greater. Cut off *DB* from *AB* the greater equ
- Since *DB* equals *AC,* and *BC* is common, therefore the two sides *DB* and *BC* equal the two sides *AC* and *CB* respectively, and the angle *DBC* equals the angle *ACB.* Therefore the base *DC* equals the base *AB,* and the triangle *DBC* equals the triangle *ACB,* the less equals the greater, which is absurd. Therefore *AB* is not unequal to *AC,* it therefore equals it.
- Therefore *if in a triangle two angles equal one another, then the sides opposite the equal angles also equal one another.*

Al Khwarizmi (830)



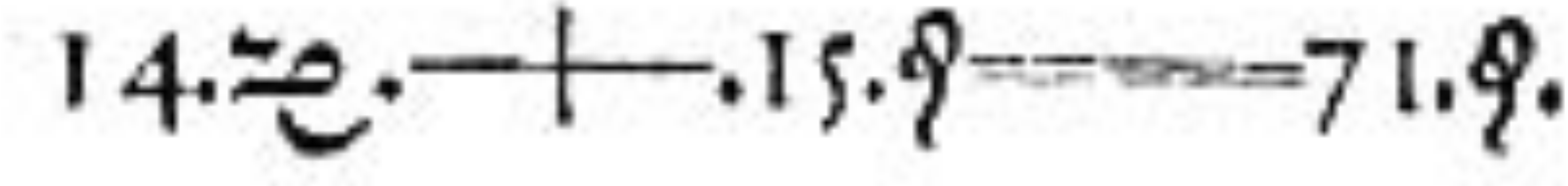
the first quadrate, which is the square, and the two quadrangles on its sides, which are the ten roots, make together thirty-nine. In order to complete the great quadrate, there wants only a square of five multiplied by five, or twenty-five. This we add to thirty-nine, in order to complete the great square S H. The sum is sixty-four. We extract its root, eight, which is one of the sides of the great quadrangle. By subtracting from this the same quantity which we have before added, namely five, we obtain three as the remainder. This is the side of the quadrangle A B, which represents the square; it is the root of this square, and the square itself is nine. This is the figure:—



*Demonstration of the Case: "a Square and twenty-one Dirhems are equal to ten Roots."**

We represent the square by a quadrate A D, the length of whose side we do not know. To this we join a parallelogram, the breadth of which is equal to one of the sides of the quadrate A D, such as the side H N. This parallelogram is H B. The length of the two

Robert Recorde (1557)



$$14x+15=71$$

Første ligning i symbolspråk

Wiles 1994

PROPOSITION 1.5.

$$\begin{aligned} H^1_{\mathrm{Se}^*}(\mathbf{Q}_p, W^*_{\lambda^n}) &= \varphi_w^{-1}(X_{n,i}), \\ H^1_{\mathrm{Se}^*}(\mathbf{Q}_p, V^*_{\lambda^n}) &= \varphi_v^{-1}(Y_{n,i}). \end{aligned}$$

Proof. This can be checked by dualizing the sequence

$$\begin{aligned} 0 \quad &\to \quad H^1_{\mathrm{Str}}(\mathbf{Q}_p, W_{\lambda^n}) \to H^1_{\mathrm{Se}}(\mathbf{Q}_p, W_{\lambda^n}) \\ &\to \quad \ker : \{H^1(\mathbf{Q}_p, W_{\lambda^n}/(W_{\lambda^n})^0) \to H^1(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{unr}}, W_{\lambda^n}/(W_{\lambda^n})^0\}, \end{aligned}$$

where $H^1_{\mathrm{str}}(\mathbf{Q}_p, W_{\lambda^n}) = \ker : H^1(\mathbf{Q}_p, W_{\lambda^n}) \to H^1(\mathbf{Q}_p, W_{\lambda^n}/(W_{\lambda^n})^0)$. The first term is orthogonal to $\ker : H^1(\mathbf{Q}_p, W^*_{\lambda^n}) \to H^1(\mathbf{Q}_p, W^*_{\lambda^n}/(W^*_{\lambda^n})^1)$. By the naturality of the cup product pairing with respect to quotients and subgroups the claim then reduces to the well known fact that under the cup product pairing

$$H^1(\mathbf{Q}_p, \boldsymbol{\mu}_{p^n}) \times H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Z}/p^n) \to \mathbf{Z}/p^n$$

the orthogonal complement of the unramified homomorphisms is the image of the units $\mathbf{Z}_p^\times/(\mathbf{Z}_p^\times)^{p^n} \to H^1(\mathbf{Q}_p, \boldsymbol{\mu}_{p^n})$. The proof for V_{λ^n} is essentially the same. $\square$

Sinus (1996)

$$= 1 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot 1 + \sqrt{5} \cdot 1 + \sqrt{10} \cdot 1 + \sqrt{17} \cdot 1 \approx 11{,}9$$

På figuren til høyre på forrige side har vi delt intervallet $[0, 5]$ i ti like store deler og tegnet rektangler som når opp til grafen. Arealet av disse ti rektanglene gir en bedre tilnærming til arealet under grafen til f. Hvert rektangel får bredden Δx, der

$$\Delta x = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Høyden av rektanglene blir $f(0)$, $f(0{,}5)$, $f(1)$ osv. Rektangelet lengst til høyre har høyden $f(4{,}5)$. Arealet A_{10} av de ti rektanglene er

$$\begin{aligned} A_{10} &= f(0) \cdot \Delta x + f(0{,}5) \cdot \Delta x + \ldots + f(4{,}5) \cdot \Delta x \\ &\approx 1 \cdot 0{,}5 + 1{,}12 \cdot 0{,}5 + \ldots + 4{,}61 \cdot 0{,}5 \approx 12{,}9 \end{aligned}$$

Denne summen kan vi skrive ved hjelp av sumsymbolet Σ.

$$A_{10} = \sum_{i=1}^{10} f(x_i)\,\Delta x$$

der $x_i = (i - 1)\,\Delta x$.

Hvis vi deler området i n rektangler, blir bredden av hvert rektangel

$$\Delta x = \frac{5}{n}$$

Hva leser vi i matematikk?

- Et tall
- Et utrykk
- En likning
- En formel
- Et oppsatt regnestykke
- En tekstoppgave
- En utledning
- En løsning
- Et resonnement/argument/bevis
- …….

Hva er spesielt i matematikk?

- Tegn og symboler erstatter ord
- Hele setninger formuleres i symbolspråk

Vi leser tegnene som vanlige ord med en bestemt betydning.

Vi leser formler og likninger som fullstendige setninger.

Formelen for arealet til en sirkel

$$A=\pi r^2$$

Leses: A er lik π ganger r i andre

og betyr: Arealet til en sirkel med radius r er lik π ganger r i andre potens

Einstein's formel

$$E=mc^2$$

Leses: E er lik m c i andre

og betyr: Energien er lik massen ganger kvadratet av lyshastigheten

Regnestykker

$$3+5=8$$

Leses: tre pluss fem er lik åtte

$$4-(5-2)=$$

Leses: fire minus, parantes, fem minus to, parantes slutt, er lik

Bestemte og ubestemte uttrykk

(52-31):3

Leses: Parantes, femtito minus trettien, parantes slutt, delt på tre

3x+11

Leses: Tre ganger x pluss elleve

Rett lesing

- er en forutsetning for forståelse
- erstatter hvert tegn og symbol med ett eller flere ord
- viser den logiske sammenhengen mellom tegnene

En påstand om likhet

32-11=14+7

Leses: Trettito minus elleve er lik fjorten pluss syv (Sant)

31+12=42

Leses: Trettien pluss tolv er lik førtito

(Usant)

Likninger (åpne påstander)

$$3x-53=16$$

Leses: Tre ganger x minus femtitre er lik seksten

$$3x-4=x+5$$

Leses: Tre ganger x minus 4 er lik x pluss 5

For hver verdi av x blir likningen en påstand om likhet

Likningsløsing

- La oss lese en føring/løsning av en likning

- Kan lesingen gi mening til føringen?
- Den forklarer hvordan løsningen er funnet.

Å løse en likning (utfyllende føring)

En løsning til en likning er en verdi (for x) som gjør likningen sann.

Løs likningen: $3x-4=x+5$

Vi finner en løsning steg for steg.

Trekker fra like mye på hver side:

$$3x-4-x=x+5-x$$

og får $2x-4=5$

Likningen: $3x-4=x+5$

Fortsettelse. $2x-4=5$

Legger til like mye på hver side

$$2x-4+4=5+4$$

og får $2x=9$

Deler med like mye på hver side

og får $x=9/2$

Hver ny likning har samme løsning som den likningen vi startet med.

Spesielt gir den siste likningen løsningen!

Setter prøve

For likningen $3x-4=x+5$ med $x=9/2$.

Venstre siden er $3(9/2)-4=27/2-8/2=19/2$

Høyre siden er $9/2+5=9/2+10/2=19/2$

De to sidene har samme verdi, så $x=9/2$ løser likningen.

Å løse en likning -normal føring (matematikk som tekst)

Løs likningen:

$$3x-4 = x+5$$
$$3x-4-x = x+5-x$$
$$2x-4 = 5$$
$$2x-4+4 = 5+4$$
$$2x = 9$$
$$x = 9/2$$

Prøve: Venstre side $3(9/2)-4 = 19/2$

Høyre side $9/2+5 = 19/2$

$x=9/2$ er en løsning til likningen

Lesing som grunnleggende ferdighet I matematikk

Fra læreplanen:

- Å kunne lese i matematikk inneber å tolke og dra nytte av tekstar med matematisk innhald og med innhald frå daglegliv og yrkesliv. Slike tekstar kan innehalde matematiske uttrykk, diagram, tabellar, symbol, formlar og logiske resonnement.

Matematikk som tekst

I stedet for å snakke om tekster med matematisk innhold

har jeg beskrevet matematikk som tekst

Og mener at dette er en forutsetning for å kunne lese og forstå matematisk innhold i andre tekster.

Å kunne lese matematikk som tekst

er for meg en grunnleggende ferdighet, som er helt sentral i matematikkundervisningen.

De andre ferdighetene

Å kunne uttrykke seg muntlig og skriftlig i matematikk handler også helt grunnleggende om å uttrykke matematikk som tekst.

Matematikk utenfor klasserommet

Vi møter matematikk i
tall, formler, tabeller, figurer og diagrammer

ofte som del av en større tekst.

For å forstå matematikken i teksten må en
kunne lese matematikken som tekst.

Takk for oppmerksomheten