Polare trekanter

Kristian Ranestad

Universitetet i Oslo

27. oktober 2011

Pol og polare

Enhetssirkelen har likningen

$$q(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

For hvert punkt $a = (a_1, a_2)$ på sirkelen er tangentlinja til sirkelen definert av likningen

$$p_a(x, y) = a_1 x + a_2 y - 1 = 0$$

For hvert punkt a utenom origo definerer

$$p_a(x, y) = a_1x + a_2y - 1 = 0$$

ei linje i planet.

Linja kalles **polaren** til punktet m.h.p. sirkelen. Punktet kalles **polen** til linja m.h.p. sirkelen.

Punktet a ligger på sin polare

$$p_a(x, y) = a_1x + a_2y - 1 = 0,$$

det vil si

$$p_a(a) = a_1^2 + a_2^2 - 1 = q(a) = 0$$

hvis og bare hvis punktet også ligger på sirkelen (og polaren er tangent til sirkelen i punktet).

Videre ser vi at dersom $a = (a_1, a_2)$ og $b = (b_1, b_2)$ er to punkter i planet, så er

$$p_a(b) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 - 1 = p_b(a).$$

Det vil si at a ligger på polaren til b hvis og bare hvis b ligger på polaren til a

En trekant i planet med hjørner

$$a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2), c = (c_1, c_2)$$

kalles en **polar trekant** m.h.p. enhetssirkelen dersom hver kant ligger på polaren til det motstående hjørnet. Det vil si

$$p_a(b) = p_b(a) = p_b(c) = p_c(b) = p_a(c) = p_c(a) = 0$$

Setningen om polare trekanter

De tre polarene

$$p_a = a_1x + a_2y - 1, p_b = b_1x + b_2y - 1, p_c = c_1x + c_2y - 1$$

danner en polar trekant mhp enhetssirkelen hvis og bare hvis det fins reelle tall A, B, C slik at

$$x^2 + y^2 - 1 = Ap_a^2 + Bp_b^2 + Cp_c^2.$$

Og, når trekanten er polar mhp enhetssirkelen så er $A = \frac{1}{q(a)}, B = \frac{1}{q(b)}, C = \frac{1}{q(c)}$, det vil si

$$x^2 + y^2 - 1 = \frac{p_a^2}{q(a)} + \frac{p_b^2}{q(b)} + \frac{p_c^2}{q(c)}$$

$$= \frac{(a_1x + a_2y - 1)^2}{a_1^2 + a_2^2 - 1} + \frac{(b_1x + b_2y - 1)^2}{b_1^2 + b_2^2 - 1} + \frac{(c_1x + c_2y - 1)^2}{c_1^2 + c_2^2 - 1}$$

For å vise dette legger jeg til en hjelpevariabel. Egentlig går jeg til det projektive planet, men jeg trenger ikke hele den projektive teorien i mitt bevis.
Min nye variable er z, og jeg homogeniserer alle mine polynomer med denne variabelen og kan gå tilbake med å sette $z = 1$.

Så
$$q = x^2 + y^2 - 1 \quad \mapsto \quad Q = x^2 + y^2 - z^2,$$
$$p_a = a_1 x + a_2 y - 1 \quad \mapsto \quad P_a = a_1 x + a_2 y - z \quad etc$$

$2P_a$ får jeg da fra Q ved partiell derivasjon:

$$(a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z})Q = 2(a_1x + a_2y - z) = 2P_a$$

Tilsvarende partiell derivasjon av $P_b = b_1x + b_2y - z$ gir

$$(a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z})P_b = b_1a_1 + b_2a_2 - 1 = p_b(a)$$

Vi bruker derfor notasjonen

$$D_a = a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

og tilsvarende for D_b of D_c og får

$$D_a(Q) = 2P_a \quad \text{og} \quad D_a(P_b) = p_b(a), \quad etc$$

Så

$$D_a^2(Q) = D_a(2P_a) = 2p_a(a) = 2q(a),$$

$$D_aD_b(Q) = D_a(2P_b) = 2p_b(a)$$

Dersom a, b, c er hjørnene i en trekant så vil hver kvadratiske former i x, y, z være en lineær kombinasjon av kvadratene og produktene $P_a^2, P_a P_b, ..., P_c^2$.
Spesielt er

$$q = x^2 + y^2 - z^2 = k_{aa} P_a^2 + k_{ab} P_a P_b + ...k_{cc} P_c^2$$

for passe valg av koeffisienter.
Siden a, b, c er hjørnene i en **polar** trekant, er

$$D_a D_b(Q) = 2p_b(a) = D_a D_c(Q) = 2p_c(a) = D_c D_b(Q) = 2p_b(c) = 0.$$

Samtidig er

$$D_a^2(Q) = 2q(a), \quad D_b^2(Q) = 2q(b), \quad D_c^2(Q) = 2q(c)$$

alle er ulik 0, siden ingen av hjørnene ligger på sirkelen.

Partiellderiverer vi hvert enkelt produkt P_a^2, P_aP_b, etc får vi

$$D_a^2(P_a^2) = 2p_a^2(a) = 2q(a)^2,$$

$$D_aD_b(P_aP_b) = D_a(p_a(b)P_b + p_b(b)P(a)) = p_b(b)D_a(P_a) = q(a)q(b),$$

$$D_b(P_a^2) = 2p_a(b)P_a = 0$$

og

$$D_b(P_aP_c) = p_a(b)P_c + p_c(b)P_a = 0$$

Så

$$D_aD_b(Q) = k_{ab}q(a)q(b) = 0.$$

Derfor er $k_{ab} = 0$, og tilsvarende $k_{ac} = k_{bc} = 0$

Videre er

$$D_a^2(Q) = 2k_{aa}q(a)^2 = 2q(a)$$

og tilsvarende $D_b^2(Q) = 2q(b)$ og $D_c^2(Q) = 2q(c)$, så

$$k_{aa} = \frac{1}{q(a)}, \quad k_{bb} = \frac{1}{q(b)}, \quad k_{cc} = \frac{1}{q(c)},$$

og

$$Q = \frac{1}{q(a)}P_a^2 + \frac{1}{q(b)}P_b^2 + \frac{1}{q(c)}P_c^2.$$

Ved å sette $z = 1$ får vi

$$q = \frac{1}{q(a)}p_a^2 + \frac{1}{q(b)}p_b^2 + \frac{1}{q(c)}p_c^2.$$

For å fullføre beviset, må vi vise at om polarene $p_a = 0$, $p_b = 0$ og $p_c = 0$ danner en trekant og

$$q = Ap_a^2 + Bp_b^2 + Cp_c^2 = x^2 + y^2 - 1 \quad \text{med} \quad ABC \neq 0$$

så definerer a, b, c en **polar** trekant mhp enhetssirkelen, det vil si at

$$p_a(b) = p_a(c) = p_b(c) = 0.$$

Igjen bruker vi hjelpevariabelen z og får

$$Q = AP_a^2 + BP_b^2 + CP_c^2 = x^2 + y^2 - z^2$$

La $a' = (a'_1, a'_2)$ være skjæringspunktet mellom polarene $p_b = 0$ og $p_c = 0$. Da er

$$2P_{a'} = D_{a'}(Q) = 2Ap_a(a')P_a$$

siden

$$D_{a'}(BP_b^2 + CP_c^2) = 2Bp_b(a')P_b + 2Cp_c(a')P_c = 0.$$

P_a og $P_{a'}$ er derfor proporsjonale. Men det betyr at polarene $p_a = p_{a'}$ og dermed $a = a'$. Tilsvarende følger det at b er skjæringspunktet mellom polarene $p_a = 0$ og $p_c = 0$ og c er skjæringspunktet mellom polarene $p_a = 0$ og $p_b = 0$. Dermed er a, b, c hjørnene i en polar trekant mhp enhetssirkelen.

Et eksempel

Punktene

$$(1,2), \quad (-1,1), \quad (-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

er hjørner i en polar trekant med polarer

$$x+2y-1=0, -x+y-1=0, -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-1=0$$

og

$$\frac{(x+2y-1)^2}{4}+(-x+y-1)^2-\frac{9(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-1)^2}{4}=x^2+y^2-1.$$

Setningen om polare trekanter mhp til enhetssirkelen generaliserer til vilkårlig sirkler, parabler, hyperbler og ellipser.
I hvert tilfelle har polare samme geometriske tolkning.
Som for enhetssirkelen er definisjoner og regning enklest når en bruker hjelpevariabelen z og partiell derivasjon.

I projektiv notasjon avleder vi den opprinnelige likningen for enhetssirkelen som et spesialtilfelle:
$z = 0$ er polaren til origo, og er "linja i det uendelige".
Punktet i det uendelige på $x-$aksen har som polare $y-$aksen, mens punktet i det uendelige på $y-$aksen har som polare $x-$aksen.
Så xyz danner en polar trekant til enhetssirkelen. Q kan skrives $x^2 + y^2 - z^2$ og enhetssirkelen er gitt ved likningen som vi startet med

$$q = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Disse notatene kan snart lastes ned fra web-siden min.
Takk for oppmerksomheten