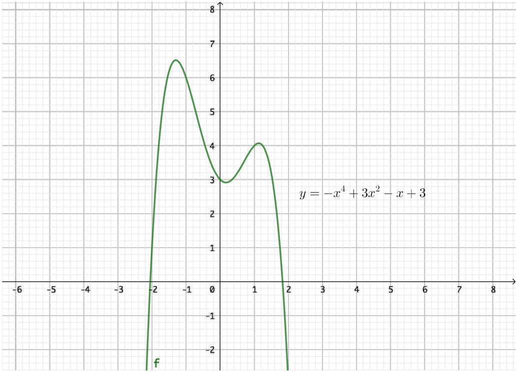
Polynomer, matriser og optimering

Kristian Ranestad (UiO)

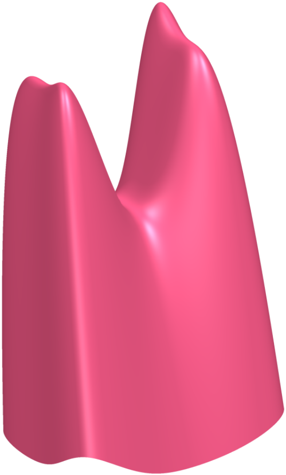
31. Oktober 2019

Optimering

For finne maksimum til en funksjon, deriverer vi og finner kritiske punkter..



I flere variable er prinsippet det samme: for finne maksimum til en funksjon, partiellderiverer vi og finner kritiske punkter..



$$z = 3y^2 - x^4 - x^3y - y^4$$

Optimering med sidebetingelser

Finn maksimum til

$$f(x_1, x_2, x_3)$$

på snittet mellom flatene

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = b_1, \quad g_2(x_1, x_2, x_3) = b_2$$

Optimering med sidebetingelser

Finn maksimum til

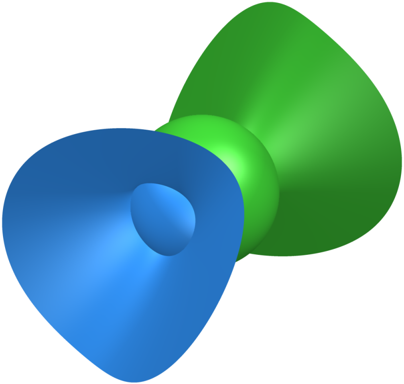
$$f(x_1, x_2, x_3)$$

på snittet mellom flatene

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = b_1, \quad g_2(x_1, x_2, x_3) = b_2$$

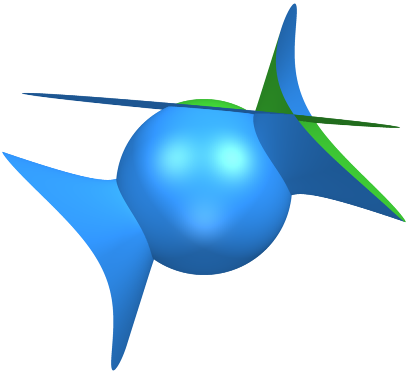
Lagranges metode:
Regn ut de partiellderiverte og finn punktene i snittet der gradientene til g_1, g_2 og f ligger i samme plan.
Gradientene er normalvektorene til flatene og til nivåflaten til f i punktet.

De to flatene for seg



$$g_1 = z^2 + x^2 + x^3y + 0.3y^2 = 1 \quad \text{og} \quad g_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

og sammen med nivåflaten til funksjonen f i kritisk punkt



$$f = 2x + 3y - z$$

$$g_1 = z^2 + x^2 + x^3y + 0.3y^2 = 1 \quad g_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Lineær optimering/programmering

Optimering med lineære sidebetingelser.
Finn maksimum til

$$f(x, y, z)$$

når

$$(x - 5y), (x + 3y - z + 10), (x + 0.34y - 1.83)$$

$$(y + 0.3z - 1), (x - 3), (y + z - 4) > 0$$

$$(x-5y)=(x+3y-z+10)=(x+0.34y-1.83)$$
$$=(y+0.3z-1)=(x-3)=(y+z-4)=0$$

Ulikhetene er oppfyllt i et polytop.

$$(x - 5y) = (x + 3y - z + 10) = (x + 0.34y - 1.83)$$
$$= (y + 0.3z - 1) = (x - 3) = (y + z - 4) = 0$$

Ulikhetene er oppfyllt i et polytop.
Løsning: Finn et hjørne på randa til polytopet og gå langs den kanten fra hjørnet der f vokser raskest. Fortsett til du er i et hjørne der f avtar langs alle kantene i polytopet.

Semidefinite programmering

Optimering med sidebetingelser gitt av **definitte symmetriske matriser**.

En kvadratisk matrise er symmetrisk om den er lik sin transponerte (er symmetrisk om diagonalen):

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & -4 \\ 4 & 14 & -6 & -10 \\ 1 & -6 & 9 & 2 \\ -4 & -10 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

λ er en egenverdi for M dersom $\det(M - \lambda I) = 0$

Fra lineær algebra

En symmetrisk $(n \times n)$-matrise M har n egenverdier (talt med multiplisitet).

$$M \geq 0$$

om alle egenverdiene er ≥ 0 (M er positiv semidefinitt).

Fra lineær algebra

En symmetrisk $(n \times n)$-matrise M har n egenverdier (talt med multiplisitet).

$$M \geq 0$$

om alle egenverdiene er ≥ 0 (M er positiv semidefinitt).

La M_0, M_1, M_2, M_3 være symmetriske matriser, da er

$$M(x, y, z) = M_0 + xM_1 + yM_2 + zM_3 \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

en familie av matriser.

$$\Delta(M) = \{(x, y, z) | 0 \text{ er egenverdi til } M(x, y, z)\}$$

er en flate i $\mathbb{R}^3$,

Fra lineær algebra

En symmetrisk $(n \times n)$-matrise M har n egenverdier (talt med multiplisitet).

$$M \geq 0$$

om alle egenverdiene er ≥ 0 (M er positiv semidefinitt).

La M_0, M_1, M_2, M_3 være symmetriske matriser, da er

$$M(x,y,z) = M_0 + xM_1 + yM_2 + zM_3 \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

en familie av matriser.

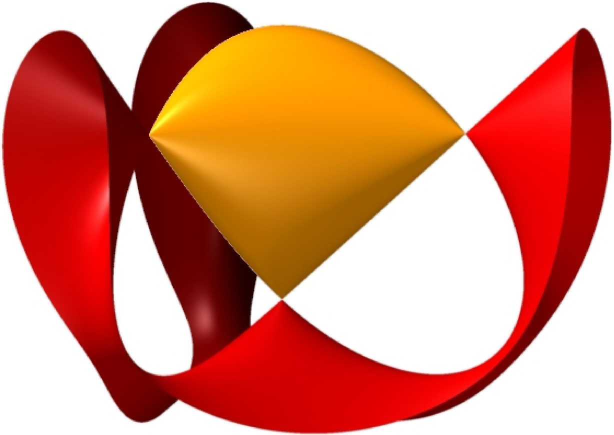
$$\Delta(M) = \{(x,y,z) | 0 \text{ er egenverdi til } M(x,y,z)\}$$

er en flate i $\mathbb{R}^3$, og mengden

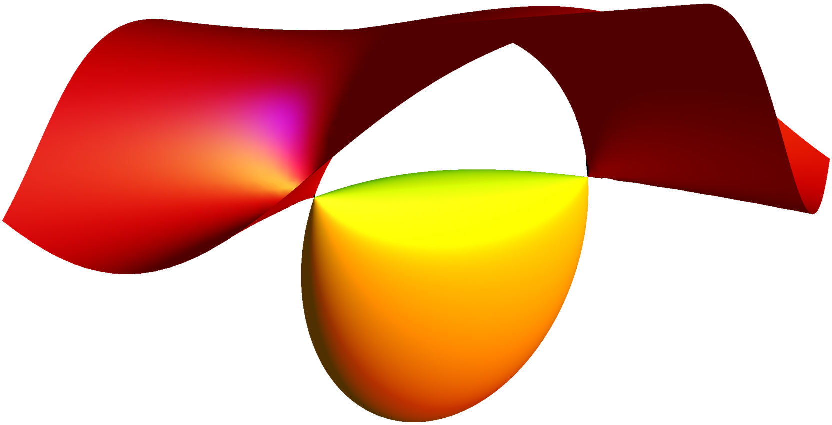
$$S(M) \;=\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, M(x,y,z) \geq 0\}.$$

er konveks!.

En familie av 3×3 matriser

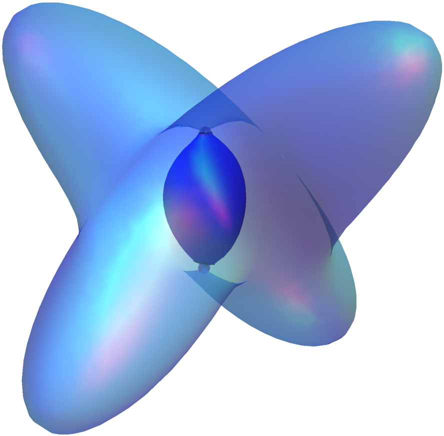


En annen familie av 3×3 matriser



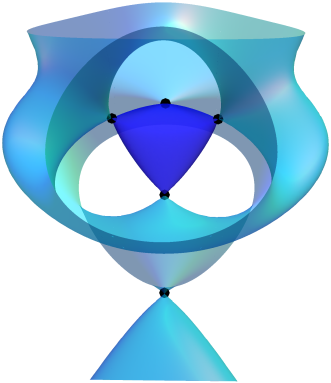
$$(2,2)\ :\quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & -4 \\ 4 & 14 & -6 & -10 \\ 1 & -6 & 9 & 2 \\ -4 & -10 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 17 & -3 & 2 & 9 \\ -3 & 6 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 13 & 10 \\ 9 & 1 & 10 & 17 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & -3 & 9 & 3 \\ -3 & 10 & 6 & -7 \\ 9 & 6 & 18 & -3 \\ 3 & -7 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

(2,2)



$$(6,4)\ :\quad \begin{bmatrix} 6 & -1 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 6 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & -5 & 5 & -3 \\ -5 & 6 & -5 & 5 \\ 5 & -5 & 5 & -3 \\ -3 & 5 & -3 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & -3 & 5 & 2 \\ -3 & 5 & -3 & 2 \\ 5 & -3 & 9 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(6,4)



Skalarprodukt av matriser:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$C \cdot M = c_{11}m_{11} + c_{12}m_{12} + c_{22}m_{22}$$

Semidefinitt programmering

Gitt $n \times n$ symmetriske matriser C og $M_0, M_1, .., M_s$. La

$$M(x_1, ..., x_s) = M_0 + x_1 M_1 + .. + x_s M_s$$

Finn

$$\max C \cdot M(x_1, ..., x_s) \quad \text{når } M(x_1, ..., x_s) \geq 0.$$

Et optimerings problem: Finn Max-Kutt

La G være en graf med hjørner $H(G)$ og kanter $K(G)$, og la

$$v : H(G) \to \{-1, 1\}.$$

Et optimerings problem: Finn Max-Kutt

La G være en graf med hjørner $H(G)$ og kanter $K(G)$, og la

$$v : H(G) \to \{-1, 1\}.$$

La

$$H_v^- = \{h \in H(G) | v(h) = -1\}, \quad H_v^+ = \{h \in H(G) | v(h) = 1\}.$$

Da er

$$H(G) = H_v^- \cup H_v^+.$$

Et optimerings problem: Finn Max-Kutt

La G være en graf med hjørner $H(G)$ og kanter $K(G)$, og la

$$v : H(G) \to \{-1, 1\}.$$

La

$$H_v^- = \{h \in H(G) | v(h) = -1\}, \quad H_v^+ = \{h \in H(G) | v(h) = 1\}.$$

Da er

$$H(G) = H_v^- \cup H_v^+.$$

La $K(G, v)$ være mengden av kanter mellom hjørner i H_v^- og hjørner i H_v^+ og la

$$m(G, v) = \frac{|K(G, v)|}{|K(G)|}.$$

Et optimerings problem: Finn Max-Kutt

La G være en graf med hjørner $H(G)$ og kanter $K(G)$, og la

$$v : H(G) \to \{-1, 1\}.$$

La

$$H_v^- = \{h \in H(G) | v(h) = -1\}, \quad H_v^+ = \{h \in H(G) | v(h) = 1\}.$$

Da er

$$H(G) = H_v^- \cup H_v^+.$$

La $K(G, v)$ være mengden av kanter mellom hjørner i H_v^- og hjørner i H_v^+ og la

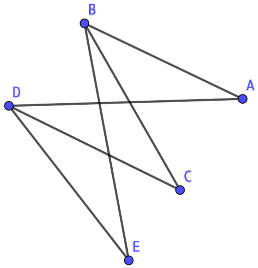
$$m(G, v) = \frac{|K(G, v)|}{|K(G)|}.$$

Max-Kutt til G er

$$m(G) = \max_v m(G, v).$$

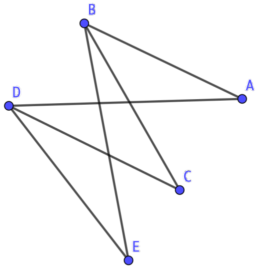
Max-Kutt

Eksempel: Grafen G er **bipartitt**:



Max-Kutt

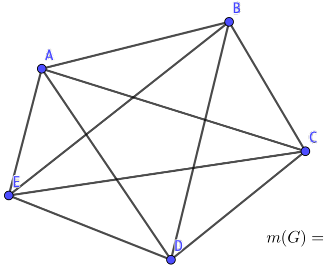
Eksempel: Grafen G er **bipartitt**:



$$m(G) = 1$$

Max-Kutt

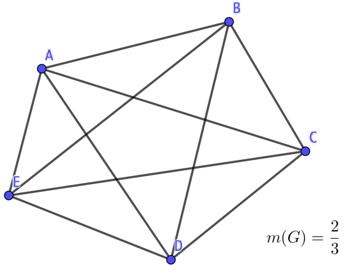
Eksempel: G **komplett** med 5 hjørner:



$m(G) = \frac{2}{3}$

Max-Kutt

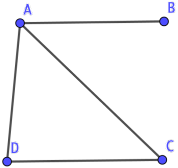
Eksempel: G **komplett** med 5 hjørner:



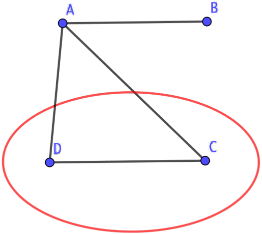
G komplett med n hjørner

$$m(G) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} & \text{hvis } n \text{ er odde} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)} & \text{hvis } n \text{ er jevn} \end{array} \right\}$$

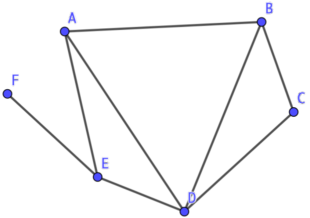
Max-Kutt



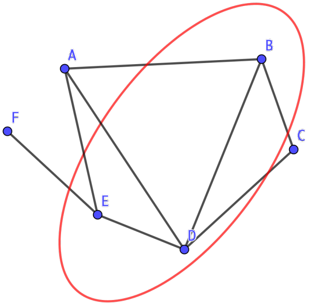
Max-Kutt



Max-Kutt



Max-Kutt



Generalisering

Legg vekter på hver kant:

$$\omega_k \geq 0 \quad k \in K(G),$$

slik at

$$\sum_{k \in K(G)} \omega_k = 1.$$

Generalisering

Legg vekter på hver kant:

$$\omega_k \geq 0 \quad k \in K(G),$$

slik at

$$\sum_{k \in K(G)} \omega_k = 1.$$

For en $v : H(G) \to \{-1, 1\}$. la

$$m(G, v) = \sum_{k \in K(G,v)} \omega_k.$$

Generalisering

Legg vekter på hver kant:

$$\omega_k \geq 0 \quad k \in K(G),$$

slik at

$$\sum_{k \in K(G)} \omega_k = 1.$$

For en $v : H(G) \to \{-1, 1\}$. la

$$m(G, v) = \sum_{k \in K(G,v)} \omega_k.$$

MAX-KUTT til G er

$$m(G) = \max_v m(G, v)$$

For en generell graf er å finne MAX-KUTT eksponensielt vanskelig (NP-komplett).

Semidefinitt programmering gir en veldig god tilnærmet verdi!

La G være en graf med 4 hjørner $\{1, 2, 3, 4\}$ og med vekter $\omega_{ij} \geq 0$ på kanten mellom i og j, der $1 \leq i < j \leq 4$. Da kan vi ordne vektene i en matrise

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} \\ \omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \omega_{24} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & 0 & \omega_{34} \\ \omega_{14} & \omega_{24} & \omega_{34} & 0 \end{bmatrix}.$$

La G være en graf med 4 hjørner $\{1,2,3,4\}$ og med vekter $\omega_{ij} \geq 0$ på kanten mellom i og j, der $1 \leq i < j \leq 4$. Da kan vi ordne vektene i en matrise

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} \\ \omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \omega_{24} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & 0 & \omega_{34} \\ \omega_{14} & \omega_{24} & \omega_{34} & 0 \end{bmatrix}.$$

En funksjon $v : H(G) \to \{-1,1\}$ kan representeres av en vektor $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ der hver $v_i = \pm 1$.

MAX KUTT er da

$$m(G) = \max_v m(G,v) = \max_v \Big(\sum_{i,j} \omega_{ij}\Big(\frac{1 - v_i v_j}{4}\Big)\Big)$$

Vi kan skrive $m(G, v) = (\sum_{i,j} \omega_{ij}(\frac{1-v_i v_j}{4}))$ med matriser:

Vi kan skrive $m(G,v) = (\sum_{i,j} \omega_{ij}(\frac{1-v_iv_j}{4}))$ med matriser:
La

$$L(G) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \omega_{12}+\omega_{13}+\omega_{14} & -\omega_{12} & -\omega_{13} & -\omega_{14} \\ -\omega_{12} & \omega_{12}+\omega_{23}+\omega_{24} & -\omega_{23} & -\omega_{24} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & \omega_{13}+\omega_{23}+\omega_{34} & -\omega_{34} \\ -\omega_{14} & -\omega_{24} & -\omega_{34} & \omega_{14}+\omega_{24}+\omega_{34} \end{bmatrix}$$

og

$$M(v) = vv^T = \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1v_2 & v_1v_3 & v_1v_4 \\ v_1v_2 & v_2^2 & v_2v_3 & v_2v_4 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & v_3^2 & v_3v_4 \\ v_1v_4 & v_2v_4 & v_3v_4 & v_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & v_1v_2 & v_1v_3 & v_1v_4 \\ v_1v_2 & 1 & v_2v_3 & v_2v_4 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & 1 & v_3v_4 \\ v_1v_4 & v_2v_4 & v_3v_4 & 1 \end{bmatrix}$$

Da er

$$m(G,v) = L(G) \cdot M(v)$$

Max Kutt med SDP

$$m(G) = \max_v m(G, v)$$

$$= \max L(G) \cdot M(v) \quad \text{når } v = (v_1, v_2, v_3, v_4),\ v_i = \pm 1$$

Max Kutt med SDP

$$m(G) = \max_v m(G,v)$$
$$= \max L(G)\cdot M(v) \quad \text{når } v = (v_1, v_2, v_3, v_4),\ \ v_i = \pm 1$$

$M(v)$ er semidefinitt.

Max Kutt med SDP

$$m(G) = \max_v m(G, v)$$
$$= \max L(G) \cdot M(v) \quad \text{når } v = (v_1, v_2, v_3, v_4), \; v_i = \pm 1$$

$M(v)$ er semidefinitt.

Dette blir en SDP om vi tillater vilkårlige semidefinitte 4×4 matriser M (med 1 i diagonalen) is stedet for $M(v)$:

$$\max L(G) \cdot M, \quad \text{med } M \geq 0$$

Max Kutt med SDP

$$m(G) = \max_v m(G, v)$$
$$= \max L(G) \cdot M(v) \quad \text{når } v = (v_1, v_2, v_3, v_4),\ v_i = \pm 1$$

$M(v)$ er semidefinitt.

Dette blir en SDP om vi tillater vilkårlige semidefinitte 4×4 matriser M (med 1 i diagonalen) is stedet for $M(v)$:

$$\max L(G) \cdot M, \quad \text{med } M \geq 0$$

Denne SDP-en kan løses effektivt og gir en god tilnærmet verdi SDPMAX på MAX KUTT:

$$0.87856 \text{ SDPMAX} \leq \text{MAX KUTT} \leq \text{SDPMAX}$$

Anvendelser

MAX-KUTT: Statistisk fysikk (Ising modellen), design av veldig store integrererte kretser (med millioner av transistorer)

SDP: Kombinatoriske optimeringsproblemer

Takk for oppmerksomheten