LØSNINGSFORSLAG TIL OBLIG 2 FOR MA 001

Oppgave 1

(a) Blandingstemperaturen blir $T_b = (150 \cdot 68 + 10 \cdot 4)/(150 + 10) = 64°\text{C}$.

(b) $T(0) = T_r + (T_0 - T_r) \cdot 1 = T_0$ så T_0 er temperaturen etter 0 minutter. Vi har $(1/2)^{(t+h)/h} = (1/2) \cdot (1/2)^{t/h}$, så $T(t+h) - T_r = (1/2)(T(t) - T_r)$, dvs. h er halveringstiden for differansen mellom temperaturen i kaffen og romtemperaturen.

(c) Setter inn $T_0 = 64$, $T_r = 20$, $t = 10$ og $T(10) = 42$ og får $42 = 20 + (64 - 20)(1/2)^{10/h}$, som gir $(1/2)^{10/h} = (42-20)/(64-20) = 22/44 = 1/2$. Så $10/h = 1$ og $h = 10$ minutter.

Etter $t = 20$ minutter er temperaturen $T(20) = 20 + (64 - 20)(1/2)^{20/10} = 20 + 44(1/2)^2 = 31°\text{C}$.

(d) Setter inn $T_0 = 68$ (uten melk), $T_r = 20$, $t = 20$ og $h = 10$ og får at temperaturen er $T(20) = 20 + (68 - 20)(1/2)^{20/10} = 20 + 48(1/2)^2 = 32°\text{C}$.

(e) Blandingstemperaturen er $T_b = (150 \cdot 32 + 10 \cdot 4)/(150 + 10) = 4840/160 = 30.25°\text{C}$. Etter 20 minutter er derfor student A's kopp kaffe med melk varmest.

Oppgave 2

(a) Deriverer $F(t)$ med hensyn på t og får $F'(t) = -(a/k) \cdot 1 \cdot e^{-kt} - (a/k) \cdot t \cdot (-ke^{-kt}) - (a/k^2)(-ke^{-kt}) - (b/\ell)(-\ell e^{-\ell t}) = ate^{-kt} + be^{-\ell t} = f(t)$. Altså er $F(t)$ en antiderivert til $f(t)$.

(b) Setter inn og får $f(0) = 2.0 \cdot 10^5 \cdot 0 \cdot e^{-1.0 \cdot 0} + 2.0 \cdot 10^4 \cdot e^{-0.1 \cdot 0} = 0 + 2.0 \cdot 10^4 \cdot 1 = 2.0 \cdot 10^4$.

I grensen er $\lim_{t\to\infty} f(t) = a \lim_{t\to\infty} t(e^{-k})^t + b \lim_{t\to\infty} (e^{-\ell})^t = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$.

(c) $V(t)$ er en antiderivert til $f(t)$, så $V(t) = F(t) + C$ for en konstant C. Siden $V(0) = 0$ må $C = -F(0) = (a/k) \cdot 0 \cdot e^{-k \cdot 0} + (a/k^2) \cdot e^{-k \cdot 0} + (b/\ell)e^{-\ell \cdot 0} = 0 + (a/k^2) + (b/\ell) = 2.0 \cdot 10^5/1.0^2 + 2.0 \cdot 10^4/0.1 = 4.0 \cdot 10^5$. Dette gir

$$\begin{aligned} V(t) &= (a/k^2) + (b/\ell) - (a/k)te^{-kt} - (a/k^2)e^{-kt} - (b/\ell)e^{-\ell t} \\ &= 4.0 \cdot 10^5 - 2.0 \cdot 10^5 te^{-1.0t} - 2.0 \cdot 10^5 e^{-1.0t} - 2.0 \cdot 10^5 e^{-0.1t}. \end{aligned}$$

(d) Har valgt C slik at $V(0) = 0$.

I grensen er

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} V(t) &= (a/k^2) + (b/\ell) - (a/k) \lim_{t\to\infty} te^{-kt} - (a/k^2) \lim_{t\to\infty} e^{-kt} - (b/\ell) \lim_{t\to\infty} e^{-\ell t} \\ &= (a/k^2) + (b/\ell) - 0 - 0 - 0 = (a/k^2) + (b/\ell) = 4.0 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

(e) $V'(t) = f(t) > 0$ så V er strengt voksende. Etter $t = 20$ timer er derfor $V(20) < \lim_{t\to\infty} V(t) = 4.0 \cdot 10^5$. Etter t timer er det tappet ut ct m^3 vann, så etter 20 timer er det tappet ut $2.0 \cdot 10^4 \cdot 20 = 4.0 \cdot 10^5$ m^3 vann. Dette er mer enn $V(20)$, så reservoaret er tømt innen 20 timer.

Oppgave 3

(a) Regner ut

$$\begin{aligned} f_t(x) &= 4\cos x + 3\cos(x-t) \\ &= 4\cos x + 3\cos x\cos t + 3\sin x \sin t \\ &= (4+3\cos t)\cos x + (3\sin t)\sin x\,. \end{aligned}$$

Her er $(4+3\cos t)\cos x + (3\sin t)\sin x = C\cos(x-x_0)$ når (C, x_0) er polarkoordinatene til $(4{+}3\cos t, 3\sin t)$. Så $C \geq 0$ oppfyller $C^2 = (4{+}3\cos t)^2 + (3\sin t)^2 = 16 + 24\cos t + 9\cos^2 t + 9\sin^2 t = 16 + 24\cos t + 9 = 25 + 24\cos t$, dvs. $C = \sqrt{25+24\cos t}$. Videre må $\tan x_0 = (3\sin t)/(4+3\cos t)$.

(b) Deriverer ved brøkregelen

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{(3\cos t)(4+3\cos t) - (3\sin t)(0-3\sin t)}{(4+3\cos t)^2} \\ &= \frac{12\cos t + 9\cos^2 t + 9\sin^2 t}{(4+3\cos t)^2} = \frac{3(4\cos t+3)}{(4+3\cos t)^2}\,. \end{aligned}$$

Nevneren er alltid positiv, så $g'(t)$ har samme fortegn som $h(t) = 4\cos t + 3$. Her er $4\cos t + 3 = 0$ hvis $\cos t = -3/4$, dvs. for $t = \cos^{-1}(-3/4) = \pi - \cos^{-1}(3/4) \approx 2.419$. Siden $\cos t$ er strengt avtagende for $0 \leq t \leq \pi$ er $g'(t) > 0$ for $0 \leq t < \cos^{-1}(-3/4)$ og $g'(t) < 0$ for $\cos^{-1}(-3/4) < t \leq \pi$. Derfor er $g(t)$ voksende på intervallet $[0, \cos^{-1}(-3/4)]$ og avtagende på intervallet $[\cos^{-1}(-3/4), \pi]$.

(c) $g(t)$ har maksimum for $t = \cos^{-1}(-3/4)$, der g skifter fra å være voksende til å være avtagende. Her er $\sin t = +\sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-(-3/4)^2} = \sqrt{7}/4$. Maksimumsverdien er $g(t) = 3\sin t/(4+3\cos t) = (3\sqrt{7}/4)/(4+3(-3/4)) = 3\sqrt{7}/(16-9) = 3\sqrt{7}/7 \approx 1.134$.

(d) For $t = \cos^{-1}(-3/4)$ er $g(t)$ maksimal. Fra (a) finner vi $C = \sqrt{25+24\cos t} = \sqrt{25+24(-3/4)} = \sqrt{7} \approx 2.646$ og $\tan x_0 = g(t) = 3\sqrt{7}/7$, så $x_0 = \tan^{-1}(3\sqrt{7}/7) \approx 0.848$. Koordinatene er $(\tan^{-1}(3\sqrt{7}/7), \sqrt{7})$.

Oppgave 4

(a) Gitt $5 = c\cdot 4^r$ og $2 = c \cdot 25^r$ fås $5/2 = (c\cdot 4^r)/(c\cdot 25^r) = (4/25)^r$, dvs. $\log(5/2) = r\log(4/25)$ eller $r = \log(5/2)/\log(4/25) = -1/2$. Da er $c = 5/4^{(-1/2)} = 5/(1/2) = 10$. Vi har $\log y = \log c + r\log x$ så $\log y$ er en lineær funksjon av $\log x$ og grafen til y som funksjon av x blir en rett linje i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem, men ikke i et rettvinklet lineært eller et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

(b)

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos 2h}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{0+2\sin 2h}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{4\cos 2h}{2} = 2\cos 0 = 2\,.$$

(c) Det ubestemte integralet er

$$\int \sin^4 x\cos x\,dx = \int g(x)^4 g'(x)\,dx = \int u^4\,du = (1/5)u^5 + C = (1/5)\sin^5 x + C\,.$$

Så

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x\cos x\,dx = \big[(1/5)\sin^5 x\big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = (1/5)1^5 - (1/5)(-1)^5 = 2/5\,.$$

Matematisk institutt, Universitetet i Oslo