Obligatorisk oppgave nr. 1 for MA 001 høsten 2000

Hver student som (for første gang) er oppmeldt til eksamen i MA 001 høsten 2000 leverer en individuell besvarelse på disse oppgavene til sin gruppelærer. Denne retter og godkjenner de som tilsvarer en bestått karakter (4.0 eller bedre). Husk å skrive ditt fulle navn og hvilken MA 001 gruppe du følger på besvarelsen. Ikke godkjente besvarelser kan forbedres og leveres på ny, i tide til at de kan rettes ferdig innen to uker før eksamen.

Første innleveringsfrist er fredag 6. oktober 2000.

Oppgave 1

Med absolutt temperatur mener vi temperatur målt i Kelvin (K). Temperaturen x °C er lik temperaturen (x + 273.15) K. Et svart legeme er en gjenstand som absorberer all strålingsenergien som treffer det. Etter Stefans lov er varmeutstrålingen (P) fra et svart legeme proporsjonal med 4. potens av dets absolutte temperatur (T):

$$P = a\,T^4$$

der a er en proporsjonalitetskonstant.

(a) Et svart legeme oppvarmes fra 20.0 °C til 40.0 °C. Finn den prosentvise økningen i absolutt temperatur. Finn så den prosentvise økningen i varmeutstrålingen. Gi svarene med en fornuftig avrunding.

(b) Et annet svart legeme oppvarmes fra 20.0 °C inntil varmeutstrålingen er fordoblet. Finn legemets nye temperatur, målt i °C. Gi svaret med en fornuftig avrunding.

Oppgave 2

Julenissens verksted skal i år produsere x harde og y myke pakker, som siden skal leveres med reinsdyrslede. Hver hard pakke tar 2 dager å lage, veier 2 kg og har volum 1 liter. Hver myk pakke tar også 2 dager å lage, veier 1 kg og har volum 3 liter. Produksjonen er underlagt følgende betingelser:

1. verkstedet er åpent 360 dager dette året,
2. sleden kan frakte 300 kg pakker, og
3. sleden kan romme pakker med et samlet volum på 400 liter.

(a) Still opp 5 ulikheter som x og y må oppfylle for at det skal la seg gjøre å produsere og levere x harde og y myke pakker. Forklar hvilke ulikheter som svarer til hvilke betingelser.

(b) Skraver det området i xy-planet der x og y oppfyller disse 5 ulikhetene. Finn x- og y-koordinatene til de av områdets hjørner som ligger i 1. kvadrant. (Hint: x-koordinatene er henholdsvis 70 og 120.)

(c) En gammel julenissetommelfingerregel anslår at mottakerene setter dobbelt så stor pris på myke pakker som harde pakker. Hvis det leveres x harde og y myke pakker anslås mottakergleden å være gitt ved funksjonen:

$$f(x, y) = x + 2y$$

Finn antallet harde og myke pakker som kan produseres og leveres og som gjør den antatte mottakergleden f størst.

(d) En nyere markedsanalyse (av innsendte ønskelister) viser at mottakergleden er bedre tilnærmet ved funksjonen:

$$g(x, y) = 1.4x + 1.2y$$

Finn antallet harde og myke pakker som kan produseres og leveres og som gjør den justerte mottakergleden g størst.

Oppgave 3

En bølge i xy-planet er ved tidspunktet t gitt som grafen til funksjonen

$$f_t(x) = 4\cos(x) + 3\cos(x-t)\ .$$

For hver verdi av t beskriver $f_t(x)$ en harmonisk svingning i xy-planet. Ettersom t vokser beveger denne bølgen seg i xy-planet.

(a) Finn middelverden, amplituden, perioden og akrofasen til $f_t(x)$ når $t=0$.

(b) Finn middelverden, amplituden, perioden og akrofasen til $f_t(x)$ når $t=\pi/2$.

(c) Finn middelverden, amplituden, perioden og akrofasen til $f_t(x)$ når $t=\pi$.

(d) Lag en skisse av grafen til $f_t(x)$ for $t=0$, $t=\pi/2$ og $t=\pi$ i samme xy-koordinatsystem. Skissen skal illustrere verdiene du har beregnet i (a), (b) og (c).

(e) Vis at for t mellom 0 og π har $f_t(x)$ størst akrofase for den verdien av t som gjør uttrykket

$$3\sin(t) / (4 + 3\cos(t))$$

størst.

John Rognes / 18. september 2000