Oppgave 1.

(a) Finn de komplekse røttene til polynomet $z^6 - 1$. Vis med en skisse hvor disse røttene ligger i det komplekse planet.

(b) Gi en faktorisering av $x^6 - 1$ som et produkt av reelle første– og annengrads polynomer.

Oppgave 2.

Finn den generelle løsningen til differenslikningen

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 4 \cdot 2^n + 3.$$

Oppgave 3.

La

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$$

være definert for alle reelle tall x slik at $x^3 - 3x \geq 0$.

(a) Hva er definisjonsmengden D_f til f ? Bestem nullpunktene til f.

(b) Avgjør hvor f er voksende, og hvor f er avtagende. Finn det lokale maksimumspunktet til f.

(c) Finn

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}^+} f'(x), \quad \lim_{x \to 0^-} f'(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x \to \sqrt{3}^+} f'(x).$$

Har f noen asymptoter ? Begrunn svaret.

Skisser grafene til $y = f(x)$ og $y = -f(x)$ i samme koordinatsystem.

(Dette er kurven av punkter (x, y) i xy-planet slik at $y^2 = x^3 - 3x$.)

(d) Hva er det største mulige antall skjæringspunkter mellom kurven $y^2 = x^3 - 3x$ og en vilkårlig linje $y = ax + b$, der a og b er reelle tall ? Begrunn svaret.

Oppgave 4.

(a) Bestem integralet

$$\int t\sqrt{1 - t^2}\, dt.$$

(b) Bestem integralet

$$\int \sqrt{1 - t^2}\, dt.$$

(Hint: Substituer $t = \sin u$.)

(c) La

$$g(x) = \sqrt{1 - (x - 2)^2}$$

for $x \in [1, 3]$. Området mellom grafene til $y = g(x)$ og $y = -g(x)$ danner en sirkelskive med radius 1 og sentrum i punktet $(2, 0)$ i xy-planet.

Finn volumet til omdreiningslegemet som fremkommer ved å rotere denne sirkelskiven om y-aksen.

Oppgave 5.

(a) Vis at

$$\int \frac{2}{\cos t}\, dt = \ln\left(\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}\right) + C,$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

f. eks. ved å derivere høyresiden.

(b) Finn alle løsningene $y = y(x)$ av differensiallikningen

$$y' = \frac{1}{2}\cos y$$

med $-\pi/2 < y(x) < \pi/2$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) La $y = y(x)$ være en løsning av differensiallikningen i (b). Finn

$$\lim_{x\to\infty} y(x) \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to-\infty} y(x).$$

Oppgave 6.

(a) Forklar hvorfor

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$$

er Taylor–rekken til $\cos(x^2)$. Finn konvergensområdet til rekken.

(b) Beregn integralet

$$\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$$

med en nøyaktighet bedre enn 10^{-3}. (Du kan gi svaret som en brøk eller et desimaltall.) Forklar hvorfor du vet at du har oppnådd den ønskede nøyaktigheten.