LØSNINGSFORSLAG MA 100 EKSAMEN

Oppgave 1.

(a) Røttene til polynomet $z^6 - 1$ løser likningen $z^6 = 1$, dvs. de er sjetterøttene til 1. Vi skriver $1 = 1e^{i\cdot 0}$ på polarform, og finner løsningene

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[6]{1}e^{i\cdot 0/6} = 1, \\
w_1 &= \sqrt[6]{1}e^{i\cdot 2\pi/6} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = 1/2 + i\sqrt{3}/2, \\
w_2 &= \sqrt[6]{1}e^{i\cdot 4\pi/6} = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = -1/2 + i\sqrt{3}/2, \\
w_3 &= \sqrt[6]{1}e^{i\cdot 6\pi/6} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1, \\
w_4 &= \sqrt[6]{1}e^{i\cdot 8\pi/6} = \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3) = -1/2 - i\sqrt{3}/2, \\
w_5 &= \sqrt[6]{1}e^{i\cdot 10\pi/6} = \cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.
\end{aligned}$$

(En skisse som viser seks punkter i et regulært heksagon på enhetssirkelen.)

(b) Vi har en faktorisering av $x^6 - 1$ som et produkt av komplekse førstegradsfaktorer:

$$(x - w_0)(x - w_1)(x - w_2)(x - w_3)(x - w_4)(x - w_5)$$

Vi ganger sammen faktorene som svarer til konjugerte par av røtter, dvs.

$$\begin{aligned}
(x - w_1)(x - w_5) &= (x - 1/2 - i\sqrt{3}/2)(x - 1/2 + i\sqrt{3}/2) = (x^2 - x + 1), \\
(x - w_2)(x - w_4) &= (x + 1/2 - i\sqrt{3}/2)(x + 1/2 + i\sqrt{3}/2) = (x^2 + x + 1).
\end{aligned}$$

Dermed finner vi den reelle faktoriseringen

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^2 - x + 1)(x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Oppgave 2.

Vi løser først den tilhørende homogene differenslikningen

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 0$$

som har karakteristisk likning $r^2 + r - 2 = 0$, med røtter $r = (-1 \pm \sqrt{1+8})/2$ lik $r_1 = -2$ og $r_2 = 1$. Dermed er den generelle løsningen

$$x_n^h = C(-2)^n + D(1)^n = C(-2)^n + D$$

med $C, D \in \mathbb{R}$.

For å finne en partikulær løsning til den inhomogene differenslikningen

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 4 \cdot 2^n + 3$$

prøver vi en løsning på formen

$$x_n^p = A \cdot 2^n + B \cdot n$$

der vi prøver $B \cdot n$ i stedet for B siden den konstante løsningen D løser den homogene likningen. Setter inn

$$\begin{aligned} x_{n+2}^p + x_{n+1}^p - 2x_n^p &= A2^{n+2} + B(n+2) + A2^{n+1} + B(n+1) - 2A2^n - 2Bn \\ &= (4A + 2A - 2A)2^n + (B + B - 2B)n + (2B + B) = 4A2^n + 3B \end{aligned}$$

som er lik $4 \cdot 2^n + 3$ dersom $A = 1$ og $B = 1$.

Altså er

$$x_n = x_n^p + x_n^h = 2^n + n + C(-2)^n + D$$

den generelle løsningen.

Oppgave 3.

(a) f er definert der $x^3 - 3x = x(x^2 - 3) \geq 0$, dvs. der hvor $x \geq 0$ og $x^2 - 3 \geq 0$, og der hvor $x \leq 0$ og $x^2 - 3 \leq 0$. De første ulikhetene er oppfylt når $x \geq \sqrt{3}$, mens de andre holder når $-\sqrt{3} \leq x \leq 0$. Så

$$D_f = [-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, \infty).$$

Funksjonen f er null der $x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = 0$, dvs. for $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ og for $x = \sqrt{3}$.

(b) Deriverer $f(x) = (x^3 - 3x)^{1/2}$ ved kjerneregelen, og finner

$$f'(x) = (1/2)(x^3 - 3x)^{-1/2}(3x^2 - 3) = \frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{x^3 - 3x}}.$$

Her er nevneren positiv eller null, og telleren har samme fortegn som $3(x^2 - 1)$, dvs. telleren er positiv for $x < -1$ og $x > 1$, mens den er negativ for $-1 < x < 1$. Så f er voksende på intervallet $[-\sqrt{3}, -1]$ og på intervallet $[\sqrt{3}, \infty)$, mens f er avtagende på intervallet $[-1, 0]$.

Derfor har f et lokalt maksimum for $x = -1$, der

$$f(x) = f(-1) = \sqrt{(-1)^3 - 3(-1)} = \sqrt{2}.$$

Altså er $(-1, \sqrt{2})$ det lokale maksimumspunktet.

(c) Vi har

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}^+} \frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{x^3 - 3x}} = \infty$$

siden telleren går mot $3 \cdot 3 - 3 = 6$ og nevneren går mot 0 gjennom positive verdier.

Videre er

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{x^3 - 3x}} = -\infty$$

siden telleren går mot $3 \cdot 0 - 3 = -3$ og nevneren går mot 0 gjennom positive verdier.

Dessuten er

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{3x^2-3}{2\sqrt{x^3-3x}} = \infty$$

fordi telleren går mot $3\cdot 3 - 3 = 6$ og nevneren går mot 0 gjennom positive verdier.

Siden f er definert og kontinuerlig i endepunktene av definisjonsområdet kan f bare ha en skråasymptote $y = ax + b$ når $x \to \infty$. Da må grensen $\lim_{x\to\infty} f(x)/x$ eksistere og være lik a. Men

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3-3x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3-3x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x-3/x} = \infty.$$

Altså har grafen til f ingen asymptoter.

(En skisse som viser en elliptisk kurve.)

(d) Kurven $y^2 = x^3 - 3x$ og linjen $y = ax + b$ skjærer hverandre i et punkt (x, y) dersom x løser likningen $(ax+b)^2 = y^2 = x^3-3x$, eller $x^3-a^2x^2-(2ab+3)x-b^2 = 0$. En tredjegradslikning har høyst tre ulike løsninger, så det største mulige antallet skjæringspunkter er tre.

Omvendt krysser x-aksen kurven i de tre nullpunktene til f, så det største antallet er faktisk lik tre.

Oppgave 4.

(a) Substituerer $u = 1 - t^2$ med $du = -2t\,dt$, så

$$\begin{aligned}\int t\sqrt{1-t^2}\,dt = (-1/2)\int \sqrt{u}\,du = (-1/2)(2/3)u^{3/2} + C \\ = (-1/3)(1-t^2)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

(b) Substituerer $t = \sin u$ med $dt = \cos u\,du$, så

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,du = \int \cos^2 u\,du.$$

Bruker delvis integrasjon

$$\begin{aligned}\int \cos^2 u\,du &= \cos u \sin u - \int (-\sin u)\sin u\,du \\ &= \sin u\cos u + \int \sin^2 u\,du \\ &= \sin u\cos u + \int (1-\cos^2 u)\,du \\ &= \sin u\cos u + u - \int \cos^2 u\,du.\end{aligned}$$

Flytter over og deler på 2, og får

$$\int \cos^2 u\,du = (1/2)(\sin u\cos u + u) + C$$

så
$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = (1/2)(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t) + C.$$

(c) Halve volumet er gitt ved å dreie arealet mellom grafen til g og x-aksen om y-aksen, som er lik
$$\begin{aligned} V/2 &= \int_1^3 2\pi x g(x)\,dx \\ &= 2\pi \int_1^3 x\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx \\ &= 2\pi \int_1^3 (x-2)\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx + 2\pi \int_1^3 2\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx. \end{aligned}$$

I det første integralet substituerer vi $t = x-2$ med $dt = dx$ og får
$$\begin{aligned} \int_1^3 (x-2)\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx &= \int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt \\ &= \Big[(-1/3)(1-t^2)^{3/2}\Big]_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

I det andre integralet substituerer vi også $t = x-2$ med $dt = dx$ og får
$$\begin{aligned} \int_1^3 2\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx &= \int_{-1}^1 2\sqrt{1-t^2}\,dt \\ &= 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt \\ &= 2\Big[(1/2)(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t)\Big]_{-1}^1 \\ &= 2((1/2)(\pi/2) - (1/2)(-\pi/2)) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Så
$$V/2 = 2\pi \cdot 0 + 2\pi \cdot \pi = 2\pi^2$$
og volumet er
$$V = 4\pi^2.$$

Oppgave 5.

(a) Deriverer
$$\begin{aligned} D[\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)] &= \left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)^{-1} \cdot \frac{\cos t(1-\sin t) - (1+\sin t)(-\cos t)}{(1-\sin t)^2} \\ &= \frac{1-\sin t}{1+\sin t} \cdot \frac{2\cos t}{(1-\sin t)^2} = \frac{2\cos t}{(1-\sin t)(1+\sin t)} \\ &= \frac{2\cos t}{\cos^2 t} = \frac{2}{\cos t}. \end{aligned}$$

(b) Likningen er separabel. Vi skriver den som

$$\frac{2}{\cos y} y' = 1$$

og integerer m.h.p. x, skriver $y'\,dx$ som dy, og får

$$\int \frac{2}{\cos y}\,dy = \int 1\,dx$$

så

$$\ln\left(\frac{1+\sin y}{1-\sin y}\right) = x + C$$

og

$$\frac{1+\sin y}{1-\sin y} = e^{x+C}.$$

Ganger opp

$$1 + \sin y = e^{x+C}(1-\sin y)$$

og samler leddene med $\sin y$

$$(\sin y)(e^{x+C}+1) = e^{x+C} - 1.$$

Dividerer

$$\sin y = \frac{e^{x+C}-1}{e^{x+C}+1}$$

og anvender arcsin, siden $-\pi/2 < y < \pi/2$:

$$y = \arcsin\left(\frac{e^{x+C}-1}{e^{x+C}+1}\right).$$

Dette gir alle løsningene til differensiallikningen.

(c) Vi har

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \arcsin\left(\frac{e^{x+C}-1}{e^{x+C}+1}\right) = \arcsin(1/1) = \pi/2$$

og

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} \arcsin\left(\frac{e^{x+C}-1}{e^{x+C}+1}\right) = \arcsin(-1/1) = -\pi/2.$$

Oppgave 6.

(a) Taylorrekken til $\cos t$ er

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

som konvergerer for alle t. Setter vi inn $t = x^2$ får vi

$$\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$$

for alle x. Ved entydighet av Taylorrekken må dette være Taylorrekken til $\cos(x^2)$.

Vi kan sjekke direkte at følgen konvergerer for alle x ved forholdstesten, siden

$$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{x^{4(n+1)}}{(2(n+1))!} \Big/ (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^4}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

for alle x.

(b) Vi kan integrere rekken ledd for ledd innenfor konvergensområdet. Så

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cos(x^2)\,dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} \right]_0^1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!} = \frac{1}{1\cdot 1} - \frac{1}{5\cdot 2} + \frac{1}{9\cdot 24} - \dots .\end{aligned}$$

Dette er en alternerende rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ med

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!}$$

der absoluttverdien til leddene er avtagende mot 0. Derfor er forskjellen på summen av de n første leddene og summen av hele rekken mindre enn absoluttverdien til det neste leddet.

For å beregne summen av rekken med en nøyaktighet bedre enn 10^{-3} må vi derfor ta med alle ledd opp til det første leddet som er mindre enn 10^{-3} i absoluttverdi. Dette skjer når $|a_n| = 1/((4n+1)(2n)!) < 10^{-3}$ eller $(4n+1)(2n)! > 10^3 = 1000$. Vi finner at $|a_3| = 13 \cdot 6! = 13 \cdot 720 > 1000$, så det er nok å beregne

$$\begin{aligned}a_0 + a_1 + a_2 = 1 - 1/10 + 1/216 &= (2160 - 216 + 10)/2160 \\ &= 1954/2160 = 977/1080 \approx 0,9046.\end{aligned}$$

SLUTT

John Rognes