Matematisk institutt 2. oktober 1996

MA 100

Innleveringsoppgaver, første sett
Løsningsforslag

Oppgave 1.

La x være et reelt tall. Da finnes det en følge rasjonale tall $\{x_n\}_n$ som konvergerer mot x. Da vil $f(x_n) = g(x_n)$ for alle n, og siden f og g er kontinuerlige vil

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$

Derfor er $f(x) = g(x)$ for alle relle x.

Oppgave 2.

(a) La $t = z^2$. Da er $t^2 - t + 1 = 0$, så

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vi skriver $1/2 + i\sqrt{3}/2 = re^{i\theta}$ på polarform, og finner $r = \sqrt{(1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = 1$ og θ ligger i første kvadrant med $\cos\theta = 1/2$, dvs. $\theta = \pi/3$. Så $1/2 + i\sqrt{3}/2 = e^{i\pi/3}$ og tilsvarende er $1/2 - i\sqrt{3}/2 = e^{-i\pi/3}$.

Så (i) $t = e^{i\pi/3}$ eller (ii) $t = e^{-i\pi/3}$. Siden $z^2 = t$ finner vi i tilfelle (i) at $z = e^{i\pi/6}$ eller $z = e^{i\pi/6 + i\pi} = e^{i7\pi/6}$. I tilfelle (ii) finner vi at $z = e^{-i\pi/6}$ eller $z = e^{-i\pi/6+i\pi} = e^{i5\pi/6}$.

Så løsningene til ligningen er $z = e^{i\pi/6} = \sqrt{3}/2 + i/2$, $z = e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3}/2 + i/2$, $z = e^{i7\pi/6} = -\sqrt{3}/2 - i/2$, og $z = e^{-i\pi/6} = \sqrt{3}/2 - i/2$.

(b) Et reelt annengradspolynom som deler $x^4 - x^2 + 1$ har to konjugerte røtter, som er blant løsningene til ligningen i (a). Den konjugerte til $\sqrt{3}/2 + i/2$ er $\sqrt{3}/2 - i/2$, som gir faktoren

$$\begin{aligned}
&(x - (\sqrt{3}/2 + i/2)) \cdot (x - (\sqrt{3}/2 - i/2)) \\
&\qquad = x^2 - (\sqrt{3}/2 + i/2 + \sqrt{3}/2 - i/2)x + (\sqrt{3}/2 + i/2)(\sqrt{3}/2 - i/2) \\
&\qquad = x^2 - \sqrt{3}x + 1.
\end{aligned}$$

Den konjugerte til $-\sqrt{3}/2 + i/2$ er $-\sqrt{3}/2 - i/2$, som gir faktoren

$$\begin{aligned}
&(x - (-\sqrt{3}/2 + i/2)) \cdot (x - (-\sqrt{3}/2 - i/2)) \\
&\qquad = x^2 - (-\sqrt{3}/2 + i/2 - \sqrt{3}/2 - i/2)x + (-\sqrt{3}/2 + i/2)(-\sqrt{3}/2 - i/2) \\
&\qquad = x^2 + \sqrt{3}x + 1.
\end{aligned}$$

Altså er

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 - \sqrt{3}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{3}x + 1)$$

den ønskede faktoriseringen.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Oppgave 3.

(a) Vi beregner

$$g'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - (\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Så $g'(x) \geq 0$ for $1 - \ln x \geq 0$, dvs. $0 < x \leq e$, og $g'(x) \leq 0$ for $1 - \ln x \leq 0$, dvs. $x \geq e$. Så g er (strengt) voksende på intervallet $(0, e]$, og (strengt) avtagende på intervallet $[e, \infty)$. Dermed er $x = e$ et maksimumspunkt for g, med maksimumsverdi $g(e) = 1/e$. Funksjonen g har ingen minimumspunkter.

(b) Vi beregner

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{(-1/x) \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{2x \ln x - 3x}{x^4} \\ &= \frac{2 \ln x - 3}{x^3}. \end{aligned}$$

Så $g''(x) \geq 0$ når $2 \ln x \geq 3$, dvs. $x \geq e^{3/2}$. Tilsvarende er $g''(x) \leq 0$ når $2 \ln x \leq 3$, dvs. $0 < x \leq e^{3/2}$. Dermed er g konveks på intervallet $[e^{3/2}, \infty)$ og g er konkav på intervallet $(0, e^{3/2}]$.

(c) Når x nærmer seg 0 ovenfra går $\ln x$ mot $-\infty$ og $1/x$ mot ∞, så produktet $g(x) = (\ln x) \cdot (1/x)$ går mot $-\infty$.

Ved l'Hôpitals regel er

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Så $\lim_{x \to 0+} g(x) = -\infty$ og $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$. Skissen av grafen til g er vedlagt.

(d) Siden $\lim_{x \to 0+} g(x) = -\infty$, $g(e) = 1/e$ og g er strengt voksende på intervallet $(0, e]$ så antar $g(x)$ hver verdi fra $-\infty$ til $1/e$ nøyaktig én gang for $x \in (0, e]$. Siden g er strengt avtagende på intervallet $[e, \infty)$ og $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ antar $g(x)$ hver verdi fra 0 til $1/e$ nøyaktig én gang for $x \in [e, \infty)$.

Vi merker oss også at $g(1) = 0$.

Dermed har ligningen $g(x) = b$ nøyaktig én løsning $x \in (0, 1]$ når $b \leq 0$, nøyaktig to løsninger $x \in (1, e) \cup (e, \infty)$ når $0 < b < 1/e$, nøyaktig én løsning $x = e$ når $b = 1/e$, og ingen løsninger når $b > 1/e$ er større enn g's maksimumsverdi.

(e) For $a, x > 0$ er a^x og x^a positive tall, så $a^x = x^a$ hvis og bare hvis de naturlige logaritmene er like, dvs. hvis

$$x \ln a = \ln(a^x) = \ln(x^a) = a \ln x.$$

Deler vi på a og x får vi ligningen $g(a) = g(x)$.

(f) For $0 < a \leq 1$ eller $a = e$ er $g(a) \leq 0$ eller $g(a) = 1/e$, så fra (d) vet vi at ligningen $g(x) = b = g(a)$ bare har én løsning.

For $1 < a < e$ eller $e < a$ er $0 < g(a) < 1/e$, så fra (d) vet vi at ligningen $g(x) = b = g(a)$ har nøyaktig to løsninger.

(g) Funksjonen $f(x) = e^x - x^e$ er kontinuerlig for $x > 0$ og har i følge (f) bare ett nullpunkt, nemlig $x = e$. Siden $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ er f positiv for x tilstrekkelig stor. Da må også $f(x) > 0$ for alle $x > e$, som en følge av skjæringssetningen. Spesielt er $f(\pi) = e^\pi - \pi^e > 0$.

Konklusjon: e^π er større enn π^e.

Oppgave 4.

(a) Vi har $z = \cos(\pi/9) + i\sin(\pi/9) = e^{i\pi/9}$, så $\theta = \pi/9$.

(b) På den ene side er

$$z^3 = (a + ib)^3 = a^3 + 3a^2(ib) + 3a(ib)^2 + (ib)^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3)$$

ved binomialformelen, og på den annen side er

$$z^3 = (e^{i\pi/9})^3 = e^{i\pi/3} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3).$$

Fra $\cos(\pi/3) = 1/2$ og $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ får vi de ønskede ligningene ved å sammenligne realdelene og imaginærdelene i disse uttrykkene.

(c) Vi substituerer $b^2 = 1 - a^2$ i ligningen $a^3 - 3ab^2 = 1/2$ og får

$$a^3 - 3a(1 - a^2) = 1/2$$

som med litt opprydning gir den ønskede ligningen $4a^3 - 3a = 1/2$.

Oppgave 5.

(a) Siden x_n er gjennomsnittet av de to foregående leddene x_{n-2} og x_{n-1} må

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1}).$$

Denne ligningen kan omorganiseres som

$$x_n - \frac{1}{2}x_{n-1} - \frac{1}{2}x_{n-2} = 0.$$

Bytter vi ut n med $n + 2$ fås den ønskede differensligningen.

(b) Differensligningen har karakteristisk ligning $r^2 - (1/2)r - (1/2) = 0$, med to reelle røtter $r_1 = 1$ og $r_2 = -1/2$. Dermed er den generelle løsningen

$$x_n = C \cdot 1^n + D \cdot (-\frac{1}{2})^n = C + D(-\frac{1}{2})^n.$$

(c) Hvis $x_0 = 7$ må $C + D = 7$, mens hvis $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$ er $C = 3$ fordi $\lim_{n\to\infty}(-1/2)^n = 0$. Så $D = 4$ og

$$x_1 = 3 + 4(-\frac{1}{2})^1 = 1.$$

Oppgave 6.

La ballongen ha radius $r(t)$, overflateareal $A(t)$ og volum $V(t)$ ved tiden t. Da er $A(t) = 4\pi r(t)^2$ og $V(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3$.

Vi deriverer med hensyn på t og finner

$$\begin{aligned} A'(t) &= 8\pi r(t) r'(t) \\ V'(t) &= 4\pi r(t)^2 r'(t). \end{aligned}$$

Fra det siste uttrykket finner vi

$$r'(t) = \frac{V'(t)}{4\pi r(t)^2}.$$

Vi kan derfor uttrykke hvor fort overflaten krymper (dvs. $A'(t)$) ved hvor fort volumet minker (dvs. $V'(t)$) som følger:

$$\begin{aligned} A'(t) &= 8\pi r(t) r'(t) \\ &= \frac{8\pi r(t) V'(t)}{4\pi r(t)^2} \\ &= \frac{2V'(t)}{r(t)}. \end{aligned}$$

Når $V'(t) = -1$ kubikkmeter per minutt og $r(t) = 5$ meter er derfor $A'(t) = 2(-1)/5 = -2/5$ kvadratmeter per minutt. Så overflaten krymper med $2/5 = 0,4$ kvadratmeter per minutt når radien er 5 meter.

SLUTT

John Rognes