Matematisk institutt 30. oktober 1996

MA 100

Innleveringsoppgaver, andre sett
Løsningsforslag

Oppgave 1.

(a) Bruker l'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2e^{-2x}}{\cos x}=\boxed{-2}.$$

(b) Bruker l'Hôpitals regel to ganger:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)-x}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{1/\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(-1/2)(1-x^2)^{-3/2}(-2x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)^{-3/2}}{6}=\boxed{1/6}.\end{aligned}$$

Oppgave 2.

(a) Setter vi $y=\sqrt{x}$, får vi $x=y^2$ og $dx=2y\,dy$. Dette gir

$$I=\int\arctan(\sqrt{x})\,dx=\int 2y\arctan y\,dy\,.$$

Bruker vi delvis integrasjon med $u=\arctan y$, $v'=2y$, får vi $u'=1/(1+y^2)$ og $v=y^2$. Dette gir

$$\begin{aligned}I&=y^2\arctan y-\int\frac{y^2}{1+y^2}\,dy=y^2\arctan y-\int\frac{(1+y^2)-1}{1+y^2}\,dy\\&=y^2\arctan y-\int(1-\frac{1}{1+y^2})\,dy=y^2\arctan y-y+\arctan y+C\\&=(y^2+1)\arctan y-y+C=(x+1)\arctan(\sqrt{x})-\sqrt{x}+C\,.\end{aligned}$$

Setter vi inn grensene, får vi

$$\begin{aligned}\int_0^{1/3}\arctan(\sqrt{x})\,dx&=\Big[(x+1)\arctan(\sqrt{x})-\sqrt{x}\Big]_0^{1/3}\\&=(4/3)\arctan(1/\sqrt{3})-1/\sqrt{3}=\boxed{\frac{2\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}}.\end{aligned}$$

(b) Vi setter $y=\sqrt{x}+1$ og får $x=(y-1)^2$, $dx=2(y-1)\,dy$. Dette gir

$$I=\int\ln(\sqrt{x}+1)\,dx=\int 2(y-1)\ln(y)\,dy\,.$$

Bruker vi delvis integrasjon med $u=\ln(y)$, $v'=2(y-1)$, får vi $u'=1/y$, $v=y^2-2y$. Dermed er

$$\begin{aligned}I&=(y^2-2y)\ln(y)-\int\frac{y^2-2y}{y}\,dy=(y^2-2y)\ln(y)-\int(y-2)\,dy\\&=(y^2-2y)\ln(y)-\frac{1}{2}y^2+2y+C=\boxed{(x-1)\ln(\sqrt{x}+1)-x/2+\sqrt{x}+C}.\end{aligned}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Oppgave 3.

(a) Setter vi $z = -1 + 2i$ inn i polynomet får vi

$$\begin{aligned} P(-1+2i) &= (-1+2i)^3 + (-1+2i) - 10 \\ &= (-1)^3 + 3(-1)^2(2i) + 3(-1)(2i)^2 + (2i)^3 - 1 + 2i - 10 \\ &= -1 + 6i + 12 - 8i - 1 + 2i - 10 = 0 \end{aligned}$$

som viser at $z = -1 + 2i$ er en rot.

(b) Siden $P(z)$ har reelle koeffisienter må også det konjugerte tallet $-1-2i$ være en rot. Det betyr at $P(z)$ er delelig med

$$(z - (-1+2i))(z - (-1-2i)) = z^2 + 2z + 5\,.$$

Utfører vi polynomdivisjonen (utelatt) får vi

$$z^3 + z - 10 : z^2 + 2z + 5 = z - 2\,.$$

Dermed har vi

$$z^3 + z - 10 = \boxed{(z-2)(z^2+2z+5)} = \boxed{(z-2)(z+1+2i)(z+1-2i)}$$

som gir henholdsvis den reelle og den komplekse faktoriseringen av $P(z)$.

(c) Vi må finne A, B og C slik at

$$\frac{3x^2+5x+4}{x^3+x-10} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}\,.$$

Ganger vi med fellesnevneren $(x-2)(x^2+2x+5)$, får vi

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x + 4 &= A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x-2) \\ &= Ax^2 + 2Ax + 5A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C \\ &= (A+B)x^2 + (2A - 2B + C)x + (5A - 2C) = 0\,. \end{aligned}$$

Skal dette gjelde for alle x må $A + B = 3$, $2A - 2B + C = 5$ og $5A - 2C = 4$. Løser vi dette ligningssystemet (utelatt) får vi $A = 2$, $B = 1$ og $C = 3$. Altså er

$$\boxed{\frac{3x^2+5x+4}{x^3+x-10} = \frac{2}{x-2} + \frac{x+3}{x^2+2x+5}}\,.$$

(d) Vi har ifølge (c):

$$I = \int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x-10}\,dx = \int \frac{2}{x-2}\,dx + \int \frac{x+3}{x^2+2x+5}\,dx\,.$$

Her er

$$\int \frac{2}{x-2}\,dx = 2\ln|x-2| + C\,.$$

For å løse integralet $I_0 = \int \frac{x+3}{x^2+2x+5}\,dx$ beregner vi først $D[x^2+2x+5] = 2x+2$. Vi skriver $x+3 = \frac{1}{2}(2x+2)+2$, og får en sum av to integraler:

$$I_0 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$$

I det første integralet substituerer vi $u = x^2+2x+5$, med $du = (2x+2)\,dx$, så

$$I_1 = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln(x^2+2x+5) + C\,.$$

I det andre integralet skriver vi

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)+1}\,dx\,.$$

Her substituerer vi $v = \frac{x+1}{2}$ med $dv = \frac{1}{2}dx$, og får

$$I_2 = \frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{1}{v^2+1}\,dv = \frac{1}{2}\arctan v + C = \frac{1}{2}\arctan(\frac{x+1}{2}) + C\,.$$

Alt i alt får vi

$$\begin{aligned} I &= 2\ln|x-2| + \frac{1}{2}I_1 + 2I_2 \\ &= \boxed{2\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \arctan(\frac{x+1}{2}) + C}. \end{aligned}$$

Oppgave 4.

I løpet av et lite tidsrom fra t til $t+\Delta t$ øker medisindosen med

$$y(t+\Delta t) - y(t)\,.$$

Denne endringen skyldes en tilførsel på $10\Delta t$ milliliter, og en utskilling på (tilnærmet) $\frac{y(t)}{20}\Delta t$. Vi har dermed

$$y(t+\Delta t) - y(t) \approx 10\Delta t - \frac{y(t)}{20}\Delta t$$

med større nøyaktighet dess mindre Δt er. Deler vi på Δt og lar deretter Δt gå mot null, får vi

$$y'(t) = 10 - \frac{1}{20}y(t)$$

som er ligningen vår. I tillegg har vi $y(0) = 0$ siden pasienten ikke har noe medisin i blodet når behandlingen begynner.

Multipliserer vi ligningen med $e^{t/20}$, får vi

$$y'e^{t/20} + \frac{1}{20}ye^{t/20} = 10e^{t/20}$$

som gir $(ye^{t/20})' = 10e^{t/20}$. Vi integrerer, og får

$$ye^{t/20} = 200e^{t/20} + C\,,$$

det vil si

$$y = 200 + Ce^{-t/20}\,.$$

Siden $y(0) = 0$ må $C = -200$ og vi får

$$\boxed{y(t) = 200(1-e^{-t/20})}.$$

Vi ser at $\boxed{\lim_{t\to\infty} y(t) = 200}$.

Oppgave 5.

(a) For $n = 0$:

$$I_0 = \int_0^{\pi/4} \tan^0 x \, dx = \int_0^{\pi/4} 1 \, dx = \boxed{\pi/4}.$$

For $n = 1$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/4} \tan^1 x \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{-1}{u} \, du \\ &= \Big[-\ln u \Big]_1^{\sqrt{2}/2} = -\ln(\sqrt{2}/2) = \boxed{\frac{1}{2} \ln 2}. \end{aligned}$$

Her har vi substituert $u = \cos x$, $du = -\sin x \, dx$.

(b) Vi har

$$\tan^{n+2} x = \tan^n x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^n x \cdot \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) = \tan^n x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right).$$

Dette gir

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/4} \tan^n x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \, dx - \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \tan^n x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \, dx - I_n \, . \end{aligned}$$

Vi løser dette integralet ved å sette $u = \tan x$, $du = \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$:

$$\int_0^{\pi/4} \tan^n x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^1 u^n \, du = \frac{1}{n+1} \, .$$

Dermed har vi vist at

$$I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n \, .$$

(c) Induksjonshypotesen er

$$P_n : \qquad I_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2} \left[\ln 2 - (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}) \right].$$

Sjekker P_0, som sier at $I_1 = \frac{1}{2} \ln 2$. Dette viste vi i (a). (Eventuelt kan man sjekke P_1, som sier at $I_3 = \frac{-1}{2}(\ln 2 - 1)$. Dette følger fra formelen i (b) som sier $I_3 = \frac{1}{2} - I_1$.)

Anta per induksjon at P_k holder, dvs. at

$$I_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2} \left[\ln 2 - (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{k}) \right].$$

Vi vet at $I_{2k+3} = \frac{1}{2k+2} - I_{2k+1}$, så

$$\begin{aligned}
I_{2k+3} &= \frac{1}{2k+2} - \frac{(-1)^k}{2}\left[\ln 2 - (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{k})\right] \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{2}\left[\ln 2 - (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{k})\right] + \frac{1}{2(k+1)} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{2}\left[\ln 2 - (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{k+2}}{k+1})\right]
\end{aligned}$$

som er P_{k+1}. Dermed er P_n vist for alle $n \geq 0$ ved induksjon.

(d) Vi skal vise dette på to måter — først en rask og smart som virker i akkurat dette tilfellet, og så en lengre og mer omstendelig som virker i flere tilfeller.

Metode I. Fra definisjonen ser vi at $I_n \geq 0$ for alle n. Spesielt er $0 \leq I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$, som viser at $I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Dermed er $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, som medfører at $I_n \to 0$ når $n \to \infty$.

Metode II.

Dersom $x \in [0, \pi/4)$ er $\tan x \in [0, 1)$ og $\tan^n x \to 0$ når $n \to \infty$. For store n vil derfor grafen til $\tan^n x$ ligge nær x-aksen, unntagen for x nær $\pi/4$, og det er intuitivt rimelig at $I_n \to 0$ når $n \to \infty$. Her er en stringent måte å vise at dette er riktig på:

Gitt en $\epsilon > 0$, må vi finne en $N \in \mathbb{N}$ slik at $\int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx < \epsilon$. Vi deler intervallet $[0, \pi/4]$ i to deler $[0, a]$ og $[a, \pi/4]$, slik at $\tan^n x$ er nær null på $[0, a]$, og slik at intervallet $[a, \pi/4]$ er lite. Vi velger først $a = \pi/4 - \epsilon/2$. Da er

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx = \int_0^a \tan^n x\, dx + \int_a^{\pi/4} \tan^n x\, dx$$

og siden $\tan^n x \leq 1$ er $\int_a^{\pi/4} \tan^n x\, dx \leq \int_a^{\pi/4} 1\, dx = \pi/4 - a = \epsilon/2$.

Vi velger nå N så stor at $\tan^N a < \epsilon/2$. Siden $\tan x$ er voksende og mindre enn 1 for $x \leq a$ betyr dette at $\tan^n x < \epsilon/2$ for alle $x \in [0, a]$ og alle $n \geq N$. Dermed er

$$\int_0^a \tan^n x\, dx \leq \int_0^a \epsilon/2\, dx \leq \epsilon/2 \cdot a < \epsilon/2$$

siden $a < \pi/4 < 1$. For $n \geq N$ er dermed

$$I_n < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon\,,$$

og vi har dermed vist at $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. (Slutt på metode II.)

Siden

$$0 = \lim_{n\to\infty} I_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2}\left[\ln 2 - (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n})\right]$$

må derfor

$$\ln 2 = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n})\,.$$

Oppgave 6.

(a) Den karakteristiske ligningen $r^2 - 2r + 1 = 0$ har en dobbeltrot $r = 1$, og den generelle løsningen er dermed $\boxed{x_n = C + Dn}$.

(b) Normalt ville vi ha tippet på en partikulær løsning på formen $x_n^p = A$, men siden både 1 og n er løsninger av den homogene ligningen, må vi gå opp to grader til $x_n^p = An^2$. Vi setter inn i ligningen og får

$$\begin{aligned} x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} &= A(n+1)^2 - 2An^2 + A(n-1)^2 \\ &= An^2 + 2An + A - 2An^2 + An^2 - 2An + A = 2A\,. \end{aligned}$$

Skal vi ha en løsning må altså $2A = -4$, dvs. $A = -2$. Den generelle løsningen blir dermed

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C + Dn - 2n^2\,.$$

Skal $x_0 = x_{10} = 0$ får vi i tillegg kravene

$$0 = x_0 = C \qquad \text{og} \qquad 0 = x_{10} = C + 10D - 2 \cdot 10^2$$

som gir $C = 0$, $D = 20$. Altså er

$$\boxed{x_n = 20n - 2n^2}\,.$$

(c) La x_n være det gjennomsnittlige antall kast som gjenstår når den ene spilleren har n kort igjen (og den andre $10 - n$). Da er

$$x_n = \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{1}{2}x_n + 1$$

siden spilleren vinner og taper med sannsynlighet 1/4, og spiller uavgjort med sannsynlighet 1/2. Ett–tallet skyldes at vi må telle med den omgangen vi nå har spilt. Rydder vi opp i ligningen ser vi at

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = -4\,.$$

Vi ser også at $x_0 = x_{10} = 0$ siden den ene av spillerne da har tapt. Ifølge (c) er

$$x_n = 20n - 2n^2$$

så $x_5 = 20 \cdot 5 - 2 \cdot 5^2 = 50$. I gjennomsnitt må de altså kaste $\boxed{50}$ ganger før de er ferdige !