MA 100

Innleveringsoppgaver, første sett
Leveres til gruppelærer senest 18. oktober

Oppgave 1.
La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være kontinuerlige funksjoner slik at $f(r) = g(r)$ for alle rasjonale $r \in \mathbb{Q}$. Vis at $f(x) = g(x)$ for alle reelle $x \in \mathbb{R}$.

Oppgave 2.
(a) Finn løsningene til ligningen

$$z^4 - z^2 + 1 = 0$$

der $z \in \mathbb{C}$. (Hint: La $t = z^2$.)
(b) Skriv polynomet $x^4 - x^2 + 1$ som et produkt av reelle annengradspolynomer.

Oppgave 3.
La

$$g(x) = \frac{\ln x}{x}$$

være definert for $x > 0$.
(a) Avgjør hvor funksjonen g er voksende og hvor den er avtagende. Finn eventuelle ekstremalpunkter og –verdier.
(b) Avgjør hvor g er konveks og hvor den er konkav.
(c) Finn grenseverdiene $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ og $\lim_{x\to\infty} g(x)$. Skisser grafen til g.
(d) Forklar hvorfor ligningen $g(x) = b$ har ingen løsninger for $b > 1/e$, noyaktig én løsning for $b = 1/e$ eller $b \le 0$, og nøyaktig to løsninger for $0 < b < 1/e$.
(e) La $a > 0$ være et gitt tall. Vis at x løser ligningen

$$a^x = x^a \tag{*}$$

hvis og bare hvis $g(x) = g(a)$.
(f) Likningen (*) har åpenbart alltid løsningen $x = a$. Forklar hvorfor ligningen har nøyaktig én løsning når $0 < a \le 1$ eller $a = e$, mens ligningen har nøyaktig to løsninger når $1 < a$ og $a \ne e$.
(g) Avgjør hvilket av tallene e^π og π^e som er størst, uten å regne dem ut. (Hint: Se på funksjonen $f(x) = e^x - x^e$.)

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Oppgave 4.

La $z = a + ib$ der $a = \cos(\pi/9)$ og $b = \sin(\pi/9)$.

(a) Skriv z på formen $e^{i\theta}$.

(b) Regn ut z^3 på to forskjellige måter, og vis at

$$a^3 - 3ab^2 = \frac{1}{2}$$
$$3a^2 b - b^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(c) Bruk at $a^2 + b^2 = 1$ til å vise at $a = \cos(\pi/9)$ løser ligningen

$$4a^3 - 3a = \frac{1}{2}.$$

Oppgave 5.

La $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ være en tallfølge slik at for $n \geq 2$ er x_n lik gjennomsnittet av de to foregående tallene i følgen.

(a) Forklar hvorfor $\{x_n\}$ oppfyller differensligningen

$$x_{n+2} - \frac{1}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = 0.$$

(b) Finn den generelle løsningen av denne differensligningen.

(c) Hva må x_1 være hvis $x_0 = 7$ og

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 3 \quad ?$$

Oppgave 6.

Luften i en kulerund varmluftsballong avkjøles og trekker seg sammen. Ballongens volum minker med 1 kubikkmeter per minutt. Hvor fort krymper overflaten av ballongen når radien er 5 meter ?

SLUTT