Matematisk institutt 30. oktober 1996

MA 100

Innleveringsoppgaver, andre sett
Leveres til gruppelærer senest 15. november

Oppgave 1.

Finn grenseverdiene:

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}-1}{\sin x}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3}$$

Oppgave 2.

Regn ut integralene:

(a)

$$\int_0^{1/3} \arctan(\sqrt{x})\, dx$$

(b)

$$\int \ln(\sqrt{x}+1)\, dx$$

Oppgave 3.

(a) Vis at $z = -1 + 2i$ er en rot i polynomet

$$P(z) = z^3 + z - 10\,.$$

(b) Finn den komplekse og reelle faktoriseringen til $P(z)$.

(c) Finn delbrøksoppspaltningen til

$$\frac{3x^2+5x+4}{x^3+x-10}\,.$$

(d) Løs integralet

$$\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x-10}\, dx\,.$$

Oppgave 4.

En pasient får intravenøst en jevn, kontinuerlig tilførsel av medisin med en hastighet av 10 milliliter i timen. Medisinen skilles ut av kroppen med en fart på 5% per time. La $y(t)$ betegne mengden av medisin i kroppen t timer etter at behandlingen har begynt. Vis at dersom $y(t)$ måles i milliliter, så er

$$y'(t) + \frac{1}{20}y(t) = 10 \quad ; \quad y(0) = 0\,.$$

Finn $y(t)$ og $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

Oppgave 5.
I denne oppgaven lar vi

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$.
(a) Beregn I_0 og I_1.
(b) Vis at

$$\tan^{n+2} x = \tan^n x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)$$

og bruk denne formelen til å vise at

$$I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n \,.$$

(c) Vis ved induksjon at

$$I_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2} \left[\ln 2 - (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}) \right] .$$

(d) Vis at

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx = 0$$

og bruk dette til å vise at

$$\ln 2 = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}) \,.$$

Oppgave 6.
(a) Finn den generelle løsningen til differensligningen

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 0 \,.$$

(b) Finn en løsning av den inhomogene ligningen

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = -4$$

slik at $x_0 = 0$, $x_{10} = 0$.
(c) To barn har fem fotballkort hver. De spiller et spill med følgende regler. Begge kaster ett av sine kort opp i luften. Dersom det ene lander med forsiden opp og det andre med baksiden opp, vinner hun som fikk forsiden opp motstanderens kort. Dersom begge får forsiden opp eller begge får baksiden opp, plukker de opp kortene og kaster dem en gang til. Spillet fortsetter til den ene av spillerne har tapt alle sine kort. Hvor mange kast må hver spiller i gjennomsnitt regne med å gjøre før spillet er over ?

SLUTT