SØNDAGSREGNING MA 100
24. NOVEMBER 1996

Oppgave 1.
(Eksamen 9/12–85, Oppgave 1)
La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = x^2 e^{1/x} \qquad \text{for } x \neq 0.$$

(a) Finn eventuelle ekstremalpunkter og asymptoter for f. Skisser grafen til f.
(b) Er det mulig å definere $f(0)$ slik at f blir kontinuerlig på hele $\mathbb{R}$? Begrunn svaret.
Undersøk om integralet

$$\int_0^1 f(x)\, dx$$

konvergerer.
(c) Finn Taylorpolynomet av 2. grad for $f(x)$ rundt $x = 1$. Kall dette polynomet $T_2 f(x)$. Vis at $|f(x) - T_2 f(x)| < \frac{1}{1000}$ på $[0.9, 1.1]$.

Oppgave 2.
(Eksamen 15/5–87, Oppgave 2)
Finn volumet av det omdreiningslegemet som framkommer når området under kurven

$$t = \ln x\,; \qquad 1 \leq x \leq 2$$

dreies om x-aksen.

Oppgave 3.
(Eksamen 7/12–92, Oppgave 4)
(a) En kurve $y = y(x)$ har den egenskapen at tangenten i ethvert punkt (x, y) på kurven skjærer x-aksen i punktet $(x^2, 0)$. Vis at y oppfyller den separable differensiallikningen

$$y'(x - x^2) = y.$$

(b) Finn den generelle løsningen av likningen i (a), og bestem så en partikulær løsning slik at $y'(0) = 1$.
(c) La $y(x)$ være den partikulære løsningen fra punkt (b). For hvilke valg av startpunkt x_0 vil Newtons metode for likningen $y(x) = 0$ konvergere ?

Oppgave 4.
(Eksamen 8/6–93, Oppgave 1)
La

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

for $x \neq 0$.

(a) Finn eventuelle maksimums– og minimumspunkter of asymptoter til grafen til f.
(b) Avgjør hvor grafen til f er konkav og hvor den er konveks, og tegn kurven.
(c) Grafen har ett punkt P slik at tangenten i P går gjennom origo. Finn dette punktet. Hva er en likning til normalen i P ?
(d) Den delen av planet i første kvadrant som begrenses av koordinataksene, kurven og linjen $x = 1$ roteres om y-aksen. Vis at det legemet som fremkommer har endelig volum, og beregn dette.
Undersøk så om volumet blir endelig om vi i stedet roterer om x-aksen.

Oppgave 5.
(Eksamen 8/6–93, Oppgave 5)
(a) Formuler forholdskriteriet for konvergens av rekker.
(b) Finn konvergensområdet for rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} x^n.$$

(c) La $g(x)$ være summen av rekken i (b). Beregn

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{\sin(x^2)}.$$

Oppgave 6.
(a) Finn alle komplekse løsninger av likningen

$$z^4 + 1 = 0.$$

(b) Skriv polynomet $z^4 + 1$ som et produkt av to annengradspolynomer med reelle koeffisienter.

Oppgave 7.
(a) Løs annengradslikningen $z^2 + 2z + 4 = 0$ og skriv løsningen på polarform.
(b) Finn den generelle løsningen til differenslikningen

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + 4x_n = 0.$$

Skriv løsningen uten bruk av komplekse tall.
(c) Finn den generelle løsningen til

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + 4x_n = 21 \cdot n.$$

Oppgave 8.
(a) Finn konvergensområdet til rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

(b) Definer

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

for alle x i konvergensområdet. Vis at $f''(x) = f(x)$.
(c) Finn en løsning av differensiallikningen

$$y'' - y = 0$$

slik at $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Finn et uttrykk for $f(x)$ uten å bruke rekker.