LØSNINGSFORSLAG SØNDAGSREGNING MA 100

Oppgave 1.
(a) Derivasjon gir

$$f'(x) = (2x-1)e^{1/x}$$

som er positiv for $x > 1/2$ og negativ for $x < 1/2$, $x \neq 0$. Så f har et lokalt minimum i $(1/2, e^2/4)$. Vi har

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \infty,\\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= 0,\\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \infty,\\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \infty.\end{aligned}$$

Så f har ikke noe globalt maksimum eller minimum. Linjen $x = 0$ er en vertikal asymptote. Vi har $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$ og $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$, så f har ingen skråasymptoter.

(b) Siden $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ kan ikke $f(0)$ defineres slik at f blir kontinuerlig i 0. Sammenligner med $1/x$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{(1/x)} = \lim_{x\to 0^+} x^3 e^{1/x} = \infty$$

så fordi

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

divergerer må også det gitte integralet divergere.

(c) Deriverer

$$f''(x) = (2 - 2/x + 1/x^2)e^{1/x}$$

og

$$f^{(3)}(x) = (2/x^2 - 2/x^3 - 2/x^2 + 2/x^3 - 1/x^4)e^{1/x} = -x^{-4}e^{1/x}.$$

Så $f(1) = e$, $f'(1) = e$, $f''(1) = e$ og $T_2 f(x) = e + e(x-1) + (e/2)(x-1)^2$. Da er $|f(x) - T_2 f(x)| = |R_2 f(x)| \leq \frac{M}{3!}|x-1|^3$ for $x \in [0.9, 1.1]$ der M er supremum av $|f^{(3)}(t)|$ for t mellom 1 og x. For $0.9 \leq t \leq 1.1$ er $|f^{(3)}(t)| = (1/t^4)e^{1/t} \leq (1/0.9^4)e^{1/0.9} \approx 4.630 \leq 6$. Så $|f(x) - T_2 f(x)| \leq |x-1|^3 \leq 0.1^3 = \frac{1}{1000}$. Som skulle vises.

Oppgave 2.
Svaret er $2\pi((\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 1)$.

Oppgave 3.
(a) Linjen fra (x, y) til $(x^2, 0)$ har stigningstall $(y-0)/(x-x^2)$.

(b)

$$y(x) = D\frac{x}{1-x}$$
$$y'(x) = \frac{D}{(1-x)^2}$$

$D = 1$ gir $y'(0) = 1$.

(c)

$$x_{n+1} = x_n - y(x_n)/y'(x_n) = x_n - x_n(1-x_n) = x_n^2$$

Så $x_n \to 0$ hvis og bare hvis $x_0 \in (-1, 1)$.

Oppgave 4.
(a) $f'(x) = (x-1)e^x/x^2$ er positiv for $x > 1$ og negativ for $x < 1$, $x \neq 0$, så f er voksende på $[1, \infty)$ og avtagende på $(-\infty, 0)$ og på $(0, 1]$. Linjen $x = 0$ er en vertikal asymptote, og $y = 0$ er en horisontal asymptote når $x \to -\infty$.

(b) $f''(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x/x^3$ er positiv for $x > 0$ og negativ for $x < 0$, så f er konveks på $(0, \infty)$ og konkav på $(-\infty, 0)$.

(c) Løser $f'(x) = f(x)/x$, dvs. $(x-1)/x^2 = 1/x^2$ eller $x = 2$. Så $P = (2, f(2)) = (2, e^2/2)$. En likning er $2(x-2) + (e^2/2)(y - e^2/2) = 0$.

(d)

$$\int_0^1 2\pi x e^x/x \, dx = 2\pi e$$

konvergerer.

$$\int_0^1 \pi(e^x/x)^2 \, dx$$

divergerer, ved grensesammenligningstesten med det divergente integralet

$$\int_0^1 1/x^2 \, dx.$$

Oppgave 5.
(a) La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en rekke og anta at grensen

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$$

eksisterer. Da gjelder

(1) Dersom $a < 1$, konvergerer rekken absolutt.
(2) Dersom $a > 1$, divergerer rekken.
(3) Dersom $a = 1$ gir testen ingen konklusjon.

(b) Rekken konvergerer for $x \in [-1, 1)$.

(c) Grensen er lik $(\ln 2)^2/2$.

Oppgave 6.
(a) Løsningene er $z = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$, $z = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$, $z = -\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$ og $z = \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$.

(b)
$$z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1).$$

Oppgave 7.
(a) Løsningene er $z = -1 + i\sqrt{3}$ og $z = -1 - i\sqrt{3}$. På polarform blir løsningene $z = 2e^{i2\pi/3}$ og $z = 2e^{i4\pi/3}$.

(b) Den generelle løsningen er

$$x_n = 2^n(C\cos(n2\pi/3) + D\sin(n2\pi/3))$$

med C og D reelle tall.

(c) Søker en partikulær løsning på formen $x_n^p = An + B$. Får $A = 3$ og $B = -12/7$, så
$$x_n = 2^n(C\cos(n2\pi/3) + D\sin(n2\pi/3)) + 3n - 12/7.$$

Oppgave 8.
(a) Bruker forholdstesten.

$$\left| \frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \bigg/ \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} \to 0$$

når $n \to \infty$, for hver x. Konvergensområdet er hele $\mathbb{R}$.

(b) Deriver leddvis to ganger, og reindekser.

(c) Differensiallikningen har karakteristisk likning $r^2 - 1 = 0$ med røtter $r = \pm 1$ og generell løsning
$$y(x) = Ce^x + De^{-x}.$$

Den spesielle løsningen med $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$ er den med $C = D = 1/2$. Dermed er
$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$