LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MA 104

John Rognes

2. desember 1998

Oppgave 1.

a) Bruker Gauss–Jordan metoden:

$$
\begin{aligned}
[\,A \quad | \quad I\,] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \\
&= [\,I \quad | \quad A^{-1}\,]\,.
\end{aligned}
$$

Så

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.
$$

b) Har $Av = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2v$, så v er en egenvektor for A med egenverdi 2. Altså er

$$
A^{10}v = 2^{10}v = \begin{bmatrix} 1024 \\ 1024 \\ 1024 \end{bmatrix}.
$$

Oppgave 2.

a) A er normal hvis $A^*A = AA^*$. Her er

$$
A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Regner ut

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mens

$$AA^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Altså er $A^*A = AA^*$ og A er normal.

b) Det karakteristiske polynomet til A er

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^3 + 1\,. \end{aligned}$$

Så de komplekse egenverdiene er løsningene i likningen $(1-\lambda)^3 + 1 = 0$, som er ekvivalent med $(\lambda - 1)^3 = 1$ eller $\lambda - 1 = 1$, w eller w^2. Så egenverdiene er $\lambda_1 = 1 + 1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + w$ og $\lambda_3 = 1 + w^2$.

c) Egenrommet E_2 til $\lambda_1 = 2$ er nullrommet til

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som er utspent av $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Egenrommet E_{1+w} til $\lambda_2 = 1 + w$ er nullrommet til

$$A - (1+w)I = \begin{bmatrix} -w & 0 & 1 \\ 1 & -w & 0 \\ 0 & 1 & -w \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -w & 0 \\ 0 & 1 & -w \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som er utspent av $v_2 = \begin{bmatrix} w^2 \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$.

Egenrommet E_{1+w^2} til $\lambda_3 = 1 + w^2$ er nullrommet til

$$A - (1+w^2)I = \begin{bmatrix} -w^2 & 0 & 1 \\ 1 & -w^2 & 0 \\ 0 & 1 & -w^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -w^2 & 0 \\ 0 & 1 & -w^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som er utspent av $v_3 = \begin{bmatrix} w \\ w^2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Her har vi brukt $w^4 = w$.

Matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 1 & w^2 & w \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

har da lineært uavhengige egenvektorer for A som kolonner, og diagonaliserer A.

Oppgave 3.

a) Regner ut

$$\begin{aligned}
q_1 \cdot q_1 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \\
q_1 \cdot q_2 &= a(-b) + ba + c(-d) + dc = 0 \\
q_1 \cdot q_3 &= a(-c) + bd + ca + d(-b) = 0 \\
q_2 \cdot q_2 &= (-b)^2 + a^2 + (-d)^2 + c^2 = 1 \\
q_2 \cdot q_3 &= (-b)(-c) + ad + (-d)a + c(-b) = 0 \\
q_3 \cdot q_3 &= (-c)^2 + d^2 + a^2 + (-b)^2 = 1\,.
\end{aligned}$$

Altså er $\{q_1, q_2, q_3\}$ en ortonormal mengde.

b) Siden $\{q_1, q_2, q_3\}$ er en ortonormal basis for W er

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_W(e_1) &= (e_1 \cdot q_1)q_1 + (e_1 \cdot q_2)q_2 + (e_1 \cdot q_3)q_3 \\
&= aq_1 + (-b)q_2 + (-c)q_3 \\
&= \begin{bmatrix} a^2 + (-b)^2 + (-c)^2 \\ ab + (-b)a + (-c)d \\ ac + (-b)(-d) + (-c)a \\ ad + (-b)c + (-c)(-b) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 - d^2 \\ -cd \\ bd \\ ad \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

c) Ortogonalkomponenten i e_1 til W er

$$v = e_1 - \operatorname{proj}_W(e_1) = \begin{bmatrix} d^2 \\ cd \\ -bd \\ -ad \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} d \\ c \\ -b \\ -a \end{bmatrix}.$$

Anta først $d \neq 0$, og la

$$q_4 = (1/d)v = \begin{bmatrix} d \\ c \\ -b \\ -a \end{bmatrix}.$$

Da er q_4 ortogonal til W, og $q_4 \cdot q_4 = d^2 + c^2 + (-b)^2 + (-a)^2 = 1$. Det er lett å sjekke at også hvis $d = 0$ er q_4 ortogonal til W og $q_4 \cdot q_4 = 1$. Så q_4 er slik at $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ danner en ortonormal basis for $\mathbb{R}^4$.

Oppgave 4.

a) Må vise at $\langle p(x), p(x) \rangle \geq 0$ for alle $p(x) \in P$, og at $\langle p(x), p(x) \rangle = 0$ bare hvis $p(x) = 0$. Har at

$$\langle p(x), p(x) \rangle = (p_0 + p_1)^2 + (p_1 + p_2)^2 + \cdots + (p_{n-1} + p_n)^2 + p_n^2 \geq 0$$

siden alle kvadratene er ikke-negative. Hvis $\langle p(x), p(x)\rangle = 0$ må alle kvadratene være null, dvs.

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 &= 0 \\ p_1 + p_2 &= 0 \\ &\vdots \\ p_{n-1} + p_n &= 0 \\ p_n &= 0\,. \end{aligned}$$

Ved tilbakesubstitusjon er $p_0 = p_1 = \cdots = p_n = 0$, så $p(x) = 0$.

b) Skal regne ut $\langle p(x), q(x)\rangle$ med $p(x) = x^n$ og $q(x) = x^m$. Siden indreproduktet er symmetrisk kan vi anta $m \leq n$. Deler i fire tilfeller.

i) Hvis $m = n \geq 1$ er $p_0 = \cdots = p_{n-1} = 0$, $p_n = 1$, $q_0 = \cdots = q_{n-1} = 0$ og $q_n = 1$, så

$$\langle x^n, x^m\rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \cdots + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2\,.$$

ii) Hvis $m = n = 0$ er $p_0 = q_0 = 1$, så

$$\langle x^n, x^m\rangle = 1 \cdot 1 = 1\,.$$

iii) Hvis $m = n - 1$ er $p_0 = \cdots = p_{n-1} = 0$, $p_n = 1$, $q_0 = \cdots = q_{n-2} = q_n = 0$ og $q_{n-1} = 1$, så

$$\langle x^n, x^m\rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \cdots + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1\,.$$

iv) Hvis $m \leq n - 2$ er $p_0 = \cdots = p_{n-1} = 0$, $p_n = 1$, $q_0 = \cdots = q_{m-1} = q_{m+1} = \cdots = q_n = 0$ og $q_m = 1$, så

$$\langle x^n, x^m\rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \cdots + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0\,.$$

Dermed er alle formlene i oppgaven bekreftet.

c) Matrisen A er øvretriangulær, så determinanten er lik produktet av elementene på diagonalen, som er

$$\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1\,.$$

Siden $\det(A) = 1 \neq 0$ er A invertibel.

d) La $p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n \in W^\perp$. Da er $\langle p(x), x^m\rangle = 0$ for alle $m \geq 1$, siden $x^m \in W$. Skriver opp disse likningene for $1 \leq m \leq n+1$:

$$\begin{aligned} \langle p(x), x^1\rangle &= p_0 + 2p_1 + p_2 = 0 \\ \langle p(x), x^2\rangle &= p_1 + 2p_2 + p_3 = 0 \\ &\vdots \\ \langle p(x), x^n\rangle &= p_{n-1} + 2p_n = 0 \\ \langle p(x), x^{n+1}\rangle &= p_n = 0 \end{aligned}$$

På matriseform sier dette

$$A \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix} = 0$$

der A er $(n+1) \times (n+1)$ matrisen fra c). Siden A er invertibel må $p_0 = p_1 = \cdots = p_n = 0$, dvs. $p(x) = 0$.

e) Hvis $p(x) \in W$ vil $\langle p(x), q(x) \rangle = 0$ for alle $q(x) \in W^\perp$, så $p(x) \in (W^\perp)^\perp$. Altså er $W \subseteq (W^\perp)^\perp$.

Fra d) er $W^\perp = \{0\}$ så $(W^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = P$ siden alle vektorer i P står ortogonalt på 0. Så $W \neq (W^\perp)^\perp = P$ siden W er et ekte underrom i P.

SLUTT

© J. Rognes 1998