# LØSNINGSFORSLAG
# EKSAMEN MA 104 VÅREN 1998

John Rognes

**Oppgave 1.**

(a) Bringer $A$ til trappeform ved hjelp av radoperasjoner:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fortsetter til $A$ er på *redusert* trappeform, slik oppgaven ber om:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dimensjonen til nullrommet til $A$ er lik antall søyler uten ledende enere i den radreduserte matrisen, dvs. to. Så $\dim \mathrm{Nul}(A) = 2$.

(b) Rangen til $A$ er lik antall søyler (= kolonner) med ledende enere i den radreduserte matrisen, dvs. tre. Så rangen til $A = 3$. Søyle nummer 1, 2 og 4 i den radreduserte matrisen har ledende enere, så de tilsvarende søylene i $A$ danner basis for søylerommet (= kolonnerommet) til $A$.

Sølerommet har basis: $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$.

(c) Lar $B \in M_{m,n}$ og $C \in M_{n,k}$. Hvis $x \in \mathrm{Nul}(C)$ er $Cx = 0$ så $BCx = 0$, dvs. $x \in \mathrm{Nul}(BC)$. Derfor er $\mathrm{Nul}(C) \subseteq \mathrm{Nul}(BC)$.

Det følger at $\dim \mathrm{Nul}(C) \le \dim \mathrm{Nul}(BC)$.

Fra rangformelen er $\mathrm{rang}(C) = k - \dim \mathrm{Nul}(C)$ og $\mathrm{rang}(BC) = k - \dim \mathrm{Nul}(BC)$, siden $BC$ er en $m \times k$-matrise. Så

$$\mathrm{rang}(C) = k - \dim \mathrm{Nul}(C) \ge k - \dim \mathrm{Nul}(BC) = \mathrm{rang}(BC),$$

slik vi skulle vise.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

**Oppgave 2.**

(a) Regner ut fra definisjonen av prikkproduktet:

$$\begin{aligned}
u_1 \cdot u_2 &= 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1) = 0\,,\\
u_1 \cdot u_3 &= 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 = 0 \quad \text{og}\\
u_2 \cdot u_3 &= 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 = 0\,.
\end{aligned}$$

Altså er $\{u_1, u_2, u_3\}$ en ortogonal mengde av vektorer som alle er forskjellige fra null. Derfor er mengden $\{u_1, u_2, u_3\}$ lineært uavhengig.

(b) $\ker(T)$ består av vektorene $x \in \mathbb{R}^4$ slik at $T(x) = 0$, dvs.:

$$(x\cdot u_1)u_1 + (x\cdot u_2)u_2 + (x\cdot u_3)u_3 = 0$$

Siden vektorene $\{u_1, u_2, u_3\}$ er lineært uavhengige skjer dette hvis og bare hvis alle koeffisientene er null, dvs. $x\cdot u_1 = 0$, $x\cdot u_2 = 0$ og $x\cdot u_3 = 0$. Så $\ker(T)$ er ortogonalkomplementet til $V \subset \mathbb{R}^4$. Vi finner en basis for $V^\perp$ ved å identifisere det med nullrommet til $4\times 3$-matrisen med $u_1$, $u_2$ og $u_3$ som radvektorer. Radreduserer denne:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Setter den frie variablen (i 4. koordinat) lik 1, og substituerer tilbake for å finne en vektor som alene danner basis for $\ker(T)$.

$\ker(T) = V^\perp$ har basis $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

Fra rangformelen er $\dim\ker(T) + \dim T(\mathbb{R}^4)$ lik dimensjonen til definisjonsrommet for $T$, dvs. til $\mathbb{R}^4$. Så $\dim T(\mathbb{R}^4) = 4 - \dim\ker(T) = 4 - 1 = 3$. Dimensjonen til bildet $T(\mathbb{R}^4)$ er lik 3.

(c) Matrisen $A = T^S_B$ til $T$ relativt til standard (ordnet) basis $S = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ for $\mathbb{R}^4$ og $B = (u_1, u_2, u_3)$ er gitt som

$$T^S_B = [\, T(e_1)_B \quad T(e_2)_B \quad T(e_3)_B \quad T(e_4)_B \,]\,.$$

Regner ut

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= (e_1\cdot u_1)u_1 + (e_1\cdot u_2)u_2 + (e_1\cdot u_3)u_3 = 1\cdot u_1 + 1\cdot u_2 + 1\cdot u_3\\
T(e_2) &= (e_2\cdot u_1)u_1 + (e_2\cdot u_2)u_2 + (e_2\cdot u_3)u_3 = (-1)\cdot u_1 + 1\cdot u_2 + (-1)\cdot u_3\\
T(e_3) &= (e_3\cdot u_1)u_1 + (e_3\cdot u_2)u_2 + (e_3\cdot u_3)u_3 = 1\cdot u_1 + (-1)\cdot u_2 + (-1)\cdot u_3\\
T(e_4) &= (e_4\cdot u_1)u_1 + (e_4\cdot u_2)u_2 + (e_4\cdot u_3)u_3 = (-1)\cdot u_1 + (-1)\cdot u_2 + 1\cdot u_3
\end{aligned}$$

Koordinatene til $T(e_1)$ med hensyn til basisen $B$ er koeffisientene til henholdsvis $u_1$, $u_2$ og $u_3$ i uttrykket for $T(e_1)$. Så $T(e_1)_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tilsvarende er $T(e_2)_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $T(e_3)_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $T(e_4)_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dermed er

$$T_B^S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) For $v = r_1u_1 + r_2u_2 + r_3u_3 \in V$ med $r_1$, $r_2$ og $r_3 \in \mathbb{R}$, er $F(v) = r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3 \in \mathbb{R}^3$. Regner ut kvadratet av lengdene til $v$ og $F(v)$:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= v \cdot v = (r_1u_1 + r_2u_2 + r_3u_3) \cdot (r_1u_1 + r_2u_2 + r_3u_3) \\ &= r_1^2(u_1 \cdot u_1) + r_2^2(u_2 \cdot u_2) + r_3^2(u_3 \cdot u_3) \\ &= 4(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \end{aligned}$$

siden $\{u_1, u_2, u_3\}$ er ortogonal, og $u_i \cdot u_i = 4$ for $1 \le i \le 3$. Tilsvarende er

$$\begin{aligned} \|F(v)\|^2 &= F(v) \cdot F(v) = (r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3) \cdot (r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3) \\ &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \end{aligned}$$

siden $\{e_1, e_2, e_3\}$ er ortonormal. Altså er $\|F(v)\|^2 = (1/4)\|v\|^2$. De positive kvadratrøttene må da være like, dvs.

$$\|F(v)\| = (1/2)\|v\|$$

for alle $v \in V$. Vi kan, og må, derfor la $r = 1/2$.

Kjernen til $F$ er lik $\{0\}$, for $F(v) = 0$ impliserer $\|F(v)\| = (1/2)\|v\| = 0$, så $\|v\| = 0$ og dermed er $v = 0$. Så $F$ er en en-entydig lineærtransformasjon fra $V$ til $\mathbb{R}$. Siden $\{u_1, u_2, u_3\}$ er en basis for $V$ er $\dim V = 3$, så dimensjonen til bildet av $F$ er $\dim V - \dim \ker(F) = 3 - 0 = 3$, dvs. $F$ avbilder på hele $\mathbb{R}^3$. Altså avbilder $F$ vektorrommet $V$ en-entydig og på vektorrommet $\mathbb{R}^3$, og er derfor invertibel.

**Oppgave 3.**

(a) Vektorrommet $V$ er nullrommet til matrisen $[\,1 \quad -2 \quad 1\,]$, og har basis $B = \{b_1, b_2\}$ med

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Her er $T(b_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $T(b_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. For å finne koordinatvektorene $T(b_1)_B$ og $T(b_2)_B$ løser vi likningssystemene med koeffisientmatrise $[\,b_1 \quad b_2\,]$ og høyreside $T(b_1)$, henholdsvis $T(b_2)$. Løser disse samtidig ved å samle høyresidene i én matrise, og å bruke radreduksjon:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Så $T(b_1)_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $T(b_2)_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. (Alternativt kan man direkte innse at $T(b_1) = b_1 + 2b_2$ mens $T(b_2) = -b_2$.)

Altså er matrisen til $T$ relativt til $B$ og $B$ lik

$$A = T_B^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomet er

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

med to ulike røtter $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 1$. Altså har $A \in M_2$ to ulike egenverdier, og vi vet at $A$ er diagonaliserbar. Derfor finnes det en diagonal matrise som representerer lineæroperatoren $T\colon V \to V$.

Vi beregner basisen for $V$ av egenvektorer til $T$: Egenrommet $E_{-1}$ er nullrommet til

$$A - (-1)I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som har basis $\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. Egenrommet $E_1$ er nullrommet til

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som har basis $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. Dette er koordinatene med hensyn på basisen $B$ til vektorene i en basis for $V$ bestående av egenvektorer for $T$. De er

$$0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad 1 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektorrommet $V$ har en basis $\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ bestående av egenvektorer for lineæroperatoren $T\colon V \to V$.

(b) Vektorrommet $V$ har en ordnet basis $B = (b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = x^2)$. Da er $T(b_1) = 0$, $T(b_2) = 1 = b_1$ og $T(b_3) = 2x = 2 \cdot b_2$. Det følger at $T(b_1)_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(b_2)_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $T(b_3)_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Så

$$A = T_B^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomet er

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3$$

siden determinanten til en triangulær matrise er produktet av elementene på diagonalen. Den eneste egenverdien er derfor $\lambda = 0$, som har algebraisk multiplisitet lik tre.

Egenrommet $E_0$ er lik nullrommet til $A - 0I = A$, som må ha dimensjon $< 3$ siden $A \neq 0$. Altså er den geometriske multiplisiteten ekte mindre enn den algebraiske multiplisiteten for egenverdien $\lambda = 0$, og det følger at $A$ ikke er diagonaliserbar. Altså finnes det *ikke* noen basis $B$ for $V$ slik at lineæroperatoren $T\colon V \to V$ er representert ved en diagonal matrise.

**Oppgave 4.**

(a) La

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 13-\lambda & -5 \\ -5 & 13-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 26\lambda + 144 \end{aligned}$$

som har røtter

$$\frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 144}}{2} = \frac{26 \pm \sqrt{100}}{2} = 8 \text{ og } 18.$$

Egenverdiene til $A$ er $\lambda_1 = 8$ og $\lambda_2 = 18$.

Egenrommet $E_8$ til $\lambda_1$ er nullrommet til

$$A - 8I = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som er utspent av $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Egenrommet $E_{18}$ til $\lambda_2$ er nullrommet til

$$A - 18I = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som er utspent av $b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Derfor danner $\{b_1, b_2\}$ en ortogonal basis for $\mathbb{R}^2$, bestående av egenvektorer for $A$. Vi har $\|b_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ og $\|b_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, så en ortonormal basis er $\{q_1, q_2\}$ med

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{b_1}{\|b_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ q_2 &= \frac{b_2}{\|b_2\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kan derfor la

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

være den ortogonale matrisen, og

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$$

være den diagonale matrisen slik at $A = PDP^T$.

(b) Lar $S = (e_1, e_2)$ være standard basis i $\mathbb{R}^2$, og $E = (q_1, q_2)$. Da er koordinatskiftematrisen $C_S^E = (id)_S^E$ fra $E$ til $S$ gitt ved

$$\begin{aligned} C_S^E = (id)_S^E &= [\,(q_1)_S \quad (q_2)_S\,] = P \\ &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

siden kolonnene til $P$ er koordinatene til henholdsvis $q_1$ og $q_2$ med hensyn på standardbasisen $S$.

Da er koordinatskiftematrisen $C_E^S = (id)_E^S$ fra $S$ til $E$ den inverse matrisen

$$\begin{aligned} C_E^S = (id)_E^S &= P^{-1} = P^T \\ &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

siden $C_E^S = (C_S^E)^{-1}$ og $P$ er ortogonal.

(c) Den kvadratiske formen

$$13x_1^2 - 10x_1x_2 + 13x_2^2$$

har $A$ som symmetrisk koeffisientmatrise. Den ortogonale matrisen $P$ har determinant

$$\det(P) = (1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2 = 1$$

og er derfor en rotasjon. Skifter koordinater fra $x_1, x_2$ til $t_1, t_2$ ved substitusjonen $x = Pt$, eller

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}.$$

Setter inn i den kvadratiske formen, og får

$$13x_1^2 - 10x_1x_2 + 13x_2^2 = 8t_1^2 + 18t_2^2.$$

(Dette gjelder generelt, fra utregningen $x^TAx = (Pt)^TA(Pt) = t^T(P^TAP)t = t^TDt$.) I $t_1, t_2$-koordinater har kurven likning

$$8t_1^2 + 18t_2^2 = 72$$

som på normert form blir

$$\left(\frac{t_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{t_2}{2}\right)^2 = 1$$

siden $8/72 = 1/9 = (1/3)^2$ og $18/72 = 1/4 = (1/2)^2$.

Kurven er derfor en ellipse, som skjærer $t_1$-aksen i $t_1 = \pm 3$, og $t_2$-aksen i $t_2 = \pm 2$. Enhetsvektoren langs $t_1$-aksen har $t_1, t_2$-koordinater $(1, 0)$ og er lik vektoren $q_1$, som har $x_1, x_2$-koordinater $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Enhetsvektoren langs $t_2$-aksen har $t_1, t_2$-koordinater $(0, 1)$ og er lik vektoren $q_2$, som har $x_1, x_2$-koordinater $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. (Se også den vedlagte skissen.)

**Oppgave 5.**

(a) Viser at $B = \{v, T(v), T^2(v), T^3(v)\}$ er en mengde lineært uavhengige vektorer. Siden $\dim(V) = 4$ vil $B$ da være en basis for $V$.

Anta

$$(*) \qquad r_1 v + r_2 T(v) + r_3 T^2(v) + r_4 T^3(v) = 0\,.$$

Anvender $T$ flere ganger, og bruker at $T^4(v) = 0$:

$$\begin{aligned} r_1 T(v) + r_2 T^2(v) + r_3 T^3(v) &= 0 \\ r_1 T^2(v) + r_2 T^3(v) &= 0 \\ r_1 T^3(v) &= 0 \end{aligned}$$

Siden $T^3(v) \neq 0$ må $r_1 = 0$ fra den siste likningen. Da følger $r_2 = 0$ fra den foregående likningen, og $r_3 = 0$ fra den øverste av disse tre likningene. Til slutt følger da $r_4 = 0$ fra den opprinnelige likningen $(*)$.

Altså er vektorene $\{v, T(v), T^2(v), T^3(v)\}$ lineært uavhengige.

(b) La $b_1 = v$, $b_2 = T(v)$, $b_3 = T^2(v)$ og $b_4 = T^3(v)$, slik at $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ er en ordnet basis for $V$. Da er $T(b_1)_B = (b_2)_B = e_2$, $T(b_2)_B = (b_3)_B = e_3$, $T(b_3)_B = (b_4)_B = e_4$ og $T(b_4)_B = (0)_B = 0$. Så

$$A = T_B^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomet til denne matrisen er

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4$$

siden matrisen er triangulær. Den eneste roten er $\lambda = 0$, dvs. den eneste egenverdien til $T$ er $\lambda = 0$.

SLUTT