Om Fargelegging av Kart og Grafer i Planet

Populærvitenskapelig kilde:
Robin Wilson, "Four Colours Suffice/How the Map Problem was Solved," Penguin Books 2003, ISBN 0-141-00908-X.

1. Firefargeteoremet

Et **kart** består av en mengde **områder** i planet, slik at hvert område er avgrenset av en mengde **grensekurver**, og **grensekurvene** begynner og slutter i visse **møtepunkter**.

Vi forutsetter at det bare er endelig mange områder og grensekurver, og at hvert område og hver grensekurve er sammenhengende.

To områder som har en felles grensekurve kalles **naboområder**. Å **fargelegge** et kart betyr å gi hvert område en farge, slik at ingen par av naboområder har samme farge. Med andre ord, hvert par av naboområder er blitt gitt forskjellige farger.

Firefargeproblemet:
Kan ethvert kart fargelegges med ikke flere enn 4 farger?

Den 22. juli 1976 annonserte Kenneth Appel og Wolfgang Haken et bevis for at svaret er ja. Dette matematiske resultatet kalles Firefargeteoremet. Vi skal se på beviset av noen svakere resultater i samme retning.

2. En første forenkling

Vi kan anta at minst 3 grensekurver møtes i hvert møtepunkt. For hvis 2 grensekurver PQ og QR er de eneste som møtes i Q, så kan vi utelate møtepunktet Q og knytte PQ og QR sammen til en grensekurve PR. Hvis bare 1 grensekurve PQ begynner eller slutter i Q så kan vi utelate både PQ og Q fra kartet. Hvis ingen grensekurver begynner eller slutter i Q så kan vi utelate Q fra kartet. Ingen av disse endringene påvirker om kartet kan fargelegges med 4 farger eller ikke.

Omvendt kan vi anta at høyst 3 grensekurver møtes i hvert møtepunkt. For hvis 4 eller flere grensekurver møtes, så legger vi på et nytt, rundt område rundt møtepunktet. Det gamle møtepunktet erstattes da av et antall nye møtepunkter, like mange nye grensekurver, og et nytt kartområde. De gamle grensekurvene og kartområdene er blitt litt kortere/mindre. Nå møtes nøyaktig 3 grensekurver i hvert av de nye møtepunktene. Dersom det nye kartet kan fargelegges med 4 farger, så kan også det gamle kartet fargelegges slik, ved å krympe/utelate det nye runde området.

Vi oppfatter møtepunktene og grensekurvene i kartet som hjørnene og kantene i en graf tegnet i planet. Denne første forenklingen sier at vi kan anta at hvert hjørne i **grensegrafen** har grad 3. Så hvert møtepunkt er som Treriksrøysa mellom Norge, Sverige og Finland: 3 kartområder og 3 grensekurver møtes i hvert møtepunkt.

3. Eulers formel

Komplementet til grensegrafen i planet består av endelig mange sammenhengende områder. Noen av disse er kanskje ikke med i det opprinnelige kartet, men hvis vi tar med disse nye områdene, fargelegger det utvidede kartet med 4 farger, og så ser bort fra de nye områdene, så har vi fargelagt det opprinnelige kartet. Derfor er det tilstrekkelig å vise at slike kart som dekker over hele planet kan fargelegges, dvs. at områdene i kartet er de sammenhengende komponentene til komplementet til grensegrafen.

For slike kart oppdaget Leonhard Euler (1707-1783) i 1750 en sammenheng mellom antallet møtepunkter, antallet grensekurver og antallet områder i kartet. La:

- V (for vertices) være antallet møtepunkter (= hjørnene i grensegrafen),
- E (for edges) være antallet grensekurver (= kantene i grensegrafen), og
- F (for faces) være antallet områder i kartet, medregnet det uendelige området utenfor grensegrafen.

Da sier **Eulers formel** at

$$V - E + F = 2$$

for et kart i planet.

Dette er en slags generalisering av formelen

Antallet hjørner – Antallet kanter = 1

for et tre, som vi allerede har bevist. Eulers formel ble senere presist bevist av Augustin-Louis Cauchy, omkring 1813. Carl Friedrich Gauss kan også ha hatt et bevis.

Ett bevis for Eulers formel er basert på å først slå sammen 2 naboområder til ett, ved å utelate en grensekurve mellom dem. Da minsker F og E med 1, så $V - E + F$ er uendret. Dette gjentas til det bare er ett område igjen, som nødvendigvis er uendelig stort, og da er grensegrafen ett tre. Så nå er $V - E = 1$ og $F = 1$, dvs. $V - E + F = 2$.

4. Høyst 5 naboer

Lemma:
I et kart over hele planet, der hvert hjørne i grensegrafen har grad 3, finnes det minst ett kartområde som bare har 5 eller færre naboområder.

I et kart som dekker hele planet med uendelig mange sekskantede områder i "bikubemønster", har hvert hjørne grad 3 og hvert område 6 naboer. Men dette er et uendelig kart, og vi ser bare på endelige kart. Så dette er ikke et moteksempel.

Bevis: Lemmaet følger fra Eulers formel.

Anta, for å oppnå en selvmotsigelse, at det finnes et slikt kart der hvert område har minst 6 naboområder. Da har hvert kartområde minst 6 grensekurver, som hver seg er med på å avgrense 2 kartområder. Hvis vi teller de E grensekruvene sett fra de F kartområdene får vi 6F eller mer. Da regnes hver grensekurve med 2 ganger, en gang fra området på den ene siden av kurven, og en gang fra området på den andre siden. Derfor er

$$2E \geq 6F$$

(dersom vår antagelse om minst 6 naboer holder).

For grensegrafen vet vi fra før at summen av gradene til alle hjørnene er lik 2 ganger antallet kanter. Hvert hjørne har grad 3, så denne summen er både lik 3V og 2E.

$$3V = 2E$$

(ved den første forenklingen).

Vi uttrykker E og F ved hjelp av antallet møtepunkter (= hjørner) V, og finner $E = 3V/2$ og $F \leq 2E/6 = 3V/6 = V/2$. For å bruker Eulers formel regner vi ut at:

$$V - E + F \leq V - 3V/2 + V/2 = (1 - 3/2 + ½)V = 0$$

så Eulers formel $V - E + F = 2$ sier at $2 \leq 0$, som er umulig. Denne selvmotsigelsen beviser lemmaet.

Q.E.D.

5. A minimal criminal

Strategien for å vise firefargeteoremet for kart som i 5-nabolemmet er nå ved induksjon med hensyn på antallet kartområder. Begynnelsen på induksjonen, for $n \leq 4$, er i dette tilfellet triviell. Vi antar derfor induktivt at teoremet er bevist for alle kart med mindre enn n kartområder, og vil vise det for alle kart med nøyaktig n kartområder, der $n \geq 5$.

Det betyr at vi må betrakte et kart med F = n kartområder, der vi kan anta at alle kart med mindre enn n kartområder kan fargelegges med inntil 4 farger. Vi kan, igjen for å oppnå en selvmotsigelse, anta at akkurat dette kartet ikke kan fargelegges med 4 farger, dvs. at vi ser på et moteksempel til firefargeteoremet. Da er F = n det minste antallet områder som et slik moteksempel kan ha. Et slikt hypotetisk moteksempel med minimalt antall områder kalles "**a minimal criminal**". Vår oppgave er å betrakte en slik "minimal criminal" og å oppnå en selvmotsigelse, for eksempel ved å vise at dette kartet med n områder likevel kan fargelegges med inntil 4 farger.

Lemma:
I en "minimal criminal" finnes det ingen kartområder med 3 eller færre naboer.

Bevis:
Vi ser på et kart med n kartområder, med ett område A med 3 naboområder B, C og D. (Tilfellet med 0, 1 eller 2 naboområder er lettere, og utelates.) Vi antar at alle kart med færre enn n områder kan fargelegges med inntil 4 farger. Vi lager et slikt kart med n-1 områder ved å slå A og B sammen til ett større område "nye B", stryke grensekurven mellom A og B, å utelate møtepunktene henholdsvis mellom A, B og C, og mellom A, B og D, og å forlenge grensekurvene henholdsvis mellom B og C, og mellom B og D. Ved antagelsen kan dette kartet fargelegges med inntil 4 farger. Høyst 3 farger er da i bruk for områdene "nye B", C og D. Vi fargelegger da A med den 4. fargen, krymper "nye B" til B, og beholder resten av fargeleggingen.

Q.E.D.

6. Kempe-kjeder

I 1879 publiserte Alfred Bray Kempe (1849-1922) et "bevis" for firefargeteoremet, der han argumenterte for at det i en "minimal criminal" heller ikke finnes kartområder med 4 eller 5 naboer. Siden vi vet, fra 5-nabolemmaet, at det alltid finnes minst ett område med høyst 5 naboer, så viser dette at eksistensen av en "minimal criminal" gir en selvmotsigelse. Altså finnes det ingen moteksempler til firefargeteoremet, som avslutter beviset.

Uheldigvis inneholder Kempes bevis en feil, eller et gap, i den delen der han utelukker kartområder med 5 naboer i en "minimal criminal". Feilen ble funnet av Percy John Heawood (1861-1955), og publisert i 1890.

Den første delen av Kempes bevis er i orden. Det bygger på Jordans kurveteorem: at en enkel lukket kurve i planet deler planet i 2 deler: en indre begrenset del og en ytre uendelig del. Det er ingen vei mellom den indre og den ytre delen som unngår den lukkede kurven.

Teorem (Kempe):
I en "minimal criminal" finnes det ingen kartområder med 4 (eller færre) naboer.

Bevis:
Vi betrakter et endelig kart over hele planet, med n kartområder, der nøyaktig 3 grensekurver møtes i hvert møtepunkt. Vi antar at kartet ikke kan fargelegges med inntil 4 farger, men at ethvert kart med færre enn n områder kan fargelegges med inntil 4 farger. Vi har allerede vist at det da ikke finnes noen kartområder med 3 eller færre naboer. Anta, for å oppnå en selvmotsigelse, at det finnes et kartområde S (for square) med akkurat 4 naboområder A, B, C og D. Vi antar at A, B, C og D forekommer i denne rekkefølgen rundt S

Ved å innlemme S i for eksempel A får vi et kart med n-1 områder, som vi har antatt kan fargelegges. Ved å utelate S, og å krympe A tilbake til den opprinnelige størrelsen, så får vi fargelagt alle områdene i det opprinnelige kartet, med unntak av S.

Dersom mindre enn 4 farger er brukt til å fargelegge naboområdene A, B, C og D, så gir vi S den 4. fargen, og er ferdige. Problemet er hva som skjer dersom A, B, C og D er gitt 4 forskjellige farger. Da må fargeleggingen av komplementet til S endres, slik at en av A, B, C eller D skifter farge. Dermed er bare 3 av fargene i bruk rundt S, og vi kan gi S den 4. fargen.

Se først på alle områdene i kartet uten S som har samme farge som A eller C. Innen denne delen av kartet, se på de områdene som er forbundet med en vei til A, gjennom slike områder med samme farge som A eller C. Disse områdene kaller vi Kempe-kjeden fra A.

Nå er det 2 muligheter: enten så knytter Kempe-kjeden A til C, eller så gjør den ikke det.

I det siste tilfellet kan vi bytte farge på alle områdene i Kempe-kjeden fra A, slik at områdene der som hadde samme farge som A får samme farge som C, og omvendt. Da har vi fortsatt en fargelegging av kartet uten S, men nå er bare 3 farger i bruk rundt S, for fargene til B, C og D er uendret, og vi kan utvide fargeleggingen av hele kartet ved å gi S den 4. fargen (som A hadde før).

I det første tilfellet finnes en enkel vei i kartet uten S fra A til C gjennom områder med samme farge som A eller C. Sammen med en vei fra A gjennom S til C gir dette en enkel løkke i planet, som ikke møter områdene B og D. Ved Jordans kurveteorem finnes det derfor ingen vei fra B til D i kartet uten S, som ikke møter Kempe-kjeden fra A til C.

Se så på Kempe-kjeden fra B, dvs. alle områdene som har samme farge som B eller D, og som kan knyttes til B med en vei gjennom slike områder. Siden A og C har forskjellige farger fra B og D, så har vi nettopp sett at D ikke kan nås fra B på denne måten, altså at D ikke er med i Kempe-kjeden fra B.

Vi kan derfor bytte farge på alle områdene i Kempe-kjeden fra B, slik at områdene der som hadde samme farge som B får samme farge som D, og omvendt. Da har vi fortsatt en fargelegging av kartet uten S, men nå er bare 3 farger i bruk rundt S, for fargene til A, C og D er uendret, og vi kan utvide fargeleggingen av hele kartet ved å gi S den 4. fargen (som B hadde før).

Q.E.D.

Heawood viste samtidig hvordan disse argumentene er tilstrekkelige til å bevise:

Femfargeteoremet:
Ethvert kart i planet kan fargelegges med høyst 5 farger.

Dette kan nå være en overkommelig oppgave for leseren.

7. Hamiltonske sykler

Peter Guthrie Tait (1831-1901) la i 1880 frem en alternativ metode for å vise firefargeteoremet, basert på Hamiltonske løkker i grafer, dvs. lukkede kurver som besøker hvert hjørne nøyaktig en gang.

Vi ser på endelige kart, der hvert hjørne i grensegrafen har grad 3. Med samme notasjon som før oppfyller antallet hjørner, V, og antallet kanter, E, likningen

$$3V = 2E$$

så 3V må være ett partall. Det følger at V må være et partall, så vi kan skrive $V = 2m$ for et helt tall m. Da er $2E = 3V = 6m$, så $E = 3m$.

En Hamiltonsk løkke på grensegrafen må besøke hvert av de $V = 2m$ hjørnene en gang, så dette må være en løkke av lengde 2m, dvs. en lukket vei som består av 2m kanter. Det gjenstår da $3m – 2m = m$ kanter i grensegrafen.

Lemma:
Anta at grensegrafen er Hamiltonsk. Da kan vi merke alle **kantene** i grensegrafen med 3 forskjellige tegn, alfa, beta og gamma, slik at tre kanter med forskjellige tegn møtes i hvert hjørne.

Bevis:
Dette gjøres ved å følge den Hamiltonske løkken, og å merke de 2m kantene der alfa og beta, annenhver gang. De resterende kantene merkes gamma. Hvert hjørne i grafen besøkes en gang, så det er en innkommende og en utgående kant på den Hamiltonske løkken som møtes der, og disse er merket alfa og beta, eller omvendt. Den tredje kanten som møtes der er ikke på den Hamiltonske løkken, så den er merket gamma.

Q.E.D.

Gitt en slik merking av kantene er det enkelt å firefargelegge kartet. Fargelegg ett område med en av fire farger A, B, C og D. Da får resten av områdene farger bestemt ved følgende krav:

- En kant merket alfa er grense mellom to områder farget A og D, eller to områder farget B og C.

- En kant merket beta er grense mellom to områder farget B og D, eller to områder farget A og C.
- En kant merket gamma er grense mellom to områder farget C og D, eller to områder farget A og B.

Dette gir en veldefinert firefarging av kartet. Betingelsen at tre kanter med forskjellig merking møtes i hvert hjørne, og kravene ovenfor, sikrer at det ikke er noen konflikt med hensyn til hvilken farge et område skal ha. Siden hver kant har et merke, så har alle par av naboområder forskjellige farger.

Tait trodde at alle ”relevante” grensegrafer der hvert hjørne har grad 3 var Hamiltonske, dvs. tillot en slik Hamiltonsk sykel. Da ville vi kunne merke alle kantene med alfa, beta og gamma, og farge alle områdene med fire farger A, B, C og D, og firefargeteoremet ville være bevist.

Men, selv om kravene ovenfor viser en fin form for symmetri, så tok også Tait feil.

For en populærvitenskapelig presentasjon av det faktiske beviset av firefargeteoremet, som i siste omgang ble utviklet av Appel og Haken fra 1972 til 1976, vises det til Wilsons bok.

John Rognes
Oslo, 17. april 2005