MAT1300 – Analyse I – 13. januar 2009

Definisjon (Kontinuitet): La F = R (eller F= Q). La E \subset F være en delmengde, og la f : E \to F være en funksjon. La x \in E. Vi sier at f er kontinuerlig i x dersom

for hver \epsilon > 0 i F finnes det en \delta = \delta(\epsilon) > 0 i F

slik at

for alle y \in E med |y-x| < \delta er |f(y)-f(x)| < \epsilon .

Med andre ord, for hver y i (x-\delta, x+delta) \cap E er f(y) i (f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon). Hvis f er kontinuerlig i hvert punkt x \in E, så sier vi at f er kontinuerlig på E, eller bare at f er kontinuerlig.

Lemma: La F = R (eller F = Q), la E \subset F og la x \in E. La f, g : E \to F være funksjoner.

(i) Hvis det finnes en C \in F slik at f(t) = C for alle t \in E, så er f kontinuerlig på E.
(ii) Hvis f og g er kontinuerlige i x, så er f+g kontinuerlig i x, der (f+g)(t) = f(t) + g(t) for alle t \in E.
(iii) Hvis f er kontinuerlig i x og k \in F, så er kf kontinuerlig i x, der (kf)(t) = k.f(t) for alle t \in E.
(iv) Hvis f og g er kontinuerlige i x, så er fg kontinuerlig i x, der (fg)(t) = f(t).g(t) for alle t \in E.
(v) Hvis f er kontinuerlig i x, og f(t) \ne 0 for alle t \in E, så er 1/f kontinuerlig i x, der (1/f)(t) = 1/f(t) for alle t \in E.

Bevis for (ii): Gitt \epsilon>0 finnes en \delta_1(\epsilon)>0 slik at |f(y)-f(x)|<\epsilon for alle y \in E med |y-x|<\delta_1(\epsilon), og det finnes en \delta_2(\epsilon)>0 slik at |g(y)-g(x)|<\epsilon for alle y \in E med |y-x|<\delta_2(\epsilon). La \delta_0(\epsilon) = min\{\delta_1(\epsilon/2), \delta_2(\epsilon/2)\}. For alle y \in E med |y-x|<\delta_0(\epsilon) er da |f(y)-f(x)|<\epsilon/2 og |g(y)-g(x)|<\epsilon/2, så |(f+g)(y) – (f+g)(x)| = |(f(y) + g(y)) – (f(x) + g(x))| = |(f(y)-f(x)) + g(y)-g(x))| \le |f(y)-f(x)| + |g(y)-g(x)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. Altså er (f+g) kontinuerlig i x.

Eksempel: La E = F og la f : F \to F være gitt ved f(t) = t for alle t \in F. Da er f kontinuerlig.

Korollar: La E = F og la f : F \to F være et polynom f(t) = c_n t^n + ... + c_1 t + c_0, der c_0, ..., c_n \in F. Da er f kontinuerlig.

Lemma: La F = R (eller F = Q), la E \subset F og la x \in E. La f : E \to F og anta at f er kontinuerlig i x. La (x_n)_{n=1}^\infty være en følge i E, slik at x_n \to x når n \to \infty. Da vil f(x_n) \to f(x) når n \to \infty.

Bevis: Vi vet at f er kontinuerlig i x, så gitt $\epsilon>0$ finnes $\delta(\epsilon)>0$ slik at $|f(y)-f(x)|<\epsilon$ for alle $y \in E$ med $|y-x| < \delta(\epsilon)$. Videre konvergerer $(x_n)_n$ mot x, så gitt $\delta>0$ finnes $n_1(\delta)$ slik at for alle $n \ge n_1(\delta)$ er $|x_n – x| < \delta$. [Har byttet ut \epsilon med \delta og n_0 med n_1.]
Gitt $\epsilon>0$ lar vi $n_0(\epsilon) = n_1(\delta(\epsilon))$. For alle $n \ge n_0(\epsilon)$ vil da $|x_n-x| < \delta(\epsilon)$, så $|f(x_n)-f(x)|<\epsilon$. Altså konvergerer $f(x_n)$ mot $f(x)$.

Fundamentalaksiomet: La $(a_n)_n$ være en tallfølge i R, så $a_n \in R$ for hver $n \in N$. Anta at følgen er voksende, så $a_n \le a_{n+1}$ for hver n, og at følgen er oppad begrenset, så det finnes en $A \in R$ slik at $a_n \le A$ for alle n. Da finnes en $a \in R$ slik at $a_n \to a$ når $n \to \infty$.

$a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le A$

Kortere sagt: “En voksende, oppad begrenset følge i R konvergerer mot en grense.”

Vårt aksiomatiske utgangspunkt for reell analyse er at R er en ordnet kropp som oppfyller fundamentalaksiomet. Alternativt kan man definere reelle tall som desimaltall, og som en del av konstruksjonen må man sjekke at enhver voksende, oppad begrenset følge av desimaltall konvergerer mot et slik desimaltall. Typisk vil de enkelte sifferene i desimaltalltallene gradvis stabilisere seg til en grenseverdi, men det er en del spesialtilfeller å ta hensyn til, som illustrert ved 0,999... = 1,000..., og ved følger av negative tall.

Lemma: En avtagende, nedad begrenset følge i R konvergerer mot en grense.

Bevis: La $(b_n)_n$ være en avtagende, nedad begrenset følge i R. Så $b_n \ge b_{n+1}$ for hver n, og det finnes en $B \in R$ slik at $b_n \ge B$ for alle n. La $a_n = -b_n$. Da er $(a_n)_n$ en voksende, oppad begrenset følge. For $a_n = -b_n \le -b_{n+1} = a_{n+1}$. La $A = -B$. Da er $a_n = -b_n \le -B = A$ for alle n. Ved fundamentalaksiomet har $(a_n)_n$ en grense, dvs. det finnes en $a \in R$ slik at $a_n \to a$ når $n \to \infty$. Da vil $b_n = -a_n \to -a = b$ når $n \to \infty$. Altså konvergerer $(b_n)_n$.

Teorem: $1/n \to 0$ når $n \to \infty$.

Bevis: Tallfølgen $(b_n)_n$ gitt ved $b_n = 1/n$ er en avtagende, nedad begrenset følge i R. For $1/n \le 1/(n+1)$ og $1/n \ge 0$ for alle $n \in N$. Ved lemmaet har denne følgen en grense $g \in R$, så $1/n \to g$ når $n \to \infty$. Tallfølgen $(c_j)_j = (b_{2j})_j$ gitt ved $c_j = b_{2j} = 1/2j$ er en delfølge av $(b_n)_n$, så den er også konvergent, med samme grense. så $1/2j \to g$ når $n \to \infty$. På den annen side er $(1/2j)_j$ produktet av to følger, nemlig den konstante følgen $(1/2)_j$ med grense ½, og følgen $(1/j)_j$ med grense g. Altså vil $1/2j \to (½).g = g/2$ når $j \to \infty$. Siden grensen er entydig må $g = g/2$, som impliserer $g=0$.

Korollar (Arkimedes' aksiom): For hvert reelt tall $K>0$ finnes det et naturlig tall n med $n > K$. Det finnes ikke noe reelt tall K slik at $K \ge n$ for alle naturlige tall n.

Bevis: Teoremet forteller oss at gitt $\epsilon>0$ finnes $n_0(\epsilon)$ slik at $|1/n – 0| < \epsilon$ for alle $n \ge n_0(\epsilon)$. Med andre ord, $1/n < \epsilon$ for alle $n \ge n_0(\epsilon)$. Gitt $K>0$ la $\epsilon = 1/K$. Da er $\epsilon>0$, så vi kan la $n = n_0(\epsilon) = n_0(1/K)$. Da er $1/n < \epsilon = 1/K$, så $n > K$, som vi skulle vise.

Det finnes eksempler på ordnede kropper F som ikke oppfyller Arkimedes' aksiom, og derfor heller ikke oppfyller fundamentalaksiomet. Se Exercise 1.31. Dette eksempelet er ikke pensum. Spesielt kan man ikke bare bruke regnereglene i en ordnet kropp (for +, -, ., / og $\ge$) for å vise Arkimedes' aksiom. Arkimedes' innså dette, og antok vårt korollar, f.eks. for å kunne si at $1/n \to 0$ når $n \to \infty$. Vi tar i stedet utgangspunkt i den sterkere hypotesen gitt ved fundamentalaksiomet.