MAT1300 – Analyse I – 14. april 2009

11.1 Kompletthet

Definisjon 11.1: La (X, d) være et metrisk rom. En følge $(x_n)_n$ av punkter i X kalles en **Cauchy-følge** i (X, d) dersom det for hver $\epsilon>0$ finnes en $n_0(\epsilon)$ slik at for alle $p, q \ge n_0(\epsilon)$ er $d(x_p, x_q) < \epsilon$.

Merk at egenskapen at $(x_n)_n$ er Cauchy avhenger av metrikken d på X.

Lemma: Enhver konvergent følge i (X, d) er Cauchy.

Definisjon 11.2: Et metrisk rom (X, d) er **komplett** dersom hver Cauchy-følge i (X, d) er konvergent.

Hvis $(V, ||.||)$ er et normert vektorrom, med tilhørende metrikk $d(x,y) = ||y-x||$, så sier vi at $(x_n)_n$ er en Cauchy-følge i $(V, ||.||)$ hvis og bare hvis den er en Cauchy-følge i (V, d).

Vi viste i Teorem 4.68 at enhver Cauchy-følge i R^m er konvergent. Altså er R^m med den Euklidiske metrikken et komplett metrisk rom.

Lemma: La $||.||_1$ og $||.||_2$ være to Lipschitz ekvivalente normer på samme vektorrom V. Da er $(V, ||.||_1)$ komplett hvis og bare hvis $(V, ||.||_2)$ er komplett.

Bevis: Lipschitz-ekvivalens betyr at det finnes konstanter $K, L > 0$ med

$$L ||x||_1 \le ||x||_2 \le K ||x||_1$$

for alle $x \in V$. Da er en følge $(x_n)_n$ Cauchy i $(V, ||.||_1)$ hvis og bare hvis den er Cauchy i $(V, ||.||_2)$, og tilsvarende er den konvergent i $(V, ||.||_1)$ hvis og bare hvis den er konvergent i $(V, ||.||_2)$. QED.

Vi viste i Teorem 10.45 at alle normer på R^m er Lipschitz-ekvivalente. Altså er R^m, med metrikken avledet fra enhver norm, et komplett metrisk rom. Vi skal snart se eksempel på uendelig-dimensjonale normerte vektorrom som ikke er komplette. I slike normerte vektorrom avviker analysen en del fra den vi er kjent med i R og R^m.

Lemma 11.4: La (X, d) være et komplett metrisk rom, og la $E \subset X$ være en delmengde. Definer er metrikk d_E på E ved $d_E(x, y) = d(x, y)$ for $x, y \in E$. Da er (E, d_E) et komplett metrisk rom hvis og bare hvis E er lukket i X.

Bevis: La $(x_n)_n$ være en Cauchy-følge i (E, d_E). Da er $(x_n)_n$ en Cauchy-følge i (X, d), og konvergerer derfor mot et punkt x i X, siden (X, d) er antatt å være komplett. Hvis E er lukket så er x i E, og $d_E(x_n, x) = d(x_n, x) \to 0$ når $n \to \infty$, så x_n konvergerer mot x i E. Altså er (E, d_E) komplett.

Omvendt, la $(x_n)_n$ være en følge i E som konvergerer mot x i (X, d). Da er $(x_n)_n$ en Cauchy-følge i (X, d), og derfor også en Cauchy-følge i (E, d_E). Hvis (E, d_E) er komplett vil så $x_n \to y$ når $n \to \infty$ for en $y \in E$. Siden $d(x_n, y) = d_E(x_n, y) \to 0$ og $d(x_n, x) \to 0$ når $n \to \infty$ må $x=y$, ved entydighet av grenser (som følger fra trekantulikheten). Altså er $x \in E$, og E er lukket i (X, d). QED.

Eksempel: $[a, b]$ er komplett, mens $(a, b]$ er ikke komplett, med hensyn på den vanlige metrikken $d(x,y) = |y-x|$ i R.

For å vise at et metrisk rom (X, d) ikke er komplett, må vi finne en Cauchy-følge $(x_n)_n$ som ikke er konvergent. Det siste betyr at for hver $x \in X$ må antagelsen $x_n \to x$ lede til en selvmotsigelse. Det er nok å vise at for hver $x \in X$ finnes en $\delta(x)>0$ slik at $d(x_n, x) \ge \delta(x)$ for uendelig mange $n \in N$.

Eksempel 11.6: La s_{00} være vektorrommet av relle tallfølger $a = (a_m)_m$ der bare endelig mange a_m er ulik 0. Normen $||.||_1$ definert ved

$$||a||_1 = \sum_m |a_m|$$

er ikke komplett.

Bevis: La $a(n) = (1, 1/2, 1/4, ..., 1/2^n, 0, ...)$ for $n \ge 1$. Hvis $p \le q$ er

$$a(p) - a(q) = (0, \dots, 0, 1/2^{p+1}, \dots, 1/2^q, 0, \dots)$$

så

$$||a(p) - a(q)||_1 = \sum_{m=p+1}^q 1/2^m < 1/2^p .$$

Det følger at $(a(n))_n$ er en Cauchy-følge i $(s_{00}, ||.||_1)$, siden gitt $\epsilon>0$ finnes en $n_0 = n_0(\epsilon)$ slik at $1/2^{n_0} < \epsilon$. Da er $||a(p) - a(q)||_1 < 1/2^p \le 1/2^{n_0} < \epsilon$ for alle $p, q \ge n_0(\epsilon)$. Vi påstår at følgen $(a(n))_n$ ikke er konvergent i s_{00}. Anta at $a(n) \to b$ når $n \to \infty$. Da er $b_m = 0$ for alle tilstrekkelig store m, si $m \ge M$ for en fast $M \in N$. Det følger at

$$a(n) - b = (?, ..., ?, 1/2^M, ..., 1/2^n, 0, ...)$$

for $n \ge M$, slik at

$$||a(n) - b||_1 \ge \sum_{m=M}^n 1/2^m \ge 1/2^M$$

for alle $n \ge M$. Spesielt kan ikke $||a(n) - b||_1 \to 0$ når $n \to \infty$, så $(a(n))_n$ kan ikke konvergere mot b i s_{00}. Siden b var vilkårlig valgt kan ikke $(a(n))_n$ være konvergent i $(s_{00}, ||.||_1)$. QED.

Oppgave 11.7: La $a < b$ i R, og la $C([a,b])$ være vektorrommet av kontinuerlige funksjoner $f \: [a,b] \to R$. La

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt .$$

Da er $||.||_1$ en norm på $C([a,b])$, siden

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt \ge 0$$

for alle f, med likhet hvis og bare hvis $f = 0$ (ved Lemma 8.33). Videre er

$$||k f||_1 = \int_a^b |kf(t)|\, dt = |k| \int_a^b |f(t)|\, dt = |k|\, ||f||_1$$

for alle $k \in R$, og

$$||f+g||_1 = \int_a^b |f(t)+g(t)|\, dt \le \int_a^b |f(t)| + |g(t)|\, dt$$

$$= \int_a^b |f(t)|\, dt + \int_a^b |g(t)|\, dt = ||f||_1 + ||g||_1 .$$

Lemma 11.8: $(C([a,b]), ||.||_1)$ er ikke komplett.

Bevis: For å forenkle notasjonen antar vi at $[a,b] = [-1,1]$. Vi vil finne en Cauchy-følge $(f_n)_n$ i $C([-1,1])$ som ikke er konvergent. La

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{for } -1 \le t \le -1/n , \\ nt & \text{for } -1/n \le t \le n , \\ 1 & \text{for } 1/n \le t \le 1 . \end{cases}$$

Da er hver f_n kontinuerlig. Hvis $p \le q$ så er

$$|f_p(t) - f_q(t)| = |-1-(-1)| = 0$$

for $-1 \le t \le -1/p$, og

$$|f_p(t) - f_q(t)| = |1-1| = 0$$

for $1/p \le t \le 1$, mens

$$|f_p(t) - f_q(t)| \le 1$$

for alle $t \in [-1/p,1/p]$. Altså er

$$||f_p - f_q||_1 = \int_{-1}^1 |f_p(t) - f_q(t)|\, dt$$

$$= \int_{-1}^{-1/p} |f_p(t) - f_q(t)|\, dt$$

$$+ \int_{-1/p}^{1/p} |f_p(t) - f_q(t)|\, dt$$

$$+ \int_{1/p}^1 |f_p(t) - f_q(t)|\, dt$$

$$\le 0 + (2/p) + 0 = 2/p$$

som går mot 0 når $p \to \infty$. Det følger at $(f_n)_n$ er Cauchy i $(C([-1,1]), ||.||_1)$.

Vi skal så vise at $(f_n)_n$ ikke er konvergent i $(C([-1,1]), ||.||_1)$. Anta, for å oppnå en motsigelse, at det finnes en g i $C([-1,1])$ slik at $||f_n - g||_1 \to 0$ når $n \to \infty$. Merk at for $n \ge M$ er

$$\int_{1/M}^1 |g(t) - 1| dt = \int_{1/M}^1 |g(t) - f_n(t)| dt$$

$$\le \int_{-1}^1 |g(t) - f_n(t)| dt = ||g-f_n||_1$$

som går mot 0 når $n \to \infty$. Det følger at

$$\int_{1/M}^1 |g(t) - 1| dt = 0$$

slik at $g(t) = 1$ for alle $1/M \le t \le b$. Siden M er vilkårlig må $g(t) = 1$ for alle $0 < t \le 1$. Ved et tilsvarende argument er $g(t) = -1$ for alle $-1 \le t < 0$. Da kan g ikke være kontinuerlig i $t=0$. Altså har $(f_n)_n$ ingen grense i $C([-1,1])$. QED.