MAT1300 – Analyse I – 16. februar 2009

4.6. Cauchy-følger.

Vi har definert hva det vil si at en følge $(x_n)_n$ konvergerer mot en grense X, i R eller R^m. Nå ønsker vi å karakterisere hvilke følger $(x_n)_n$ som er konvergente, uten først å ha sagt hva grensen skal være, dvs. uten å spesifisere X.

Definisjon: En følge $(x_n)_n$ i R^m kalles en Cauchy-følge dersom det for hver $\epsilon>0$ finnes et naturlig tall $n_0(\epsilon)$ slik at for alle $p, q \ge n_0(\epsilon)$ er $||x_p - x_q|| < \epsilon$.

Lemma: Enhver konvergent følge er en Cauchy-følge.

Bevis: Anta at $(x_n)_n$ konvergerer mot X. Da finnes for hver $\epsilon>0$ en $n_1(\epsilon)$ slik at for alle $n \ge n_1(\epsilon)$ er $||x_n - X|| < \epsilon$. La så $n_0(\epsilon) = n_1(\epsilon/2)$. For alle $p, q \ge n_0(\epsilon)$ er $||x_p - X|| < \epsilon/2$ og $||x_q - X|| < \epsilon/2$, så ved trekantuilkheten er $||x_p - x_q|| \le ||x_p - X|| + ||x_q - X|| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Altså er $(x_n)_n$ en Cauchy-følge. QED.

Teorem: Enhver Cauchy-følge i R^m er konvergent.

Bevis: La $(x_n)_n$ være en Cauchy-følge i R^m. Vi viser først at $(x_n)_n$ er begrenset, finner så en konvergent delfølge $(x_{n(j)})_j$ ved hjelp av Bolzano--Weierstrass' sats, og bruker så dette til å vise at den opprinnelige følgen konvergerer.

Gitt $\epsilon>0$ finnes en $n_0(\epsilon)$ slik at for $p,q \ge n_0(\epsilon)$ er $||x_p - x_q|| \le \epsilon$. Bruker dette for $\epsilon=1$, og lar $N = n_0(1)$. For $n \ge N$ er da $||x_n - x_N|| \le 1$, så $||x_n|| \le ||x_N|| + 1$. Det følger at

$$||x_n|| \le \max_{1 \le p \le N} ||x_p|| + 1$$

for alle n, så $(x_n)_n$ er begrenset.

Ved Bolzano--Weierstrass' sats finnes en strengt voksende følge $n(1) < n(2) < \dots$ og en $X \in R^m$ slik at delfølgen $(x_{n(j)})_j$ konvergerer mot X. Med andre ord, gitt $\epsilon>0$ finnes $j_0(\epsilon)$ slik at for alle $j \ge j_0(\epsilon)$ er $||x_{n(j)} - X|| < \epsilon$.

Skal så vise at $x_n \to X$ når $n \to \infty$. La $\epsilon>0$. Vil estimere $||x_n - X||$ ved hjelp av et tredje punkt $x_{n(j)}$ og trekantulikheten. Anta derfor at $n \ge n_0(\epsilon/2)$, og velg j så stor at $n(j) \ge n_0(\epsilon/2)$ og $j \ge j_0(\epsilon/2)$. Da er

$$||x_n - X|| \le ||x_n - x_{n(j)}|| + ||x_{n(j)} - X||$$

$$< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon ,$$

som ønsket. QED.

Vi har bevist:

Teorem (**Generelt konvergenskriterium**): En følge i R^m er konvergent hvis og bare hvis den er en Cauchy-følge.

Definisjon: La $(a_j)_j$ være en følge i R^m. La

$$s_n = \sum_{j=1}^n a_j = a_1 + ... + a_n$$

for hver $n\ge1$. Følgen $(s_n)_n$ kalles en **rekke** i R^m. Leddene s_n kalles **delsummer** i rekken. Dersom følgen $(s_n)_n$ konvergerer mot en grense S når $n \to \infty$, så sier vi at rekken

$$\sum_{j=1}^\infty a_j$$

konvergerer mot S. Hvis følgen $(s_n)_n$ ikke konvergerer, så sier vi at rekken $\sum_{j=1}^\infty a_j$ er **divergent**.

Enhver følge $(s_n)_n$ kan oppfattes som en rekke, ved å la $a_1 = s_1$ og

$$a_j = s_j - s_{j-1}$$

for alle $j \ge 2$. Da er $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$, og $(s_n)_n$ konvergerer mot S hvis og bare hvis rekken $\sum_{j=1}^\infty a_j$ konvergerer mot S.

Lemma: Rekken $\sum_{j=1}^\infty a_j$ konvergerer hvis og bare hvis følgen av delsummer $(\sum_{j=1}^n a_j)_n$ er en Cauchy-følge, dvs. dersom det gitt $\epsilon>0$ finnes en $n_0(\epsilon)$ slik at for alle $q > p \ge n_0(\epsilon)$ er $||\sum_{j=p+1}^q a_j|| < \epsilon$.

Bevis: Dette følger fra det generelle konvergenskriteriet, siden $s_q - s_p = \sum_{j=p+1}^q a_j$. QED.

Teorem: La $(a_j)_j$ være en følge i R^m. Dersom rekken $\sum_{j=1}^\infty ||a_j||$ konvergerer, så er rekken $\sum_{j=1}^\infty a_j$ konvergent.

Bevis: Den konvergente rekken $\sum_{j=1}^\infty ||a_j||$ må være en Cauchy-følge, så gitt $\epsilon>0$ finnes $n_0(\epsilon)$ slik at for alle $q > p \ge n_0(\epsilon)$ er $\sum_{j=p+1}^q ||a_j|| < \epsilon$. Fra trekantulikheten følger da at

$$||\sum_{j=p+1}^q a_j|| \le \sum_{j=p+1}^q ||a_j|| < \epsilon$$

så følgen $(\sum_{j=1}^n a_j)_n$ av delsummer i rekken $\sum_{j=1}^\infty a_j$ er en Cauchy-følge. Derfor er denne rekken konvergent. QED.

Definisjon: La $(a_j)_j$ være en følge i R^m. Vi sier at rekken $\sum_{j=1}^\infty a_j$ er **absolutt konvergent** dersom rekken $\sum_{j=1}^\infty ||a_j||$ konvergerer.

Dersom $m=1$ er dette rekken dannet av absoluttverdiene $|a_j|$ av den opprinnelige følgen. Teoremet ovenfor sier at absolutt konvergens impliserer konvergens.

For å undersøke absolutt konvergens er følgende test ofte nyttig.

Teorem (Sammenligningstesten): La $(a_j)_j$ og $(b_j)_j$ være følger i R, slik at $0 \le b_j \le a_j$ for alle j. Dersom rekken $\sum_{j=1}^\infty a_j$ konvergerer, så konvergerer også $\sum_{j=1}^\infty b_j$.

Bevis: Følgen av delsummer $\sum_{j=1}^n a_n$ er konvergent og derfor oppad begrenset. Da er følgen av delsummer $\sum_{j=1}^n b_n$ voksende og oppad begrenset, og derfor konvergent. QED.

Følgende er velkjent:

Lemma: La $r \in R$.
(i) $\sum_{j=0}^n r^j = (1 - r^{n+1})/(1-r)$ for $r \ne 1$.
(ii) Den **geometriske rekken** $\sum_{j=0}^\infty r^j$ konvergerer hvis og bare hvis $|r|<1$, og da er grensen lik $1/(1-r)$.

Vi identifiserer C med R^2, ved at $z = x + iy$ svarer til (x,y). Da er $|z| = ||(x,y)||$. Gitt en følge $(a_n)_n$ i C og et kompleks tall $z \in C$ kan vi danne følgen $(a_n z^n)_n$ i C og **potensrekken** $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$. Vi er interessert i for hvilke z denne rekken konvergerer, når følgen $(a_n)_n$ er gitt. Mengden av slike $z \in C$ danner konvergensområdet for rekken.

Lemma: La $(a_n)_n$ være en følge i C. Hvis rekken

$$\sum_{n=0}^\infty a_n z_0^n$$

konvergerer for en gitt $z_0 \in C$, så konverger rekken

$$\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$$

for alle $z \in C$ med $|z| < |z_0|$.

Bevis: Siden $\sum_{n=0}^\infty a_n z_0^n$ konvergerer må $|a_n z_0^n| \to 0$ når $n \to \infty$, så følgen $|a_n z_0^n|$ er begrenset. Velg M slik at

$$|a_n z_0^n| \le M$$

for alle n. Dersom $|z| < |z_0|$, la $r = |z/z_0| < 1$. For hver n er

$$|a_n z^n| \le |a_n z_0^n| |z/z_0|^n \le M r^n .$$

Den geometriske rekken $\sum_{n=0} M r^n$ konvergerer, siden $|r|<1$, så ved sammenligningstesten er rekken

$$\sum_{n=0}^\infty |a_n z^n|$$

konvergent. Altså er rekken

$$\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$$

absolutt konvergent, og derfor konvergent. QED.

Teorem: La $(a_n)_n$ være en følge i C. Potensrekken

$$\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$$

er enten konvergent for alle $z \in C$, eller så finnes et reelt tall $R\ge0$ slik at

(i) rekken konvergerer for alle z med $|z| < R$, og
(ii) rekken divergerer for alle z med $|z| > R$.

Tallet R er entydig bestemt av $(a_n)_n$, og kalles **konvergensradien** til potensrekken. Dersom rekken er konvergent for alle z skriver vi $R = \infty$.

Bevis: Hvis $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ konvergerer for alle z er det ikke noe å vise. Ellers finnes en $z_1 \in C$ slik at $\sum_{n=0}^\infty a_n z_1^n$ divergerer. La

$$E = \{ |z| : \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \text{ konvergerer } \}$$

være mengden av normer $|z|$ der $z \in C$ er slik at $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ konvergerer. Rekken konvergerer for $z=0$, så $0 \in E$. Ved lemmaet over vil $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ divergere for alle z med $|z| > |z_1|$, så $E \subset [0, |z_1|]$. Altså er E en ikke-tom, oppad begrenset delmengde i R, som derfor har et supremum. La $R = \sup E$.

Hvis $|z|>R = \sup E$ er $z \notin E$, så (ii) holder. Hvis $|z|<R = \sup E$ finnes $z_0 \in E$ med $|z| < |z_0| \le R$. Siden $z_0 \in E$ konvergerer $\sum_{n=0}^\infty a_n z_0^n$, så ved lemmaet konvergerer $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, siden $|z| < |z_0|$. Derfor holder (i). QED.

I allmennhet kan man ikke si noe om hvorvidt $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ konvergerer når $|z|=R$. Hvert ikke-negativt tall $R\ge0$ kan opptre som konvergensradien til en potensrekke.