MAT1300 – Analyse I – 16. mars 2009

Lemma 8.18:
La $\lambda, \mu \in R$ og $f, g \: [a,b] \to R$ være Riemann-integrerbare funksjoner.
Da er $\lambda f + \mu g$ også Riemann-integrerbar, med

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x) \, dx$$

$$= \lambda \int_a^b f(x) \, dx + \mu \int_a^b g(x) \, dx .$$

Bevis:
For en disseksjon D av [a,b] er

$$s(-f, D) = -S(f, D)$$

$$S(-f, D) = -s(f, D)$$

så

$$I_*(-f) = -I^*(f)$$

$$I^*(-f) = -I_*(f) .$$

Når f er Riemann-integrerbar er derfor -f også Riemann-integrerbar, med $I(-f) = -I(f)$.

Tilsvarende, for $\lambda > 0$ er

$$s(\lambda f, D) = \lambda s(f, D)$$

$$S(\lambda f, D) = \lambda S(f, D)$$

så

$$I_*(\lambda f) = \lambda I_*(f)$$

$$I^*(\lambda f) = \lambda I^*(f) .$$

Når f er Riemann-integrerbar er derfor λf også Riemann-integrerbar, med $I(\lambda f) = \lambda I(f)$. Lemmaet følger lett ved å sette sammen disse resultatene med Lemma 8.15. QED.

Oppgave 8.27:
La $f \: [a, b] \to R$ være en voksende funksjon. Da er f Riemann-integrerbar.

Bevis:
Siden f er voksende er $f(a) \le f(t) \le f(b)$ for alle $a \le t \le b$, så f er begrenset.

La $n \in N$ og la $D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ der $x_j = a + j(b-a)/n$ for $0 \le$

$j \le n$, slik at $x_j - x_{j-1} = (b-a)/n$ for $1 \le j \le n$. Da er

$$f(x_{j-1}) = \inf \{ f(t) \mid x_{j-1} \le t \le x_j \}$$

$$f(x_j) = \sup \{ f(t) \mid x_{j-1} \le t \le x_j \}$$

så

$$s(f, D) = \sum_{j=1}^n (b-a)/n \cdot f(x_{j-1})$$

$$S(f, D) = \sum_{j=1}^n (b-a)/n \cdot f(x_j) .$$

For denne disseksjonen D er

$$S(f,D) - s(f,D) = \sum_{j=1}^n (b-a)/n \cdot f(x_j)$$

$$- \sum_{j=1}^n (b-a)/n \cdot f(x_{j-1})$$

$$= (b-a)/n \cdot f(x_n) - (b-a)/n \cdot f(x_0)$$

$$= (b-a)(f(b)-f(a))/n .$$

Dette er en n-te del av arealet til rektangelet $[a,b] \times [f(a), f(b)]$.

Gitt $\epsilon>0$ finnes en n slik at $(b-a)(f(b)-f(a))/n < \epsilon$, så ved Lemma 8.13 er f Riemann-integrerbar. QED.

Lemma 8.28:
Hvis $f \: [a, b] \to R$ kan skrives som $f = f_1 - f_2$, der f_1 og f_2 er voksende, så er f Riemann-integererbar.

Oppgave 8.29:
Hvis $f \: [a, b] \to R$ bare har endelig mange lokale maksima og lokale minima, så kan f skrives som $f = f_1 - f_2$, der f_1 og f_2 er voksende. Altså er f Riemann-integrerbar.

Oppgave 8.30:
La $f \: [0,1] \to R$ være gitt ved $f(t) = 1$ hvis x er rasjonal, og $f(x) = 0$ hvis f er irrasjonal. Da er $s(f,D) = 0$ og $S(f, D) = 1$ for enhver disseksjon D av $[0,1]$, så f er ikke Riemann-integrerbar.

Bevis: Hvert intervall $[x_{j-1}, x_j]$ med $x_{j-1} < x_j$ inneholder både rasjonale og irrasjonale punkter, så $\inf f(t) = 0$ og $\sup f(t) = 1$ for $t \in [x_{j-1}, x_j]$. QED.

8.3. Integraler av kontinuelige funksjoner

Teorem 8.32:
Enhver kontinuelig funksjon $f \: [a,b] \to R$ er Riemann-integrerbar.

Bevis:
Kan anta $a < b$. Siden f er kontinuelig og $[a,b]$ er lukket og begrenset vet vi at $f([a,b])$ er (lukket og) begrenset. Altså er f begrenset. Vil vise at f er Riemann-integerbar ved å bruke Lemma 8.13. Gitt $\epsilon>0$ vil vi finne en disseksjon D av $[a,b]$ slik at $S(f, D) - s(f, D) \le \epsilon$.

Siden f er kontinuelig og $[a,b]$ er lukket og begrenset vet vi også at f er uniformt kontinuerlig. Altså finnes en $\delta = \delta(\epsilon/(b-a))$ slik at for alle $x, y \in [a,b]$ med $|y-x| < \delta$ er $|f(y) - f(x)| < \epsilon/(b-a)$. La n være så stor at $(b-a)/n < \delta$, og la $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ der $x_j = a + j(b-a)/n$. Da er $x_j - x_{j-1} = (b-a)/n < \delta$, så for alle $s, t \in [x_{j-1}, x_j]$ er $|t-s| < \delta$ og $|f(t) - f(s)| < \epsilon/(b-a)$. Altså er

$$\sup f(t) - \inf f(s) \le \epsilon/(b-a)$$

der $s, t \in [x_{j-1}, x_j]$. Dette gjelder for $1 \le j \le n$, så vi kan summere, og får

$$S(f, D) - s(f, D) \le \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \epsilon/(b-a)$$

$$= (b-a) \epsilon/(b-a) = \epsilon .$$

QED.

Lemma 8.33:
Hvis $f \: [a,b] \to R$ er kontinuelig, med $f(x) \ge 0$ for alle $x \in [a,b]$, og

$$\int_a^b f(x) \, dx = 0$$

så er $f(x) = 0$ for alle $x \in [a,b]$.

Bevis:
Hvis $f(x) > 0$ for en $x \in [a,b]$ lar vi $\epsilon = f(x)/2$. Siden f er kontinuelig i x finnes $\delta>0$ slik at $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ for alle $y \in [a,b]$ med $|y-x| \le \delta$. Da er $f(y) > f(x) - \epsilon = f(x)/2$ for disse y. Altså finnes en disseksjon $D = \{a, x_1, x_2, b\}$ med $x_1 < x_2$, slik at $f(y) \ge \epsilon/2$ for alle $x_1 \le y \le x_2$. Da er

$$\int_a^b f(x) \, dx \ge s(f, D) \ge (x_2-x_1) \epsilon/2 > 0$$

som strider mot antagelsen $\int_a^b f(x) \, dx = 0$. QED.

Hvis $a<b$ og $f \: [a, b] \to R$ er Riemann-integrerbar på $[a,b]$ definerer vi

$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx.$$

Lemma 8.36:
La $\lambda, \mu \in R$, la $f, g \:[\alpha, \beta] \to R$ være Riemann-integrerbare, og $a, b, c \in [\alpha, \beta]$. Da er

(i) $\int_a^b 1 \, dx = b-a$

(ii) $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x) \, dx$

$$= \lambda \int_a^b f(x) \, dx + \mu \int_a^b g(x) \, dx$$

(iii) $\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx$

(iv) $| \int_a^b f(x) \, dx | \le |b-a| \sup_{0 \le k \le 1} |f((1-k)a + kb)|$.

Teorem 8.37 (Kalkulusens fundamentalteorem):
La $f \: (a, b) \to R$ være en kontinuelig funksjon, la $u \in (a,b)$ og la

$$F(t) = \int_u^t f(x) \, dx$$

for alle $t \in (a,b)$. Da er F deriverbar på (a,b), og

$$F'(t) = f(t)$$

for alle $t \in (a,b)$.

Bevis:
For $t, t+h \in (a,b)$ med $h \ne 0$ er

$$F(t+h) - F(t) = \int_u^{t+h} f(x) \, dx - \int_u^t f(x) \, dx$$

$$= \int_t^{t+h} f(x) \, dx$$

mens

$$\int_t^{t+h} f(t) \, dx = ((t+h) - t) f(t) = h f(t)$$

siden $f(t)$ er konstant som funksjon av x, så

$$| {F(t+h) - F(t) \over h} - f(t) |$$

$$= | (1/h) (\int_u^{t+h} f(x) \, dx - \int_u^t f(x) \, dx - h f(t)) |$$

$$= | (1/h) (\int_t^{t+h} f(x) \, dx - \int_t^{t+h} f(t) \, dx) |$$

$$= | (1/h) \int_t^{t+h} (f(x) - f(t)) \, dx |$$

$$\le 1/|h| |h| \sup_{0 \le k \le 1} |f(t + kh) - f(t)|$$

$$= \sup_{0 \le k \le 1} |f(t+kh) - f(t)| .$$

Siden f er kontinuelig i t blir $|f(t+kh) - f(t)|$ for $0 \le k \le 1$ vilkårlig liten når $h \to 0$, så $\sup_{0 \le k \le 1} |f(t+kh) - f(t)| \to 0$ når $h \to 0$. Altså er F deriverbar i t, med $F'(t) = f(t)$. QED.

Teorem 8.40:
La $f \: (a, b) \to R$ være kontinuelig, la $u \in (a, b)$ og $c \in R$. Da finnes en entydig løsning $g \: (a, b) \to R$ til differensiallikningen $g'(t) = f(t)$ for $t \in (a, b)$ med $g(u) = c$.

Bevis:
Funksjonen

$$g_1(t) = c + \int_u^t f(x) \, dx$$

gir en slik løsning. Dersom g_2 er en annen løsning er differansen $h(t) = g_2(t) - g_1(t)$ en deriverbar funksjon på (a,b) med $h'(t) = 0$ for alle t. Ved middelverdiulikheten er h konstant. Siden $h(u) = g_2(u) - g_1(u) = c - c = 0$ må $h(t) = 0$ for alle t, så $g_1 = g_2$. QED.