MAT1300 – Analyse I – 17. februar 2009

La $f \: R \to R$ være en funksjon, og la $x \in R$. At f er kontinuerlig i x betyr at det finnes en konstant funksjonen $k(t) = c$ (for $t \in R$) som er en god approksimasjon til f nær x. Da må $c = f(x)$, og mer er presist er

$$f(x + h) = f(x) + \delta(h)$$

der $\delta(h) \to 0$ når $h \to 0$. Dette er ekvivalent med at $f(x+h) \to f(x)$ når $h \to 0$.

At f er deriverbar i x betyr at det finnes en affint lineær funksjon $l(t) = a.t + b$ (for $t \in R$) som er en bedre approksimasjon til f nær x. Vi kan skrive den affint lineære funksjonen på formen $l(x+h) = f(x) + a.h$ for en passende $a \in R$, og mer presist er

$$f(x+h) = f(x) + a.h + \epsilon(h).h$$

der $\epsilon(h) \to 0$ når $h \to 0$. Dette er ekvivalent med at

$${f(x+h) - f(x) \over h} \to a$$

når $h \to 0$. Tallet $a \in R$ kalles den deriverte til f i x, og skrives f'(x).

La nå $f \: R^m \to R$, og $x \in R^m$. At f er kontinuerlig i x betyr igjen at den konstante funksjonen $k(t) = f(x)$ (for $t \in R^m$) er en god approksimasjon til f nær x, slik at

$$f(x+h) = f(x) + \delta(h)$$

for $h \in R^m$, der $||\delta(h)|| \to 0$ når $||h|| \to 0$. Dette er ekvivalent med at $f(x+h) \to f(x)$ i R^m når $h \to 0$ i R^m.

At $f \: R^m \to R$ er deriverbar i $x \in R^m$ skal nå defineres til å bety at det finnes en affint lineær funksjon $l(t) = \alpha(t) + b$ (for $t \in R^m$) som er en bedre approksimasjon til f nær x. Her er $\alpha \: R^m \to R$ en lineær funksjon i lineær-algebraisk forstand, slik at $\alpha(s+t) = \alpha(s) + \alpha(t)$, og $\alpha(ct) = c\alpha(t)$. Det finnes tall $a_1, \dots, a_m$ slik at

$$\alpha(t) = a_1 t_1 + \dots + a_m t_m$$

der $t = (t_1, \dots, t_m)$.

Vi kan skrive $l(x+h) = f(x) + \alpha(h)$, og mer presist vil vi kreve at

$$f(x+h) = f(x) + \alpha(h) + \epsilon(h).||h||$$

der $||\epsilon(h)|| \to 0$ når $||h|| \to 0$. Den lineære funksjonen $\alpha \: R^m \to R$ kalles da den deriverte til f i x.

Merk at for $m=1$ er det en liten konflikt i terminologien. Tradisjonelt er den deriverte til f i x lik tallet $a = f'(x)$. Nå bruker vi samme navn for den lineære funksjonen $\alpha(t) = f'(x).t$ for $t \in R$.

Funksjoner $f \: R^m \to R^p$ kan oppfattes som p-tupler av reelle funksjoner $(f_1, \dots, f_p)$. Vi approksimerer f nær x med en affint lineær funksjon $l(t) = \alpha(t) + b$ (for $t \in R^m$), der $\alpha \: R^m \to R^p$ er en lineær funksjon i lineær-algebraisk forstand. Da finnes en $p \times m$ matrise $A = (a_{i,j})$ slik at

$$\alpha(t) = s$$

der $t = (t_1, \dots, t_m)$, $s = (s_1, \dots, s_p)$, og

$$s_i = \sum_{j=1}^m a_{i,j} t_j$$

for $1 \le i \le p$. Vi kan skrive $l(x+h) = f(x) + \alpha(h)$, og ledes til følgende definisjon.

Definisjon: La $E \subset R^m$, $x \in E$, og anta at $B(x, \delta) \subset E$ for en $\delta>0$. En funksjon $f \: E \to R^p$ er deriverbar i x dersom det finnes en lineær-avbildning $\alpha \: R^m \to R^p$ slik at

$$f(x+h) = f(x) + \alpha(h) + \epsilon(x, h) ||h||$$

for alle h med $||h|| < \delta$, der

$$||\epsilon(x, h)|| \to 0$$

når $||h|| \to 0$. Da kalles α den deriverte til f i x, og vi skriver $\alpha = Df(x)$ eller $\alpha = f'(x)$.

Dersom E er åpen i R^m og f er deriverbar i hvert punkt $x \in E$, så sier vi at f er deriverbar på E.

Lemma:
(i) La $\gamma \: R^m \to R^p$ være en lineær-avbildning slik at

$$\gamma(h) = \epsilon(h) ||h||$$

der $||\epsilon(h)|| \to 0$ når $||h|| \to 0$. Da er $\gamma=0$, null-avbildningen.

(ii) La $x \in E \subset R^m$ og $f \: E \to R^p$ være som i definisjonen ovenfor. Det finnes høyst en lineær-avbildning α slik at

$$f(x+h) = f(x) + \alpha(h) + \epsilon(x, h) ||h||$$

og $||\epsilon(h)|| \to 0$ når $||h|| \to 0$.

Bevis:
(i) La $h \in R^m$ og la $k>0$ være et reelt tall. Da er

$$\gamma(h) = (1/k) \gamma(kh) = (1/k) \epsilon(kh) ||kh|| = \epsilon(kh) ||h||$$

og $||\epsilon(kh)|| \to 0$ når $k \to 0$, så $||\gamma(h)|| \to 0$ når $k \to 0$. Da må $\gamma(h) = 0$. Siden h var vilkårlig er $\gamma=0$.

(ii) Anta at det finnes lineære avbildninger $\alpha_1, \alpha_2 \: R^m \to R^p$ og funksjoner ϵ_1, ϵ_2 slik at

$$f(x+h) = f(x) + \alpha_1(h) + \epsilon_1(x, h)||h||$$

$$f(x+h) = f(x) + \alpha_2(h) + \epsilon_2(x, h)||h||$$

for $||h||<\delta$, slik at $\epsilon_1(x, h) \to 0$ og $\epsilon_2(x, h) \to 0$ når $h \to 0$. La så

$$\gamma(h) = \alpha_1(h) - \alpha_2(h)$$

$$\epsilon(x, h) = \epsilon_2(x, h) - \epsilon_1(x, h) .$$

Da er $\gamma \: R^m \to R^p$ lineær,

$$\gamma(h) = \epsilon(x, h)||h||$$

for $||h||<\delta$, og $\epsilon(x, h) \to 0$ når $n \to 0$. Ved (i) må da $\gamma=0$, så $\alpha_1 = \alpha_2$. QED.

Vi presiserer altså at den affint lineære funksjonen

$$f(x) + \alpha(h)$$

er den “beste” lineære tilnærmingen til

$$f(x+h)$$

for en gitt $x \in E$ og alle $h \in B(x, \delta) \subset E$, ved å skrive differansen som

$$f(x+h) - (f(x) + \alpha(h)) = \epsilon(x, h)||h||$$

og å kreve at $\epsilon(x, h) \to 0$ når $h \to 0$. Ved lemmaet ovenfor er det høyst en lineær avbildning $\alpha \: R^m \to R^p$ som kan oppfylle dette kravet, og f er deriverbar i x, med derivert $Df(x) = f'(x) = \alpha$, nettopp når α oppfyller dette kravet.