MAT1300 – Analyse I – 17. mars 2009

Teorem 8.40: La $f \: (a, b) \to R$ være kontinuelig, la $u \in (a, b)$ og $c \in R$. Da finnes en entydig løsning $g \: (a, b) \to R$ til differensiallikningen $g'(t) = f(t)$ for $t \in (a, b)$ med $g(u) = c$.

Slike funksjoner g kalles **ubestemte integraler**.

Bevis: Funksjonen

$$g_1(t) = c + \int_u^t f(x) \, dx$$

gir en slik løsning. Dersom g_2 er en annen løsning er differansen $h(t) = g_2(t) - g_1(t)$ en deriverbar funksjon på (a,b) med $h'(t) = 0$ for alle t. Ved middelverdiulikheten er h konstant. Siden $h(u) = g_2(u) - g_1(u) = c - c = 0$ må $h(t) = 0$ for alle t, så $g_1 = g_2$. QED.

Teorem 8.42: Anta at $g \: (\alpha, \beta) \to R$ har kontinuerlig derivert $g' \: (\alpha, \beta) \to R$, og at $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$. Da er

$$\int_a^b g'(x) \, dx = g(b) - g(a) .$$

Bevis:
Definer $U \: (\alpha, \beta) \to R$ ved

$$U(t) = \int_a^t g'(x) \, dx - g(t) + g(a) .$$

Ved kalkulusens fundamentalteorem 8.37 er U deriverbar med

$$U'(t) = g'(t) - g'(t) + 0 = 0$$

så ved middelverdisetningen er U konstant. Videre er $U(a) = 0 - g(a) + g(a) = 0$, så $U(t) = 0$ for alle $t \in (\alpha, \beta)$. Spesielt er $U(b) = 0$, som gir den ønskede likningen. QED.

Teorem 8.44 (Variabelskifte i integraler):
La $f \: (\alpha, \beta) \to R$ være kontinuelig, og la $g \: (\gamma, \delta) \to R$ være deriverbar med kontinuelig derivert. Anta at $g((\gamma, \delta)) \subseteq (\alpha, \beta)$, slik at sammensetningen $fg \: (\gamma, \delta) \to R$ er definert. Hvis $c, d \in (\gamma, \delta)$ så er

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(y) \, dy = \int_c^d f(g(x)) g'(x) \, dx .$$

Bevis:
La

$$U(t) = \int_{g(c)}^{g(t)} f(y) \, dy - \int_c^t f(g(x)) g'(x) \, dx$$

$$= \int_{g(c)}^{g(t)} f(y) \, dy - \int_c^t (fg)'(x) \, dx$$

ved kjerneregelen. Da er

$$U'(t) = f(g(t)) - (fg)(t) = 0$$

og $U(c) = 0 - 0 = 0$, så $U(t) = 0$ for alle t. Spesielt er $U(d) = 0$. QED.

Lemma 8.49:

Teorem 8.51 (Globalt Taylor-teorem med restledd):
Hvis $f \: (u, v) \to R$ er n ganger kontinuelig deriverbar og $0 \in (u,v)$, så er

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} {f^{(j)}(0) \over j!} t^j + R_n(f, t)$$

der

$$R_n(f, t) = {1 \over (n-1)!} \int_0^t (t-x)^{n-1} f^{(n)}(x) \, dx .$$

Bevis:
For $n=1$ sier dette

$$f(t) - f(0) = R_1(f, t) = \int_0^t f'(x) \, dx ,$$

som følger fra fundamentalteoremet. Anta induktivt for $n\ge2$ at

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-2} {f^{(j)}(0) \over j!} t^j + R_{n-1}(f, t)$$

der

$$R_{n-1}(f, t) = {1 \over (n-2)!} \int_0^t (t-x)^{n-2} f^{(n-1)}(x) \, dx$$

$$= -{1 \over (n-1)!} [(t-x)^{n-1} f^{(n-1)}(x)]_0^t$$

$$+ {1 \over (n-1)!} \int_0^t (t-x)^{n-1} f^{(n)}(x) \, dx$$

$$= {f^{(n-1)}(0) \over (n-1)!} t^{n-1} + R_n(f, t)$$

ved delvis integrasjon.