MAT1300 – Analyse I – 19. januar 2009

[Diskusjonen om skjæringssetningen mangler i dette notatet.]

Definisjon (Deriverbar, derivert): La U \subset \R være en åpen delmengde, f \: U \to \R en funksjon og x \in U et punkt. Vi sier at f er deriverbar i x, med derivert f'(x) \in \R, hvis gitt \epsilon>0 finnes \delta = \delta(x, \epsilon) slik at (x-\delta, x +\delta) \subset U og

| {f(x+h) – f(x) \over h} – f'(x) | < \epsilon

for alle h med 0 < |h| < \delta, eller med andre ord, hvis

{f(x+h) – f(x) \over h} \to f'(x) når h \to 0 .

Vi sier at f er deriverbar på U dersom f er deriverbar i hvert punkt x \in U. Regelen x \mapsto f'(x) definerer da den deriverte funksjon f' \: U \to \R til f.

Teorem (Middelverdiulikheten): La U = (\alpha, \beta) \subset \R være et åpent intervall. La a < b \in U, og K \in \R. Anta at f \: U \to \R er deriverbar med f'(x) \le K for alle x \in U. Da vil

f(b) – f(a) \le K(b-a) .

Med andre ord, en øvre grense for den deriverte på hele U er også en øvre grense for stigningstallet over [a, b].

Viser først et tilsynelatende svakere resultat.

Lemma: La U, a, b, f, og K være som i teoremet ovenfor, og la \epsilon > 0. Da vil

f(b) – f(a) \le (K + \epsilon)(b-a) .

Bevis av middelverdiulikheten fra lemmaet:
Vi vet at ulikheten

f(b) – f(a) \le (K + \epsilon)(b-a) = K(b-a) + \epsilon(b-a)

holder for alle \epsilon>0. Hvis f(b) – f(a) > K(b-a) er differansen D = f(b) – f(a) – K(b-a) positiv, og det finnes en \epsilon>0 slik at D > \epsilon(b-a). Da er

f(b) – f(a) > K(b-a) + \epsilon(b-a) ,

som strider mot den kjente ulikheten. Altså er f(b) – f(a) \le K(b-a). QED.

Bevis av lemmaet:
Trinn A: Vi antar at

$$f(b) - f(a) > (K + \epsilon)(b-a)$$

og bruker halveringsprinsippet for å finne en motsigelse. La $a_0 = a$, $b_0 = b$, og $c_0 = (a_0 + b_0)/2$. Vi har antatt at

$$\begin{aligned} &[f(c_0) - f(a_0) - (K+\epsilon)(c_0 - a_0)] \\ &\qquad + [f(b_0) - f(c_0) - (K+\epsilon)(b_0 - c_0)] \\ &= f(b_0) - f(a_0) - (K+\epsilon)(b_0-a_0) > 0 \end{aligned}$$

så minst en av de to første summandene er positive. Hvis $f(c_0) - f(a_0) - (K+\epsilon)(c_0 - a_0) > 0$ lar vi $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$. Ellers er $f(b_0) - f(c_0) - (K+\epsilon)(b_0 - c_0) > 0$ og vi lar $a_1 = c_0$ og $b_1 = b_0$. I begge tilfeller er

$$f(b_1) - f(a_1) > (K + \epsilon)(b_1 - a_1) ,$$

$$a_0 \le a_1 \le b_1 \le b_0 \text{ og}$$

$$(b_1 - a_1) = (b_0 - a_0)/2 .$$

Anta induktivt, for $n\ge1$, at

$$f(b_n) - f(a_n) > (K + \epsilon)(b_n - a_n) ,$$

$$a_{n-1} \le a_n \le b_n \le b_{n-1} \text{ og}$$

$$(b_n - a_n) = (b_{n-1} - a_{n-1})/2 .$$

La $c_n = (a_n + b_n)/2$. Vi vet at

$$\begin{aligned} &[f(c_n) - f(a_n) - (K+\epsilon)(c_n - a_n)] \\ &\qquad + [f(b_n) - f(c_n) - (K+\epsilon)(b_n - c_n)] \\ &= f(b_n) - f(a_n) - (K+\epsilon)(b_n-a_n) > 0 \end{aligned}$$

så minst en av de to første summandene er positive. Hvis $f(c_n) - f(a_n) - (K+\epsilon)(c_n - a_n) > 0$ lar vi $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$. Ellers er $f(b_n) - f(c_n) - (K+\epsilon)(b_n - c_n) > 0$ og vi lar $a_{n+1} = c_n$ og $b_{n+1} = b_n$. I begge tilfeller er

$$f(b_{n+1}) - f(a_{n+1}) > (K + \epsilon)(b_{n+1} - a_{n+1}) ,$$

$$a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n \text{ og}$$

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) = (b_n - a_n)/2 .$$

Altså holder den induktive antagelsen for alle $n\ge1$.

Trinn B: Vi har

a_0 \le a_1 \le \dots \le a_n \le \dots \le b

så (a_n)_n er en voksende, oppad begrenset følge i \R. Ved fundamentalaksiomet konvergerer den mot en grenseverdi c, så a_n \to c når n \to \infty. Her må a \le c \le b. Vi kan skrive

b_n = a_n + (b_n – a_n)

der b_n – a_n = (b-a)/2^n \to 0 når n \to \infty. [1/2^n \to 0 når n \to \infty ved en variant av Arkimedes' aksiom, siden 2^n \ge n for n\ge0.] Da må

b_n = a_n + (b_n – a_n) \to c + 0 = c når n \to \infty.

Har altså funnet c \in [a, b] med a_n \to c og b_n \to c når n \to \infty.

Trinn C:
Vi vet at f er deriverbar i c, så til den valgte \epsilon>0 kan vi finne en \delta = \delta(c, \epsilon) slik at (c-\delta, c+delta) \subset U, og

| {f(c+h) – f(c) \over h} – f'(c) | < \epsilon

for alle h med 0 < |h| < \delta. Så

|f(c+h) – f(c) – f'(c) h| \le \epsilon |h|

for alle h med |h| \delta. [Har likhet for h=0.] Vet også at f'(c) \le K, så

f(c+h) – f(c) \le f'(c) h + \epsilon h \le (K+\epsilon) h

for 0 \le h < delta, og

f(c) – f(c+h) \le f'(c)(-h) + \epsilon(-h) \le (K+\epsilon)(-h)

for -\delta < h \le 0.

Siden a_n \to c og b_n \to c kan vi finne en N slik at |a_N – c| < \delta og |b_N – c| < \delta. Ved å la h = a_N – c \le 0 får vi

f(c) – f(a_N) \le (K+\epsilon)(c - a_N) .

Ved å la h = b_N – c \ge 0 får vi

f(b_N) – f(c) \le (K+\epsilon)(b_N - c) .

Ved å legge sammen ulikhetene får vi

f(b_N) – f(a_N) \le (K+\epsilon)(b_N – c_N) som strider mot den induktivt viste ulikheten

$$f(b_n) – f(a_n) > (K + \epsilon)(b_n – a_n)$$

som gjelder for alle $n\ge0$, spesielt også for $n = N$. Denne motsigelsen viser at antagelsen i begynnelsen av beviset må være usann. QED.

Teorem (Konstant-verdi teoremet): La $U = (\alpha, \beta) \subset \R$ være et åpent intervall. Hvis $f \: U \to \R$ er deriverbar, med $f'(x) = 0$ for alle $x \in U$, så er f konstant.

Bevis:
La $a \le b \in U$. Ved middelverdiulikheten for f og $K = 0$ får vi at $f(b) – f(a) \le 0(b-a) = 0$. Ved middelverdiulikheten for -f og $K=0$ får vi at $f(a) – f(b) = (-f)(b) - (-f)(a) \le 0$. Altså er $f(b) – f(a) = 0$ og $f(a) = f(b)$. Her var a og b vilkårlig valgt, så f er konstant. QED.

Korollar: La $U = (\alpha, \beta) \subset \R$ være et åpent intervall. Hvis $f, g \: U \to \R$ er deriverbare, med $f'(x) = g'(x)$ for alle $x \in U$, så finnes en konstant $C \in \R$ slik at $f(x) = g(x) + C$ for alle $x \in U$.

Bevis:
Bruk teoremet for funksjonen (f-g). QED.