MAT1300 – Analyse I – 20. januar 2009

Definisjon (Maksimum): La E \subset \R . Vi sier at et tall \alpha \in R er et maksimum for E dersom \alpha \in E, og for alle x \in E er x \le \alpha.

Ikke alle delmengder E \subset \R har et maksimum. For eksempel må E være ikke-tom for at det skal finnes noe element \alpha \in E, og E må være oppad begrenset for at x \le \alpha for alle x \in E. Men selv om E er ikke-tom og oppad begrenset, så behøver ikke E ha et maksimum.

Eksempel: La E = (0, 1) \subset \R . Da er E ikke-tom (½ \in E) og oppad begrenset (x \le 1 for alle x \in E), men E har ikke noe maksimum. For hvis \alpha var et maksimum for E, så må \alpha \in (0,1). Da er x = (\alpha+1)/2 \in E, men x>\alpha.

Dersom E \subset \R har et maksimum \alpha, så er \alpha entydig bestemt. Med andre ord, his \beta også er et maksimum for E så er \beta \in E, så \beta \le \alpha, siden \alpha er et maksimum for E, og \alpha \in E, så \alpha \le \beta, siden \beta er et maksimum for E. Altså er \alpha = \beta.

Hvis E har et maksimum \alpha skriver vi \alpha = max E = max_{x \in E} x .

Vi vil nå se på et noe mer fleksibelt begrep enn maksimum, som kalles supremum, eller minste øvre skranke. (Noen sier også minste øvre grense.)

Definisjon (Øvre skranke, supremum): La E \subset \R . Vi sier at et tall \alpha \in \R er en øvre skranke for E dersom x \le \alpha for alle x \in E. [Vi antar ikke at \alpha \in E.] Videre sier vi at \alpha \in \R er en minste øvre skranke for E dersom \alpha er en øvre skranke for E, og for hver \beta \in \R som er en øvre skranke for E så er \alpha \le \beta. Et annet ord for minste øvre skranke er supremum.

Lemma: Hvis E \subset \R har et supremum \alpha, så er \alpha entydig bestemt.

Bevis: Hvis \alpha og \beta begge er suprema (= minste øvre skranker) for E, så er \alpha \le \beta siden \alpha er en minste øvre skranke, og \beta \le \alpha siden \beta er en minste øvre skranke. Altså er \alpha = \beta. QED.

Dersom E har et supremum \alpha, skriver vi \alpha = sup E, eller \alpha = sup_{x \in E} x .

Et maksimum \alpha for E er det samme som et supremum \alpha for E slik at \alpha \in E.

Lemma: La E \subset \R . Et tall \alpha \in \R er et supremum for E hvis og bare hvis \alpha er en øvre skranke for E (så x \le \alpha for alle x \in E), og gitt \epsilon>0 finnes en x \in E slik at x > \alpha - \epsilon (så \alpha - \epsilon er ikke en øvre skranke for E).

Bevis: La \alpha være en øvre skranke for E. Da er \alpha en minste øvre skranke for E hvis og bare hvis for enhver øvre skranke \beta for E er \alpha \le \beta, som holder hvis og bare hvis for enhver \beta < \alpha er \beta ikke en øvre skranke for E, som igjen er ekvivalent med at for hver \epsilon>0 finnes det en x \in E med x > \beta = \alpha - \epsilon. QED.

Teorem (Supremums-prinsippet): La E \subset \R være en ikke-tom, oppad begrenset delmengde. Da har E et supremum \alpha = sup E.

Eksempel: Dette er generelt usant for delmengder av \Q. For eksempel så har E = \{x \in \Q : x^2 < 2 \} ikke noe supremum i \Q. Beviset bruker da også fundamentalaksiomet.

Bevis:
La a_0 \in E og b_0 \in \R, slik at x \le b_0 for alle x \in E. Dette er mulig siden E er ikke-tom og oppad begrenset. Spesielt er [a_0, b_0] \cap E ikke-tom. La c_0 = (a_0 + b_0)/2. Dersom [c_0, b_0] \cap E er tom lar vi a_1 = a_0, b_1 = c_0. Ellers lar vi a_1 = c_0 og b_1 = b_0. Da er [a_1, b_1] \cap E ikke-tom, x \le b_1 for alle x \in E, a_0 \le a_1 \le b_1 \le b_0 og (b_1-a_1) = (b_0-a_0)/2. Fortsetter induktivt, og finner følger (a_n)_n og (b_n)_n slik at [a_n, b_n] \cap E er ikke-tom, x \le b_n for alle x \in E, a_{n-1} \le a_n \le b_n \le b_{n-1} og (b_n-a_n) = (b_{n-1}-a_{n-1})/2, for alle n\ge1. Da er (a_n)_n en oppad begrenset voksende følge, som må konvergere mot en grense c, mens (b_n-a_n)_n konvergerer mot 0, så a_n \to c og b_n \to c når n \to \infty. Siden hver b_n er en øvre skranke for E, og b_n \to c, følger det at c er en øvre skranke for E. Videre finnes det x \in [a_n, b_n] \cap E for hver n, og a_n \to c, så for \epsilon>0 er ikke c - \epsilon en øvre skranke for E. Altså er c en minste øvre skranke for E. QED.

Definisjon (Minimum, nedre skranke, infimum): La E \subset \R . Et tall \alpha \in \R er et minimum for E dersom \alpha \in E , og \alpha \le x for alle x \in E.

Et tall \alpha \in \R er en nedre skranke for E dersom \alpha \le x for alle x \in E.

Et tall \alpha \in R er en største nedre skranke, eller et infimum, for E, dersom \alpha er en nedre skranke for E, og for enhver nedre skranke \beta for E er \beta \le \alpha.

Et minimum \alpha = min E = min_{x\in E} x for E er entydig bestemt dersom det eksiserer. Mer generelt er et infimum \alpha = inf E = inf_{x\in E} x for E entydig bestemt dersom det eksisterer. Et minimum for E er det samme som et infimum for E som også er element i E.

Vi kan bruke supremumsprinsippet for å vise skjæringssetningen og middelverdiulikheten.

Teorem (Skjæringssetningen): La f : [a, b] \to \R være kontinuerlig, med f(a) \le 0 og f(b) \ge 0. Da finnes c \in [a, b] slik at f(c) = 0.

Bevis II:
La E = \{x \in [a,b] : f(x) \le 0 \}. Da er a \in E og x \le b for alle x \in E, så E er ikke-tom og oppad begrenset. Altså har E et supremum c \in [a,b]. Vil nå vise at gitt en vilkårlig \epsilon>0 er |f(c)| < \epsilon. Da følger det at f(c)=0. Antar for enkelhets skyld at c \in (a,b). Gitt \epsilon>0 finnes \delta>0 slik at for alle x \in [a,b] med |x-c|<\delta er |f(x)-f(c)|<\epsilon. Siden c = sup E finnes en x \in E med c-\delta < x \le c, og f(x) \le 0, så f(c) < f(x) + \epsilon \le \epsilon. Videre finnes y \not\in E med c \le y < c +\delta (og y \le b), og f(y) > 0, så f(c) > f(y) - \epsilon > -\epsilon. Altså er -\epsilon < f(c) < \epsilon. [Tilfellene c=a og c=b krever særlige argumenter, som utelates.] QED.