MAT1300 – Analyse I – 20. april 2009

For å vise at et metrisk rom (X, d) er komplett må vi vise at enhver Cauchy-følge $(x_n)_n$ i (X, d) konvergerer mot en grense x i X. Da kan vi

(A) finne en kandidat x for grensen til $(x_n)_n$,
(B) vise at x ligger i X, og
(C) vise at $(x_n)_n$ konvergerer mot x i den forstand at $d(x_n, x) \to 0$ når $n \to \infty$.

Vi følger denne strategien i følgende eksempel:

Eksempel 11.10: La ℓ^1 være vektorrommet av relle tallfølger $a = (a_m)_m$ slik at rekken $\sum_{m=1}^\infty |a_m|$ konvergerer, dvs. slik at rekken $\sum_{m=1}^\infty a_m$ er absolutt konvergent. Vi kan kalle ℓ^1 rommet av **absolutt summerbare følger**. La

$$||a||_1 = \sum_{m=1}^\infty |a_m| .$$

Da er $(\ell^1, ||.||_1)$ et komplett normert vektorrom.

Bevis: Det er lett å vise at ℓ^1 er et vektorrom, og at $||.||_1$ er en norm på dette vektorrommet. La så $(a(n))_n$ være en Cauchy-følge i ℓ^1.

(A) For hver fiksert $m \in N$ er

$$|a(p)_m - a(q)_m| \le \sum_{m=1}^\infty |a(p)_m - a(q)_m|$$

$$= ||a(p) - a(q)||_1$$

så $(a(n)_m)_n$ er en Cauchy-følge i R. Ved det generelle konvergensprinsippet (Teorem 4.68) er følgen $(a(n)_m)_n$ konvergent i R. La b_m være dens grense, slik at

$$a(n)_m \to b_m$$

når $n \to \infty$. Når m varierer får vi en følge $b = (b_m)_m$ av relle tall.

(B) Vi viser at $b \in \ell^1$, dvs. at rekken $\sum_{m=1}^\infty |b_m|$ konvergerer. Følgen av delsummer $\sum_{m=1}^M |b_m|$ er en voksende følge i R, så det er nok å vise at denne følgen er oppad begrenset. Cauchy-følgen $(a(n))_n$ må være begrenset, så det finnes en $K \in R$ med

$$||a(n)||_1 \le K$$

for alle n. For hver M, n er da

$$\sum_{m=1}^M |b_m|$$

$$\le \sum_{m=1}^M |a(n)_m - b_m| + \sum_{m=1}^M |a(n)_m|$$

$$\le \sum_{m=1}^M |a(n)_m - b_m| + ||a(n)||_1$$

$$\le \sum_{m=1}^M |a(n)_m - b_m| + K$$

som konvergerer mot $\sum_{m=1}^M 0 + K = K$ når $n \to \infty$. Altså er $\sum_{m=1}^M |b_m| \le K$, uavhengig av M.

Når M varierer gir $\sum_{m=1}^M |b_m|$ en voksende oppad begrenset følge i R, som konvergerer ved fundamentalaksiomet. Altså konvergerer rekken

$$\sum_{m=1}^\infty |b_m|$$

slik at $b = (b_m)_m$ ligger i vektorrommet ℓ^1.

(C) Vi skal vise at $||b - a(n)||_1 \to 0$ når $n \to \infty$. Utgangspunktet er at $(a(n))_n$ er en Cauchy-følge i ℓ^1, slik at gitt $\epsilon>0$ finnes en $N = n_0(\epsilon)$ slik at for alle $p, q \ge N$ er $||a(p) - a(q)||_1 < \epsilon$. For hver M er da

$$\sum_{m=1}^M |b_m - a_m(p)|$$

$$\le \sum_{m=1}^M |b_m - a_m(q)| + \sum_{m=1}^M |a_m(p) - a_m(q)|$$

$$\le \sum_{m=1}^M |b_m - a_m(q)| + ||a(p) - a(q)||_1$$

$$< \sum_{m=1}^M |b_m - a_m(q)| + \epsilon$$

$$\to \sum_{m=1}^M 0 + \epsilon = \epsilon$$

når $q \to \infty$. Altså er $\sum_{m=1}^M |b_m - a_m(p)| < \epsilon$ for hver M, så

$$||b - a(p)||_1 \le \epsilon .$$

Vi har vist at gitt $\epsilon>0$ finnes en N slik at for alle $p, q \ge N$ er $||b - a(p)||_1 \le \epsilon$. Siden q ikke forekommer i konklusjonen kan vi reformulere dette som at gitt $\epsilon>0$ finnes en N slik at for alle $p \ge N$ er $||b - a(p)||_1 \le \epsilon$. Med andre ord, $a(p) \to b$ med hensyn på $||.||_1$. QED.

Lemma 11.15: La $(U, ||.||_U)$ og $(V, ||.||_V)$ være normerte vektorrom, og at $(V, ||.||_V)$ er komplett. La $L(U, V)$ være vektorrommet av kontinuerlige (= begrensede) lineær-avbildninger $T \: U \to V$. Da er operatornormen $||.||$ en komplett norm på $L(U, V)$.

Beviset likner på beviset for Eksempel 11.10.

11.2. Bolzano-Weierstrass egenskapen

Definisjon 11.17: Et metrisk rom (X, d) har **Bolzano-Weierstrass egenskapen** (= er sekvensielt kompakt) dersom hver følge $(x_n)_n$ i X har en konvergent delfølge $(x_{n(j)})_j$.

Lemma 11.18: Et metrisk rom (X, d) med Bolzano-Weierstrass egenskapen er komplett.

Bevis: La $(x_n)_n$ være en Cauchy-følge i (X, d). ((ETC)) QED.

Når $X \subset R^m$ har underromsmetrikken fra R^m vet vi at (X, d) har Bolzano-Weierstrass egenskapen hvis og bare hvis X er lukket og begrenset. Vi vet også at X er komplett hvis og bare hvis X er lukket. Det er derfor kanskje fristende å tro at et metrisk rom (X, d) har Bolzano-Weierstrass egenskapen hvis og bare hvis det er komplett og begrenset. Dette er riktig for $X \subset R^m$ med underromsmetrikken, men ikke for generelle metriske rom (X, d).

Oppgave 11.20: La X være en vilkårlig mengde. Gi X en metrikk ved

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x=y, \\ 1 & \text{hvis } x \ne y. \end{cases}$$

Da er (X, d) et komplett og begrenset metrisk rom, men hvis X er en uendelig mengde så har (X, d) ikke Bolzano-Weierstrass egenskapen.

Legg merke til at $B(x, 1/2) = \{x\}$ for alle $x \in X$, så hvert punkt i (X, d) er en åpen omegn om seg selv. Det følger at enhver delmengde $U \subseteq X$ er åpen, slik at enhver delmengde $F \subseteq X$ er lukket. Vi sier at X har den **diskrete topologien**, siden hvert punkt er en omegn for seg selv, og d kalles den diskrete metrikken.

For å få en slik logisk ekvivalens må vi erstatte "begrenset" med en sterkere egenskap.

Definisjon 11.21: Et metrisk rom (X, d) er **totalt begrenset** dersom det for enhver $\epsilon>0$ finnes endelig mange punkter $y_1, \dots, y_M$ i X slik at $\bigcup_{m=1}^M B(y_m, \epsilon) = X$. Med andre ord, (X, d) er totalt begrenset dersom vi for hver $\epsilon>0$ kan finne endelig mange ϵ-baller som til sammen dekker X.

Lemma 11.21: Et metrisk rom (X, d) med Bolzano-Weierstrass egenskapen er totalt begrenset.

Bevis: Anta at (X, d) ikke er totalt begrenset. Vi vil finne en følge $(x_n)_n$ i X uten noen konvergent delfølge. Altså har (X, d) ikke Bolzano-Weierstrass egenskapen.

Antagelsen sier at det finnes en $\epsilon>0$ slik at ingen endelig samling av ϵ-baller dekker X. Anta for $n\ge1$ at $x_1, \dots, x_{n-1}$ har blitt valgt i X slik at $\bigcup_{m=1}^{n-1} B(x_m, \epsilon)$ ikke er hele X. Da kan vi velge $x_n \in X$ med $x_n \notin \bigcup_{m=1}^{n-1} B(x_m, \epsilon)$. Ved induksjon får vi valgt en følge $(x_n)_n$ i X, slik at $d(x_m, x_n) \ge \epsilon$ for alle $m < n$.

Se på en vilkårlig delfølge $(x_{n(j)})_j$ av $(x_n)_n$. Dersom denne delfølgen er konvergent, dvs. dersom $x_{n(j)} \to y$ når $j \to \infty$, vil det finnes en J slik at $d(x_{n(j)}, y) < \epsilon/2$ for alle $j \ge J$. For $j, k \ge J$ med $j \ne k$ finner vi at $n(j) \ne n(k)$ slik at

$$d(x_{n(j)}, x_{n(k)}) \ge \epsilon$$

men ved trekantulikheten er

$$d(x_{n(j)}, x_{n(k)}) \le d(x_{n(j)}, y) + d(y, x_{n(k)})$$

$$< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Dette er umulig, så delfølgen kan ikke være konvergent. QED.

Teorem 11.23: Et metrisk rom (X, d) har Bolzano-Weierstrass egenskapen hvis og bare hvis det er komplett og totalt begrenset.

Bevis:
Vi har vist i Lemma 11.18 og Lemma 11.21 at dersom (X, d) har Bolzano-Weierstrass egenskapen, så er det komplett og totalt begrenset. Det gjenstår å vise den omvendte implikasjonen. Anta derfor at (X, d) er komplett og totalt begrenset, og la $(x_n)_n$ være en følge i (X, d). Vi må vise at $(x_n)_n$ har en konvergent delfølge $(x_{n(j)})_j$.

La først $\epsilon = 1/2$. Siden (X, d) er totalt begrenset finnes endelig mange åpne 1/2-baller $B(y_1, 1/2), \dots, B(y_M, 1/2)$ som dekker X. For hver n er altså x_n element i en $B(y_m, 1/2)$, for en eller flere m = 1, ..., N. Minst en av disse endelig mange åpne 1/2-ballene, si $B_1 = B(y_m, 1/2)$, må derfor inneholde x_n for uendelig mange n.

Induktivt, for $k \ge 1$ antar vi at vi har funnet åpne baller $B_1, \dots, B_k$ i X, der B_j for $j = 1, \dots, k$ er en åpen $1/2^j$-ball på formen $B(y, 1/2^j)$ med y i X, slik at

(*) $\quad x_n \in B_1 \cap \dots \cap B_k$

for uendelig mange indekser n. Siden (X, d) er totalt begrenset kan vi la $\epsilon = 1/2^{k+1}$, og det finnes endelig mange $1/2^{k+1}$-baller $B(z_1, \dots, z_P)$ som dekker X. For hver av de uendelig mange n slik at (*) holder er da x_n element i en $B(z_p, 1/2^{k+1})$, for en eller flere $p = 1, \dots, P$. Minst en av disse endelig mange $1/2^{k+1}$-ballene, si $B_{k+1} = B(z_p, 1/2^{k+1})$, må derfor inneholde x_n for uendelig mange n slik at også (*) holder. Da vet vi at

(**) $x_n \in B_1 \cap \dots \cap B_k \cap B_{k+1}$

for uendelig mange n.

Velg nå en voksende følge

$$n(1) < n(2) < n(3) < \dots$$

slik at $x_{n(j)} \in B_1 \cap \dots \cap B_j$ for alle j. Dette definerer en delfølge $(x_{n(j)})_j$ av $(x_n)_n$.

For alle $p, q \ge M$ vet vi nå at $x_{n(p)}, x_{n(q)} \in B_M$, slik at

$$d(x_{n(p)}, x_{n(q)}) < 2/2^M .$$

Dette betyr at $(x_{n(j)})_j$) er en Cauchy-følge i (X, d), siden gitt $\epsilon>0$ finnes M slik at $2/2^M < \epsilon$, og for alle $p, q \ge M$ er da $d(x_{n(p)}, x_{n(q)}) < \epsilon$.

Vi har også antatt at (X, d) er komplett. Derfor er Cauchy-følgen $(x_{n(j)})_j$) også konvergent. QED