MAT1300 – Analyse I – 21. april 2009

11.3. Sup-normen

Definisjon 11.33: La E være en ikketom mengde, og la $B(E)$ være mengden av begrensede funksjoner $f \: E \to R$. Sup-normen $||.||_\infty$ på $B(E)$ er definert ved $||f||_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$.

Merk at $\{|f(x)| : x \in E\}$ er en ikketom, oppad begrenset mengde, siden E er ikketom og f er begrenset, så sup-normen er veldefinert.

Tilsvarende lar vi $B_C(E)$ være mengden av begrensede funksjoner $f \: E \to C$. Sup-normen $||.||_\infty$ på $B_C(E)$ er definert ved $||f||_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$, der nå $|f(x)|$ er normen i C.

Oppgave 11.34: $B(E)$ er et vektorrom, med sum $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ og skalarprodukt $(kf)(x) = kf(x)$. Sup-normen $||.||_\infty$ definerer en norm på $B(E)$. For f, g i $B(E)$, la $(f . g)$ være det punktvise produktet gitt ved $(f . g)(x) = f(x) g(x)$. Da er $f . g \in B(E)$, med $||f . g||_\infty \le ||f||_\infty ||g||_\infty$.

Teorem 11.35: Hvis E er ikketom, så er $(B(E), ||.||_\infty)$ et komplett normert vektorrom.

Bevis: La $(f_n)_n$ være en Cauchy-følge i $B(E)$.

(A) For hvert punkt $x \in E$ er

$$|f_p(x) - f_q(x)| \le ||f_p - f_q||_\infty$$

så $(f_n(x))_n$ er en Cauchy-følge i R. La $g(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

(B) Siden enhver Cauchy-følge er begrenset, finnes en K slik at $||f_n||_\infty \le K$ for alle n. For hver x og n er

$$|g(x)| \le |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$$

$$\le |g(x) - f_n(x)| + ||f_n||_\infty$$

$$\le |g(x) - f_n(x)| + K .$$

Når $n \to \infty$ får vi $|g(x)| \le 0 + K = K$, så g er begrenset. Altså er $g \in B(E)$.

(C) Gitt $\epsilon>0$ finnes N slik at for alle $p, q \ge N$ er $||f_p - f_q||_\infty < \epsilon$. Da følger at

$$|g(x) - f_p(x)| \le |g(x) - f_q(x)| + |f_p(x) - f_q(x)|$$

$$\le |g(x) - f_q(x)| + ||f_p - f_q||_\infty$$

\le |g(x) - f_q(x)| + \epsilon

for alle x \in E. Når q \to \infty får vi |g(x) - f_p(x)| \le 0 + \epsilon = \epsilon. Altså har vi vist at gitt \epsilon>0 finnes N slik at for p\ge N er |g(x) - f_p(x)| < \epsilon, for alle x \in E. Med andre ord, ||g - f_p||_\infty < \epsilon. Altså har vi vist at f_p \to g i (B(E), ||.||_\infty) når p \to \infty. QED

Vi er vanligvis mer interessert i underrommet av kontinuerlige funksjoner i B(E). Dette gir mening når E er et metrisk rom (eller mer generelt, et topologisk rom).

Definisjon 11.36: La (E, d) være et ikketomt metrisk rom, og la \C(E) \subset B(E) være delmengden av begrensede kontinuerlige funksjoner f \: E \to R.

Lemma 11.37: \C(E) er et underrom av B(E), og ||.||_\infty restrikterer til en norm på \C(E). For f, g \in \C(E) er det punktvise produktet f . g i \C(E), og ||f . g||_\infty \le ||f||_\infty ||g||_\infty .

Hvis E har Bolzano-Weierstrass egenskapen, så er alle kontinuerlige funksjoner f \ E \to R begrensede, og da er \C(E) lik vektorrommet C(E) av alle kontinuerlige funksjoner f \: E \to R. For eksempel gjelder dette når E \subset R^m er lukket og begrenset.

Teorem 11.38: \C(E) er lukket i B(E), med hensyn på sup-normen.

Bevis: La (f_n)_n være en følge i \C(E), g i B(E), og anta at ||f_n - g||_\infty \to 0 når n \to \infty. Vi må vise at g er kontinuerlig.

La x \in E. Vi viser at g er kontinuerlig i x. La \epsilon>0. Siden ||f_n - g||_\infty \to 0 når n \to \infty finnes en N slik at ||f_n - g||_\infty < \epsilon/3 for alle n \ge N. Se så på funksjonen f_N i \C(E). Siden f_N er kontinuerlig (i x), finnes en \delta>0 slik at for alle y \in E med d(x, y) < \delta er |f_N(x) - f_N(y)| < \epsilon/3. Da er

|g(x) - g(y)| \le |g(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - g(y)|

\le ||g - f_N||_\infty + |f_N(x) - f_N(y)| + ||f_N - g||_\infty

< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon .

Siden dette gjelder for alle y \in E med d(x, y) < \delta, så er g kontinuerlig i x. QED.

Teorem 11.39: Hvis (E, d) er et ikketomt metrisk rom, så er (\C(E), ||.||_\infty) et komplett normert vektorrom.

Bevis: Dette følger fra Teorem 11.38, siden enhver lukket delmenge av et komplett metrisk rom er komplett, ved Lemma 11.4. QED.

Definisjon: Et komplett normert vektorrommet (V, ||.||) kalles også et **Banach-rom**. En komplett normert algebra (A, ||.||), der ||f.g|| \le ||f|| ||g|| for f, g in A, kalles en **Banach-algebra**. For eksempel er R, C, H, B(E) og \C(E) Banach-algebraer.

For a < b i R har vi nå sett tre normer på C([a,b]):

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

$$||f||_2 = (\int_a^b f(t)^2 dt)^{1/2}$$

$$||f||_\infty = \sup_{a \le t \le b} |f(t)|$$

som gir forskjellige svar på spørsmålet: “Når er to kontinuerlige funksjoner f, g \: [a,b] \to R nær hverandre?” Mer generelt, for hvert reelt tall 1 \le p < \infty kan vi definere L^p-normen

$$||f||_p = (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{1/p} .$$

Her måler ||f-g||_1 det “samlede” avviket mellom f og g, ||f-g||_2 er er bedre mål på “energien” i avviket, og ||f-g||_\infty legger vekt på det “største” avviket. I forskjellige situasjoner er det ulike mål som er mest nyttige.

Sup-normen ||.||_\infty gjør C([a,b]) til et komplett normert vektorrom, mens de andre ikke er komplette. Når man arbeider med L^p-normen blir man derfor ledet til å “komplettere” C([a,b]) til et vektorrom L^p([a,b]), som blir komplett under ||.||_p. Elementene i L^p([a,b]) er da visse ekvivalensklasser av “målbare” funksjoner f \: [a, b] \to R. Tilfellet p=2 er spesielt, siden ||.||_2-normen kommer fra et indreprodukt

$$(f,g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

i den forstand at ||f||_2^2 = (f,f). Vi kaller L^2([a,b]) med dette indreproduktet et **Hilbert-rom**.