MAT1300 – Analyse I – 23. mars 2009

## 10.3 Metriske rom

Har gjort analyse for funksjoner på R ved hjelp av avstandsbegrepet $|y-x|$ gitt ved absoluttverdien til differansen mellom to punkter, og i $R^m$ ved hjelp av den Euklidiske normen $||y-x||$ til differansen, der $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}$. Underveis hadde vi bruk for ulikheter som

$$\max_{1 \le i \le m} |x_i| \le ||x|| \le \sum_{i=1^m} |x_i|$$

$$\le m \max_{1 \le i \le m} |x_i|$$

(se oppgave 4.6). Disse andre uttrykkene, $\max_{1 \le i \le m} |x_i|$ og $\sum_{i=1^m} |x_i|$, definerer andre avstandsbegrep i $R^m$ enn den vanlige Euklidiske avstanden, men har likevel bruksområder. De er eksempler på generelle normer på vektorrom:

Definisjon 10.14: La V være et reelt vektorrom og $N \: V \to R$ en funksjon. Vi skriver $||x|| = N(x)$ og sier at N er en **norm** på V dersom følgende holder:

(i) $||x|| \ge 0$ for alle $x \in V$.
(ii) Hvis $||x|| = 0$ så er $x = 0$.
(iii) Hvis $k \in R$ og $x \in V$ så er $||kx|| = |k| \, ||x||$.
(iv) Hvis $x, y \in V$ så er $||x+y|| \le ||x|| + ||y||$.

Egenskap (iv) kalles **trekantulikheten**. Et vektorrom V med en norm $||.||$ kalles et **normert vektorrom**, og skrives ofte $(V, ||.||)$.

Dersom V er et komplekst vektorrom, og de tilsvarende egenskapene holder med $k \in C$, så kaller $(V, ||.||)$ et normert komplekst vektorrom.

Eksempel: For $x \in R^m$ la $||x||_\infty = \max_{1 \le i \le m} |x_i|$ og $||x||_1 = \sum_{i=1}^m |x_i|$. Da er $(R^m, ||.||_\infty)$ og $(R^m, ||.||_1)$ eksempler på normerte vektorrom.

Gitt en norm $||.||$ på V sier vi at $d(x,y) = ||y-x||$ er **avstanden** mellom x og y. Dette er et eksempel på et avstandsbegrep, eller en **metrikk**, på V. Vi kan også snakke om metrikker på generelle mengder X, som ikke behøver ha en vektorromsstruktur.

Definisjon 10.17: La X være en mengde og $d \: X^2 = X \times X \to R$ en funksjon. Vi sier at d er en **metrikk** på X dersom følgende holder:

(i) $d(x, y) = 0$ hvis og bare hvis $x=y$.
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ for alle $x, y \in X$.
(iii) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$ for alle $x, y, z \in X$.

Egenskap (iii) kalles **trekantulikheten**. En mengde X med en metrikk d kalles et

**metrisk rom**, og skrives ofte $(X, d)$. Merk at $X$ ikke behøver være et vektorrom. For $x, y \in X$ er

$$0 = d(x,x) \le d(x, y) + d(y, x) = 2\, d(x,y)$$

så de andre aksiomene medfører at $d(x, y) \ge 0$ for alle $x, y \in X$. Metriske rom generaliserer normerte vektorrom.

Oppgave 10.19: Hvis $(V, \|.\|)$ er et normert vektorrom (over R eller C), og vi lar $X = V$, $d(x, y) = \|y-x\|$, så er $(X, d) = (V, d)$ et metrisk rom.

For å vise dette, sjekker vi:

(i) $d(x, y) = \|y-x\| = 0$ hvis og bare hvis $y-x=0$, som skjer hvis og bare hvis $x=y$.
(ii) $d(x, y) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1|\, \|x-y\| = \|x-y\| = d(y,x)$ for alle $x, y \in V$.
(iii) $d(x, z) = \|z-x\| = \|(y-x) + (z-y)\| \le \|y-x\| + \|z-y\| = d(x, y) + d(y, z)$.

QED.

Det finnes mer eksotiske metrikker på vektorrom enn de som kommer fra normer.

Oppgave 10.20: La $\|.\|$ være den Euklidiske normen på $R^m$. La $d(x, y) = \|x\| + \|y\|$ for $x \ne y$, og $d(x, x) = 0$. Da er $(R^m, d)$ et metrisk rom. (British Railway non-stop metric.)

Avstanden med hensyn på $d$ mellom $x$ og $y$, for $x \ne y$, er den Euklidiske lengden til veien fra $x$ til $0$ og videre til $y$.

For å vise dette, sjekker vi:

(i) For $x \ne y$ er $x \ne 0$ eller $y \ne 0$ så $\|x\| + \|y\| > 0$.
(ii) For $x \ne y$ er $d(x, y) = \|x\| + \|y\| = \|y\| + \|x\| = d(y,x)$.
(iii) Hvis $x=y$ eller $y=z$ er $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$. Hvis $x = z$ er $0 \le d(x, y) + d(y, z)$. Trekantulikheten holder i begge tilfeller. Ellers er $x$, $y$ og $z$ alle forskjellige, og $d(x, z) = \|x\| + \|z\| \le \|x\| + \|y\| + \|y\| + \|z\| = d(x, y) + d(y, z)$.

Oppgave 10.21: La $\|.\|$ være den Euklidiske normen på $R^m$. La $d(x, y) = \|y-x\|$ dersom $x$ og ligger på samme linje gjennom origo. Ellers la $d(x, y) = \|x\| + \|y\|$. Da er $(R^m, d)$ et metrisk rom. (British Railway stopping metric.)

Lemma 10.36: En delmengde $E \subset R^m$, og mer generelt en delmengde $E \subset X$ der $(X, d)$ er et metrisk rom, kan gis en **restriktert metrikk** $d_E$. La $d_E \: E \times E \to R$ være gitt ved $d_E(x, y) = d(x, y)$ for $x, y \in E$. Da er $(E, d_E)$ et metrisk rom.

Vi kan gjøre analyse i normerte vektorrom, og mer generelt i metriske rom.

Definisjon 10.22: La $(X, d)$ være et metrisk rom, $(a_n)_{n=1}^\infty$ en følge av punkter i $X$, og $a \in X$. Vi sier at $(a_n)_n$ **konvergerer** mot $a$ når $n \to \infty$, og skriver $a_n \to a$ når $n \to \infty$, dersom $d(a_n, a) \to 0$ når $n \to \infty$. Med andre ord, gitt $\epsilon > 0$ må det finnes en $n_0(\epsilon) \in N$ slik at for alle $n \ge n_0(\epsilon)$ er $d(a_n, a) < \epsilon$. Vi kaller $a$ **grensen** til følgen $(a_n)_n$.

Lemma 10.24 og 10.26: La $(X, d)$ være et metrisk rom.

(i) Grensen er unik hvis den eksisterer. Hvis $a_n \to a$ og $a_n \to b$ når $n \to \infty$ så er $a=b$.

(ii) Delfølger av konvergente følger er konvergente. Hvis $a_n \to a$ når $n \to \infty$ og $n(1) < n(2) < \dots$, så vil $a_{n(j)} \to a$ når $j \to \infty$.

(iii) Konstante følger er konvergente. Hvis $c \in X$ og $a_n = c$ for alle $n \in N$, så vil $a_n \to c$ når $n \to \infty$.

Disse resultatene gjelder spesielt når $(X, d)$ er det underliggende metriske rommet til et normert vektorrom $(V, ||.||)$. I et normert vektorrom gjelder videre

(iv) Hvis $a_n \to a$ og $b_n \to b$ når $n \to \infty$ vil $a_n + b_n \to a+b$ når $n \to \infty$.

(v) Hvis $a_n \to a$ når $n \to \infty$ og $k \in R$ (eller $C$) vil $ka_n \to ka$ når $n \to \infty$.

(Gi bevis?)

Vi kan snakke om lukkede delmengder, åpne delmengder, $\epsilon$-baller og omegner i et generelt metrisk rom $(X, d)$.

Definisjon 10.27: La $(X, d)$ være et metrisk rom.

En delmengde $F \subseteq X$ er **lukket** i $X$ dersom for hver følge $(x_n)_n$ i $F$ som er konvergent i $X$, så ligger grensen i $F$. Med andre ord, dersom $x_n \in F$ for hver $n \in N$, $x \in X$, og $d(x_n, x) \to 0$ når $n \to \infty$, så må $x \in F$.

En delmengde $U \subseteq X$ er **åpen** i $X$ dersom for hver $x \in U$ finnes det en $\epsilon = \epsilon(x) > 0$ slik at for hver $y \in X$ med $d(x, y) < \epsilon$ er $y \in U$.

For $x \in X$ og $r > 0$ la

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r \}$$

og

$$\bar B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \le r \}.$$

Da er $B(x, r)$ åpen i $X$, og $\bar B(x, r)$ er lukket i $X$. Vi kaller $B(x, r)$ den **åpne ballen** om $x$ med radius $r$, mens $\bar B(x, r)$ er den **lukkede ballen** om $x$ med radius $r$.

Merk at utsagnet "$F$ er lukket" implisitt henviser til det omkringliggende metriske rommet $(X, d)$, og tilsvarende for "$U$ er åpen", samt notasjonene $B(x, r)$ og $\bar B(x, r)$. Det er mer presist å si at "$F$ er lukket i $X$", osv.

Lemma 10.29: En delmenge $U$ i et metrisk rom $(X, d)$ er åpen hvis og bare hvis for hvert punkt $x \in U$ finnes en $\epsilon>0$ slik at $B(x, r) \subseteq U$.

Definisjon 10.31: En **omegn** N om et punkt x i et metrisk rom (X, d) er en delmengde N \subseteq X slik at det finnes en \epsilon>0 med B(x, \epsilon) \subseteq N.  Spesielt er da x \in N.

Lemma: En delmengde U \subseteq X er åpen hvis og bare hvis den er en omegn om hvert av sine punkter.

Lemma: La (X, d) være et metrisk rom.  En delmengde U \subseteq X er åpen i X hvis og bare hvis komplementet F = X \setminus U er lukket i X.

Bevis:  La U \subseteq X være åpen, og la F = X \setminus U.  La (x_n)_n være en følge i F, som konvergerer i X mot et punkt x \in X.  Skal vise at x \in F.  Alternativet er at x \in U.  Siden U er åpen finnes \epsilon>0 slik at B(x, \epsilon) \subset U. Siden x_n \to x når n \to \infty finnes n_0(\epsilon) \in N slik at x_n \in B(x, \epsilon) for alle n \ge n_0(\epsilon).  For slike n er x_n \in U, som strider mot antagelsen x_n \in F.

La F \subseteq X være lukket, og la U = X \setminus F.  La x \in U.  Skal vise at det finnes en \epsilon>0 slik at B(x, \epsilon) \subseteq U.  Alternativt vil det for hver n \in N være slik at B(x, 1/n) \not\subseteq U, slik at det finnes et punkt x_n \in B(x, 1/n) med x_n \notin U, dvs. x_n \in F.  Velg en slik x_n for hver n \in N.  Da er (x_n)_n en følge i F.  Siden x_n \in B(x, 1/n) er d(x_n, x) < 1/n \to 0 når n \to \infty, så x_n \to x når n \to \infty.  Siden F er lukket på da x \in F, som strider mot antagelsen x \in U. QED.

Lemma 10.33: La (X, d) være et metrisk rom, og la

\tau = \{U \subseteq X \mid U er åpen i X\}

være samlingen av alle de åpne delmengdene i X.

(i) \emptyset, X \in \tau.
(ii) Hvis U_\alpha \in \tau for alle \alpha \in A, så er \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau.
(iii) Hvis U_1, U_2, \dots, U_n \in \tau, så er \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau.

Lemma 10.34: La (X, d) være et metrisk rom, og la

\Cal F = \{F \subseteq X \mid F er lukket i X\}

være samlingen av alle de lukkede delmengdene i X.

(iv) \emptyset, X \in \Cal F.
(v) Hvis F_\alpha \in \Cal F for alle \alpha \in A, så er \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \Cal F.
(vi) Hvis F_1, F_2, \dots, F_n \in \Cal F, så er \bigcup_{i=1}^n F_i \in \Cal F.

Definisjon: La (X, d) og (Z, \rho) være metriske rom.  En funksjon f \: (X, d) \to (Z, \rho) er **kontinuelig i et punkt** x \in X dersom det for hver \epsilon>0 finnes en

$\delta = \delta(x, \epsilon)>0$ slik at for alle $y \in X$ med $d(x, y) < \delta$ er

$$\rho(f(x), f(y)) < \epsilon .$$

Hvis $f$ er kontinuelig i hvert punkt $x \in X$ så sier vi at $f$ er **kontinuelig** på $X$.

For $X = E \subset R^m$ med restriksjonen av den Euklidiske metrikken, og $Z = R^p$, så stemmer denne definisjonen av en kontinuelig avbildning $f \: E \to R^p$ overens med den vi har gitt tidligere.

Lemma 10.37: La $(X, d)$ og $(Z, \rho)$ være metriske rom, og anta at funksjonen $f \: X \to Z$ er kontinuelig i et punkt $x \in X$. La $(x_n)_n$ være en følge i $X$ med $x_n \to x$ i $(X, d)$ når $n \to \infty$. Da vil $f(x_n) \to f(x)$ i $(Z, \rho)$ når $n \to \infty$.

Lemma 10.38: La $(X, d)$ og $(Z, \rho)$ være metriske rom. En funksjon $f \: X \to Z$ er kontinuelig hvis og bare hvis inversbildet $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ av enhver åpen delmengde $U$ i $Z$ er åpen i $X$.

Lemma 10.39: La $(X, d)$, $(Y, \theta)$ og $(Z, \rho)$ være metriske rom. La $f \: X \to Y$ og $g \: Y \to Z$ være kontinuelige avbildninger. Da er også sammensetningen $gf \: X \to Z$ kontinuelig.