MAT1300 – Analyse I – 24. februar 2009

Lemma: La $E \subset R^m$ være en omegn om x, og anta at $f, g \: E \to R^p$ er deriverbare i x. Da er f+g deriverbar i x, med derivert $D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$, eller ekvivalent, $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Bevis: Vi vet at

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + \epsilon_1(h)||h||$$

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)(h) + \epsilon_2(h)||h||$$

for alle små h, der $\epsilon_1(h) \to 0$ og $\epsilon_2(h) \to 0$ når $h \to 0$. (Utelater avhengigheten av x.) Da er

$$(f+g)(x+h) = (f+g)(x) + (f'(x)+g'(x))(h) + \epsilon(h)||h||$$

der $\epsilon(h) = \epsilon_1(h) + \epsilon_2(h)$. Ved trekantulikheten går $\epsilon(h) \to 0$ når $h \to 0$, så f+g er deriverbar i x, med derivert $f'(x) + g'(x)$. QED.

Lemma: En lineæravbildning $\alpha \: R^m \to R^p$ er deriverbar overalt, med derivert lik α. Så $D\alpha(x) = \alpha$, eller $\alpha'(x) = \alpha$, for alle $x \in R^m$.

Bevis: Vi har

$$\alpha(x+h) = \alpha(x) + \alpha(h) + \epsilon(x, h)||h||$$

der $\epsilon(x, h) = 0$ for alle x og h, så det er klart at $\epsilon(x, h) \to 0$ når $h \to 0$. Altså er $\alpha \: R^m \to R^p$ den deriverte til α i x. QED.

Lemma: La $E \subset R^m$ være en omegn om x, og la $F \subset R^n$ være en omegn om y. La $f \: E \to R^p$ være deriverbar i x, og la $g \: F \to R^q$ være deriverbar i y. Da er $E \times F \subset R^m \times R^n = R^{m+n}$ en omegn om (x, y), og funksjonen $f \times g \: E \times F \to R^p \times R^q = R^{p+q}$ gitt ved

$$(f \times g)(u, v) = (f(u), g(v))$$

for $u \in E$, $v \in F$, er deriverbar i (x, y), med derivert

$$D(f \times g)(x, y) = Df(x) \times Dg(y)$$

som lineær-avbildning $R^m \times R^n \to R^p \times R^q$, der

$$(Df(x) \times Dg(y))(h, k) = (Df(x)(h), Dg(y)(k)) .$$

Kommentar: Boken skriver (f,g) for $f \times g$, og (Df(x), Dg(y)) for $Df(x) \times Dg(y)$. Jacobi-matrisen til $f \times g$ er blokk-summen

$$\begin{matrix} D_{i,j}f(x) & 0 \\ 0 & D_{k,l}g(y) \end{matrix}$$

der $1 \le i \le m$, $1 \le k \le n$, $1 \le j \le p$ og $1 \le l \le q$.

Bevis: Det finnes en $\delta>0$ slik at $B(x, \delta) \subset E$ og $B(y, \delta) \subset F$. Da er

$$B((x, y), \delta) \subset B(x, \delta) \times B(y, \delta) \subset E \times F,$$

siden $||(h,k)|| \ge ||h||, ||k||$ for $h \in R^m$, $k \in R^n$. Altså er $E \times F$ en omegn om (x, y).

Vet at

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)(h) + \epsilon_1(h) ||h||$$

$$g(y+k) = g(y) + Dg(y)(k) + \epsilon_2(k) ||k||$$

for alle små h og k, og $\epsilon_1(x,h) \to 0$ når $h \to 0$, mens $\epsilon_2(y,k) \to 0$ når $k \to 0$. (Utelater avhengigheten av x og y.) Da er

$$(f \times g)((x,y) + (h,k)) = (f \times g)(x, y) + (Df(x) \times Dg(y))(h, k)$$

$$+ \epsilon(h,k) ||(h, k)||$$

der

$$\epsilon(h,k) ||(h, k)|| = (\epsilon_1(h) ||h||, \epsilon_2(k) ||k||) .$$

Dette gir en veldefinert funksjon $\epsilon(h, k)$ for alle små $(h,k) \ne (0,0)$, siden $||(h,k)|| \ne 0$ for slike (h,k). Her er

$$||\epsilon(h,k)|| \, ||(h, k)|| = || (\epsilon_1(h) ||h||, \epsilon_2(k) ||k||) ||$$

$$\le ||\epsilon_1(h)|| \, ||h|| + ||\epsilon_2(k)|| \, ||k||$$

$$\le (||\epsilon_1(h)|| + ||\epsilon_2(k)||) \, ||(h,k)||$$

så

$$||\epsilon(h,k)|| \le ||\epsilon_1(h)|| + ||\epsilon_2(k)|| \to 0+0 = 0$$

når $(h,k) \to 0$. QED.

Nytt bevis av det første lemmaet: La $\alpha \: R^m \to R^m \times R^m$ være diagonalavbildningen $\alpha(x) = (x, x)$, og la $\beta \: R^p \times R^p \to R^p$ være sumavbildningen $\beta(x, y) = x+y$. Disse er begge lineære. For $f, g \colon R^m \to R^p$ er da

$$f+g = \beta(f \times g)\alpha \colon R^m \to R^p$$

siden $\beta(f \times g)\alpha(x) = \beta(f \times g)(x, x) = \beta(f(x), g(x)) = f(x) + g(x)$. Ved kjerneregelen og lemmaet om den deriverte av lineære avbildninger er da

$$D(f+g)(x) = \beta D(f \times g)(x,x) \alpha = Df(x) + Dg(x) .$$

QED.

Tilsvarende bevis er nyttige for å derivere funksjoner som $\langle f, g\rangle$.

6.3. Middelverdiulikheten i høyere dimensjoner

Teorem (Middelverdiulikheten):
La $U \subset R^m$ være åpen, og $f \colon U \to R^p$ deriverbar. La $a, b \in U$ og anta at linjestykket

$$L = \{(1-t)a + tb : 0 \le t \le 1\}$$

er inneholdt i U. Hvis K er en konstant slik at $||Df(x)|| \le K$ for alle $x \in L$, så er

$$||f(b) - f(a)|| \le K ||b-a|| .$$

Bevis:
Hvis $f(a) = f(b)$ er det ikke noe å bevise. Hvis ikke kan vi la

$$u = {f(b) - f(a) \over ||f(b) - f(a)||}$$

være enhetsvektoren i samme retning som $f(b) - f(a)$, med $||u|| = 1$. Vi definerer en funksjon $g \colon [0,1] \to R$ ved

$$g(t) = u \cdot (f((1-t)a + tb) - f(a)) .$$

Da er

$$g(0) = u \cdot (f(a) - f(a)= 0$$

$$g(1) = u \cdot (f(b) - f(a)) = ||f(b) - f(a)||$$

og g er kontinuerlig på $[0,1]$ og deriverbar for alle $t \in (0,1)$, med

$$g'(t) = u \cdot Df((1-t)a + tb)(b-a)$$

ved kjerneregelen. Den deriverte av den konstante funksjonen $u \cdot f(a)$ er 0, mens den deriverte til den lineære kjernen $(1-t)a + tb$ er $b-a$. Ved Cauchy--Schwarz' ulikhet og definisjonen av operatornormen er

$$|g'(t)| \le ||u||\ \ ||Df((1-t)a + tb)(b-a)|| = ||Df((1-t)a + tb)(b-a)||$$

$$\le ||Df((1-t)a + tb)||\ ||b-a|| \le K\ ||b-a||$$

for alle $t \in (0,1)$. Ved middelverdisetningen finnes en $c \in (0,1)$ med

$$g(1) - g(0) = g'(c)(1-0) = g'(c) \le K\ ||b-a||$$

så vi har vist at

$$||f(b) - f(a)|| = g(1) - g(0) \le K\ ||b-a|| .$$

QED.

Med litt mer arbeid kan man utlede dette fra middelverdiulikheten i stedet for middelverdisetningen.

Det er ikke noen umiddelbar generalisering av denne middelverdiulikheten til en middelverdisetning i høyere dimensjoner. Se Exercise 6.31.