MAT1300 – Analyse I – 24. mars 2009

10.4 Normerte vektorrom

Lemma: La $\|.\|_1$ og $\|.\|_2$ være to normer på samme vektorrom V. Da er følgende utsagn ekvivalente:

(a) Det finnes $K>0$ slik at $\|x\|_2 \le K \|x\|_1$ for alle $x \in V$.

(b) Hvis $x, x_n \in V$ for $n \in N$ og $\|x_n - x\|_1 \to 0$ når $n \to \infty$ så vil $\|x_n - x\|_2 \to 0$ når $n \to \infty$.

Bevis:
Anta (a). Da er $\|x_n - x\|_2 \le K \|x_n - x\| \to K \cdot 0 = 0$ når $n \to \infty$, så (b) holder.

Omvendt, anta at (a) er usann. Da finnes for hver $n \in N$ en $y_n \in V$ slik at

$$\|y_n\|_2 > n \|y_n\|_1$$

(ellers ville (a) vært sann med $K = n$). La så $x_n = y_n/(n \|y_n\|_1)$, slik at $\|x_n\|_1 = 1/n$. Da vil $\|x_n\|_1 \to 0$ når $n \to \infty$, men $\|x_n\|_2 = \|y_n\|_2/(n \|y_n\|_1) > 1$ for alle n. Spesielt kan ikke $\|x_n\|_2 \to 0$. Derfor er (b) med $x=0$ usann. QED.

Lemma 10.41: La $\|.\|_1$ og $\|.\|_2$ være to normer på samme vektorrom V. Da er følgende utsagn ekvivalente:

(a') Det finnes $K, L > 0$ slik at $L \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le K \|x\|_1$ for alle $x \in V$.

(b') Hvis $x, x_n \in V$ for $n \in N$ så vil $\|x_n - x\|_1 \to 0$ når $n \to \infty$ hvis og bare hvis $\|x_n - x\|_2 \to 0$ når $n \to \infty$.

Bevis:
Her er (a') ekvivalent med (a) i det foregående lemmaet, samt (a) med rollene til $\|.\|_1$ og $\|.\|_2$ byttet om. Dette er ekvivalent med (b) i det foregående lemmaet, samt (b) med rollene til $\|.\|_1$ og $\|.\|_2$ byttet om, som igjen er ekvivalent med (b'). QED.

Definisjon:
Vi sier at to normer $\|.\|_1$ og $\|.\|_2$ på samme vektorrom V er **Lipschitz ekvivalente** dersom det finnes $K, L > 0$ slik at $L \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le K \|x\|_1$ for alle $x \in V$.

Ved Lemma 10.41 er $\|.\|_1$ og $\|.\|_2$ Lipschitz ekvivalente nøyaktig når konvergens av en følge i $(V, \|.\|_1)$ er ekvivalent med konvergens av samme følge i $(V, \|.\|_2)$. Det er lett å vise at Lipschitz ekvivalens er en ekvivalensrelasjon.

Teorem 10.45:

Alle normer på R^m er Lipschitz ekvivalente.

Bevis:
Vi viser at enhver norm $||.||_*$ på R^m er Lipschitz ekvivalent med den Euklidiske normen

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^m x^i} .$$

Vi viser først at $||x||_* \le K ||x||$ for en passende $K>0$. La e_i være den i'te enhetvektoren i R^m. Da er

$$||x||_* = || \sum_{i=1}^m x_i e_i ||_*$$

$$\le \sum_{i=1}^m |x_i| ||e_i||_*$$

$$\le m \max_{1 \le i \le m} |x_i| \max_{1 \le i \le m} ||e_i||_*$$

$$\le m \max_{1 \le i \le m} ||e_i||_* ||x||$$

der vi har brukt ulikheten $\max_{1 \le i \le m} |x_i| \le ||x||$. La så $K = m \max_{1 \le i \le m} ||e_i||_*$.

For å bevise omvendingen bruker vi at enhver kontinuelig funksjon på en lukket og begrenset delmengde i R^m oppnår sitt minimum. La $f \: R^n \to R$ være gitt ved $f(x) = ||x||_*$. Ved trekantulikheten for $||.||_*$ og resultatet ovenfor er

$$|f(x) - f(y)| = | ||x||_* - ||y||_* | \le ||x - y||_* \le K ||x - y||$$

som medfører at f er (uniformt) kontinuelig. Enhetssfæren

$$S(0, 1) = \{ x \in R^m \mid ||x|| = 1 \}$$

er lukket og begrenset i den Euklidiske metrikken. (For å se at $S(0,1)$ er lukket, anta at $x_n \to x$ når $n \to \infty$ i R^m, der $x_n \in S(0,1)$ for alle $n \in N$. Da er $||x_n|| = 1$ for alle n, og siden $||.||$ er en kontinuerlig funksjon må $||x_n|| \to ||x||$ når $n \to \infty$, så $||x|| = 1$. Altså er $x \in S(0,1)$.)

Ved Teorem~4.44 finnes en $k \in S(0,1)$ slik at $f(k) \le f(x)$ for alle $x \in S(0,1)$. Siden $||k||=1$ er $k \ne 0$, så $f(k) = ||k||_* > 0$. La $L = ||k||_*$. Da er $||x||_* = f(x) \ge f(k) = ||k||_* = L > 0$ for alle x med $||x||=1$. Mer generelt, for $x \ne 0$ er $x/||x|| \in S(0,1)$, så $|| x/||x|| ||_* \ge L$ som medfører $||x||_* \ge L ||x||$. Dette er klart for $x=0$, så vi har vist at $L ||x|| \le ||x||_*$ for alle x. QED.

Dette resultatet gjelder bare for endelig-dimensjonale vektorrom.

Eksempel:
La s_{00} være vektorrommet av reelle følger $a = (a_n)_n$ slik at $a_n=0$ for alle tilstrekkelig store n. Uttrykkene

$$||a||_1 = \sum_n |a_n|$$

$$||a||_2 = \sqrt{ \sum_n a_n^2 }$$

$$||a||_\infty = \max_n |a_n|$$

definerer tre forskjellige normer på s_{00}. Merk at alle summene er endelige. Vi har ulikhetene

$$||a||_\infty \le ||a||_2 \le ||a||_1$$

for alle $a \in s_{00}$.

Det finnes ingen konstant $K>0$ slik at $||a||_1 \le K ||a||_2$ for alle a i s_{00}.
La for eksempel $a = (a_n)_n$ være gitt ved $a_n = 1$ for $n \le m$ og $a_n = 0$ for $n > m$. Da er $||a||_1 = m$ og $||a||_2 = \sqrt{m}$. Da holder ikke ulikheten $m \le K \sqrt{m}$ så fort $m > K^2$.

Det finnes heller ingen konstant $K>0$ slik at $||a||_2 \le K ||a||_\infty$ for alle a i s_{00}. La $a = (a_n)_n$ være som ovenfor. Da er $||a||_2 = \sqrt{m}$ og $||a||_\infty = 1$. Igjen holder ikke ulikheten $\sqrt{m} \le K \cdot 1$ så fort $m > K^2$.

Altså er disse tre normene ikke Lipschitz ekvivalente.

For normerte vektorrom $(U, ||.||_U)$ og $(V, ||.||_V)$ er vi typisk ikke interessert i alle lineære avbildninger (= transformasjoner) $\alpha \: U \to V$, men bare de som er kontinuelige. Det er slike lineæravbildninger α som vil ta en konvergent følge $x_n \to x$ i $(U, ||.||_U)$ til en konvergent følge $\alpha(x_n) \to \alpha(x)$ i $(V, ||.||_V)$.

Oppgave 10.48:
La $(U, ||.||_U)$ og $(V, ||.||_V)$ være endelig-dimensjonale normerte vektorrom. Da er enhver lineæravbildning $\alpha \: U \to V$ kontinuelig.

Bevis: Velg lineære isomorfier $f \: R^m \to U$ og $g \: R^p \to V$. Normen $||x||_m = ||f(x)||_U$ på R^m er Lipschitz ekvivalent med den Euklidiske normen $||x||$. Tilsvarende er normen $||y||_p = ||g(y)||_V$ på R^p Lipschitz ekvivalent med den Euklidiske normen $||y||$. Sammensetningen $\beta = g^{-1} \alpha f \: R^m \to R^p$ er en lineæravbildning, og derfor kontinuelig med hensyn på de Euklidiske normene på R^m og R^p. Ved Lipschitz ekvivalens er $\beta \: (R^m, ||.||_m) \to (R^p, ||.||_p)$ også kontinuelig. Videre er $f^{-1} \: (U, ||.||_U) \to (R^m, ||.||_m)$ og $g \: (R^p, ||.||_p) \to (V, ||.||_V)$ kontinuelige, så sammensetningen $\alpha = g \beta f^{-1} \: (U, ||.||_U) \to (V, ||.||_V)$ er kontinuelig. QED.

Lemma 10.49:
La $(U, ||.||_U)$ og $(V, ||.||_V)$ være normerte vektorrom. En lineæravbildning $\alpha \: U \to V$ er kontinuelig hvis og bare hvis det finnes en K slik at $||\alpha(x)||_V \le K ||x||_U$ for alle $x \in U$.

Bevis: Se det første lemmaet i dette notatet.

Eksempel 10.51: La $n \in N$, $U = P_n(x) = \{\text{alle polynomer } p(x) \text{ av grad } \le n\}$ og la $D \: P_n(x) \to P_n(x)$ være gitt ved $Dp(x) = p'(x)$ (det deriverte polynomet). Vi kan gi $P_n(x)$ en norm ved

$$||p(x)|| = \sup_{0 \le t \le 1} |p(t)| .$$

Siden $P_n(x)$ er endelig-dimensjonal er D automatisk kontinuelig, og derfor også begrenset. Altså finnes det en konstant K (avhengig av n) slik at $||Dp(x)|| \le K ||p(x)||$, slik at:

$$\sup_{0 \le t \le 1} |p'(t)| \le K \sup_{0 \le t \le 1} |p(t)|$$

Definisjon 10.54:
La $(U, ||.||_U)$ og $(V, ||.||_V)$ være normerte vektorrom. Hvis $\alpha \: U \to V$ er en kontinuelig lineæravbildning definerer vi **operatornormen** $||\alpha||$ som

$$||\alpha|| = \sup_{||x||_U=1} ||\alpha(x)||_V .$$

Dette gir mening, siden mengden $\{ ||\alpha(x)||_V \mid ||x||_U=1 \}$ er oppad begrenset hvis og bare hvis α er kontinuelig.

Oppgave 10.56(i):
Vi har $||\alpha(x)||_V \le ||\alpha|| \, ||x||_U$ for alle $x \in U$.

Bevis: Dette er klart for $x=0$. For $x\ne0$ er $||\alpha(x/||x||_U)||_V \le ||\alpha||$, som gir ulikheten. QED.

Lemma 10.57:
La U, $||.||_U)$ og $(V, ||.||_V)$ være normerte vektorrom, og la $L(U, V)$ være vektorrommet av alle kontinuelige lineæravbildninger $\alpha \: U \to V$. Da er operatornormen $||.||$ en norm på $L(U, V)$, slik at $(L(U, V), ||.||)$ er et normert vektorrom.

(Definisjon 10.58?)