MAT1300 – ANALYSE I – 26. JANUAR 2009

John Rognes

Definisjon. La
$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = x_1, x_2, \dots$$
være en følge, og la
$$n(1) < n(2) < \cdots < n(j) < n(j+1) < \dots$$
være en strengt voksende følge av naturlige tall. Da er
$$(x_{n(j)})_{j=1}^{\infty} = x_{n(1)}, x_{n(2)}, \dots$$
også en følge, som vi kaller en delfølge av $(x_n)_n$.

Teorem (BolzanoWeierstrass). *La $(x_n)_n$ være en begrenset følge i $\mathbb{R}$. Da finnes det en konvergent delfølge $(x_{n(j)})_j$.*

Med andre ord, hvis $(x_n)_n$ er en reell tallfølge, og det finnes en $K \in \mathbb{R}$ slik at $|x_n| \le K$ for alle n, så finnes det en strengt voksende følge $(n(j))_j$ av naturlige tall og et tall $x \in \mathbb{R}$, slik at $x_{n(j)} \to x$ når $j \to \infty$.

Hverken grensen x eller delfølgen $(x_{n(j)})_j$ er entydig bestemt. For eksempel, hvis $x_n = (-1)^n = +1$ for n jevn, og -1 for n odde, kan vi la $n(j) = 2j$ for alle j, slik at $x_{n(j)} = +1$ for alle j, og $x_{n(j)} \to x = +1$ når $j \to \infty$. Alternativt kan vi la $n(j) = 2j - 1$ for alle j, slik at $x_{n(j)} = -1$ for alle j, og $x_{n(j)} \to x = -1$ når $j \to \infty$.

Bevis av teoremet. Det er klart at $K \ge 0$. La $[a_0, b_0] = [-K, K]$, og la $c_0 = (a_0 + b_0)/2 = 0$. For hver n ligger x_n i $[a_0, c_0]$ og/eller i $[c_0, b_0]$. Enten finnes det uendelig mange n slik at $x_n \in [a_0, c_0]$, eller så er det bare endelig mange slike n. I det siste tilfellet finnes det uendelig mange n slik at $x_n \in [c_0, b_0]$. I det første tilfellet lar vi $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$. I det andre tilfellet lar vi $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$. Viser ved induksjon på $m \in \mathbb{N}$ at det finnes tall
$$a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_m \le b_m \le \cdots \le b_1 \le b_0$$
slik at
$$x_n \in [a_m, b_m] \text{ for uendelig mange } n \in \mathbb{N}$$
og
$$b_m a_m = (b_{m-1} a_{m-1})/2.$$
Anta dette gjelder for en $m \ge 1$. La $c_m = (a_m + b_m)/2$. Av de uendelig mange n slik at $x_n \in [a_m, b_m]$ må enten uendelig mange ligge i $[a_m, c_m]$, eller så må uendelig

mange ligge i $[c_m, b_m]$. I det første tilfellet lar vi $[a_{m+1}, b_{m+1}] = [a_m, c_m]$. I det andre tilfellet lar vi $[a_{m+1}, b_{m+1}] = [c_m, b_m]$. I begge tilfeller er den induktive hypotesen bekreftet for $m + 1$.

La $n(1) = 1$. Anta at vi har valgt $n(1) < \cdots < n(m)$ slik at $x_{n(j)} \in [a_j, b_j]$ for hver $j = 1, \dots, m$. Det finnes uendelig mange n slik at $x_n \in [a_{m+1}, b_{m+1}]$. Spesielt kan vi velge en $n(m + 1)$ slik at $n(m) < n(m + 1)$ og $x_{n(m+1)} \in [a_{m+1}, b_{m+1}]$. Ved induksjon på m får vi valgt en delfølge $(x_{n(j)})_{j=1}^{\infty}$ av $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ med $x_{n(j)} \in [a_j, b_j]$ for hver j. Med andre ord, er $a_j \leq x_{n(j)} \leq b_j$ for hver j.

Følgen $(a_j)_j$ er voksende og oppad begrenset, så den konvergerer mot en grense x. Vi vet at $b_j a_j \to 0$, så $b_j \to x$. Da følger at også $x_{n(j)} \to x$ når $j \to \infty$. For gitt $\epsilon > 0$ finnes $j_0 = j_0(\epsilon)$ slik at $|a_j x| < \epsilon$ og $|b_j x| < \epsilon$ for alle $j \geq j_0$. Da er også $|x_{n(j)} x| < \epsilon$ for alle $j \geq j_0$, så $x_{n(j)} \to x$ når $j \to \infty$. QED.

Sammenfatning.

Fundamentalaksiomet. *Enhver voksende, oppad begrenset følge i* $\mathbb{R}$ *er konvergent.*

Supremumsprinsippet. *Enhver ikketom, oppad begrenset delmengde i* $\mathbb{R}$ *har et supremum.*

Bolzano-Weierstrass egenskapen. *Enhver begrenset følge i* $\mathbb{R}$ *inneholder en konvergent delfølge.*

Skjæringssetningen. *Gitt en kontinuerlig funksjon* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *med* $f(a) \leq 0$ *og* $f(b) \geq 0$ *finnes en* $c \in [a, b]$ *med* $f(c) = 0$.

Middelverdiulikheten. *Gitt en deriverbar funksjon* $f : U \to \mathbb{R}$, *med* $U \subset \mathbb{R}$ *åpen,* $[a, b] \subset U$ *et lukket intervall, og* $K \in \mathbb{R}$ *en konstant slik at* $f'(x) \leq K$ *for alle* $x \in [a, b]$, *så er*

$$f(b) - f(a) \leq K(b - a).$$

Vi har vist at fundamentalaksiomet impliserer alle de andre resultatene, og utfyllende argumenter i læreboken viser omvendt at hvert av de andre resultatene impliserer fundamentalaksiomet. Disse resultatene er derfor alle logisk ekvivalente.