MAT1300 – Analyse I – 27. januar 2009

Vender fra analyse på tall-linjen $R$ til analyse på høyere-dimensjonale Euklidiske rom. Senere skal vi generalisere til (ofte uendelig-dimensjonale) normerte vektorrom. Begynner med å repetere litt lineær-algebra.

Definisjon: La det Euklidiske m-rommet $R^m$ bestå av alle ordnede m-tupler $x = (x_1, \dots, x_m)$ av reelle tall. Slike m-tupler kalles vektorer. Vi kaller $x_i$ den i-te koordinaten til $x$, for $1 \le i \le m$. [Euklid vs. Decartes.]

Summen av to vektorer $x = (x_1, \dots, x_m)$ og $y = (y_1, \dots, y_m)$ er $x+y = (x_1+y_1, \dots, x_m+y_m)$. For $k \in R$ er skalarproduktet $kx = (kx_1, \dots, kx_m)$. Nullvektoren er $0 = (0, \dots, 0)$. Vektorsummen og skalarproduktet oppfyller en liste aksiomer som gjør $R^m$ til et vektorrom. [Se et kurs i lineær algebra.]

Vi definerer prikkproduktet, eller indreproduktet, av $x$ og $y$ som

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m .$$

Dette er en symmetrisk, bilineær form på $R^m$ som er positivt definitt.

Lemma: La $x, y, z \in R^m$ og $k \in R$.
(i) $x \cdot y = y \cdot x$
(ii) $(kx) \cdot y = k(x \cdot y)$
(iii) $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
(iv) $x \cdot x \ge 0$, med likhet bare hvis $x=0$.

Disse egenskapene aksiomatiserer at $\cdot$ er et indreprodukt på $R^m$.

Definisjon: Den Euklidiske normen til $x$ er det ikke-negative reelle tallet $||x||$ gitt ved $||x|| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$. Da er $x \cdot x = ||x||^2$.

Lemma (Cauchy--Schwartz' ulikhet) Hvis $x, y \in R^m$ så er $|x \cdot y| \le ||x||\, ||y||$.

Bevis: For alle $k \in \mathbb{R}$ er

$$0 \le (kx + y) \cdot (kx + y) = k^2 ||x||^2 + 2k\, x \cdot y + ||y||^2$$
$$= ak^2 + bk + c$$

som betyr at diskriminanten

$$b^2 – 4ac$$
$$= (2\, x \cdot y)^2 – 4(||x||^2 ||y||^2)$$

til dette annengradspolynomet i $k$ ikke kan være positiv. Altså er

$$(2\, x \cdot y)^2 \le 4(||x||^2 ||y||^2)$$

som gir ulikheten. QED.

Lemma: La $x, y \in \mathbb{R}^m$ og $k \in \mathbb{R}$.
(i) $||x|| \ge 0$, med likhet bare hvis $x = 0$.
(ii) $|| kx || = |k| \, ||x||$.
(iii) $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$.

Den siste ulikheten kalles trekantulikheten. En trekant med hjørner a, b og c i $R^m$ har kanter $x = b-a$, $y = c-b$ og $x+y = c-a$, så ulikheten sier at

$$||c-a|| \le ||b-a|| + ||c-b|| .$$

Med andre ord, lengden til en kant er mindre enn eller lik summen av lengden til de to andre kantene.

Bevis av trekantulikheten:
$||x+y||^2 = (x+y) \cdot (x+y) = ||x||^2 + 2 x \cdot y + ||y||^2 \le ||x||^2 + 2 ||x|| \, ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$. Kvadratrotfunksjoner er voksende, så $||x+y|| \le ||x|| + ||y||$. QED.

Det siste lemmaet aksiomatiserer at $||-||$ er en norm på $R^m$.

Det finnes mange andre normer på $R^m$. Til å begynne med vil følgende ulikheter for $x = (x_1, \dots, x_m)$ gi den informasjonen vi trenger:

Lemma: La $x = (x_1, \dots, x_m)$ in $R^m$. Da er

$$\max\{|x_1|, \dots, |x_m|\} \le ||x|| \le$$

$$|x_1| + \dots + |x_m| \le m \max\{|x_1|, \dots, |x_m|\} .$$

Bevis:
Hvert kvadrat $x_1^2, \dots, x_m^2 \ge 0$, så for hver i er $x_i^2 \le x_1^2 + \dots + x_m^2$. Derfor er $|x_i| = \sqrt{x_i^2} \le \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2} = ||x||$. Dette gjelder for hver i, så da må også $A = \max\{|x_1|, \dots, |x_m|\} \le ||x||$.

Videre er $(|x_1| + \dots + |x_m|)^2 = \sum_{i,j=1}^m |x_i| |x_j| = \sum_{i=1}^m x_i^2 + \sum_{i \ne j} |x_i| |x_j| \ge \sum_{i=1}^m x_i^2 = ||x||^2$, så $|x_1| + \dots + |x_m| \ge ||x||$.

For hver i er $|x_i| \le \max\{|x_1|, \dots, |x_m|\}$, så ved å summere over $i = 1, \dots, m$ får vi $|x_1| + \dots + |x_m| \le m \max\{|x_1|, \dots, |x_m|\}$. QED.

Nå begynner vi med analyse i $R^m$.

Definisjon: La $(a_n)_{n=1}^\infty$ være en følge i $R^m$. Med andre ord er $a_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,m})$ en vektor i $R^m$, for hver $n \in N$. La $A = (A_1, \dots,$

$A_m)$ være en vektor i $R^m$. Vi sier at vektorfølgen $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergerer mot $A$ i $R^m$ (med den Euklidiske normen $||-||$) dersom det for hver $\epsilon>0$ finnes en $n_0(\epsilon) \in N$ slik at $||a_n – A|| < \epsilon$ for alle $n \ge n_0(\epsilon)$. Vi skriver da at $a_n \to A$ når $n \to \infty$.

For $m=1$ kan vi identifisere $R^1$ med $R$ ved å ta $(x_1)$ til $x_1$. Da er en vektorfølge i $R^1$ det samme som en tallfølge i $R$, den Euklidiske normen svarer til absoluttverdien, og det nye konvergensbegrepet er lik det gamle.

Lemma: La $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ være følger i $R^m$, og la $k \in R$.
(i) Hvis det finnes en $C \in R^m$ slik at $a_n = C$ for alle $n$, så vil $a_n \to C$ når $n \to \infty$.
(ii) Hvis $a_n \to A$ og $b_n \to B$ når $n \to \infty$, så vil $a_n + b_n \to A + B$ når $n \to \infty$.
(iii) Hvis $a_n \to A$ når $n \to \infty$, så vil $ka_n \to kA$ når $n \to \infty$.

Bevis: Som i $R$.

For $m\ge2$ har vi så langt ikke definert noe produkt $a_n b_n$ av to vektorfølger i $R^m$, som vektorfølge i $R^m$. Derfor formulerer vi heller ikke noe resultat om grensen av et slikt produkt. Derimot kan vi danne indreproduktet $a_n \cdot b_n = \langle a_n, b_n \rangle$ av to vektorfølger, som tallfølge.

Lemma: La $a_n \to A$ og $b_n \to B$ i $R^m$ når $n \to \infty$. Da vil $a_n \cdot b_n \to A \cdot B$ i $R$ når $n \to \infty$. [Oppgave.]

Lemma: Hvis $a_n \to A$ og $a_n \to B$ når $n \to \infty$, så er $A = B$. [Grensen er entydig, hvis den finnes.]

Bevis:
Hvis $A \ne B$ er $||B–A|| > 0$, så vi kan finne en $\epsilon>0$ med $2\epsilon < ||B-A||$. Siden $a_n \to A$ finnes en $n_1 = n_1(\epsilon)$ slik at $||a_n-A||<\epsilon$ for alle $n \ge n_1$. Siden $a_n \to B$ finnes en $n_2 = n_2(\epsilon)$ slik at $||a_n-B||<\epsilon$ for alle $n \ge n_2$. La $n \ge \max\{n_1, n_2\}$. Da er $||B-A|| \le ||B-a_n|| + ||a_n-A|| < \epsilon + \epsilon$, som er umulig, siden $2\epsilon < ||B-A||$. QED.

Vi har ikke definert noen ordning $a_n \le b_n$ på vektorer i $R^m$, så vi formulerer ikke noe resultat om grensen av en vektorfølge der hvert ledd er begrenset av en fast vektor.

Lemma: La $(a_n)_n$ være en følge i $R^m$, og la $n(1) < n(2) < \dots$ være en strengt voksende følge i $N$. Hvis $a_n \to A$ når $n \to \infty$ så vil også $a_{n(j)} \to A$ når $j \to \infty$.

Bevis: Som i $R$.

Fundamentalaksiomet og supremumsprinsippet i $R$ bygger begge på ordningen på $R$, siden de refererer til "voksende følger" og "minste øvre skranker". De er derfor vanskeligere å generalisere til R^m.  Bolzano—Weierstrass sats refererer bare til begrensede følger, delfølger og konvergens, og lar seg lettere generalisere.

Teorem (Bolzano—Weierstrass i R^m):
La (x_n)_n være en vektorfølge i R^m, og anta at det finnes en K \in R slik at ||x_n|| \le K for alle n.  Da finnes n(1) < n(2) < \dots i N og en X \in R^m slik at x_{n(j)} \to X når j \to \infty.

Med andre ord: enhver begrenset følge i R^m har en konvergent delfølge.

Bevis:
Vi skriver x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,m}) for hver n \in N.  Gitt vektorfølgen (x_n)_n i R^m, se først på tallfølgen av første-koordinater (x_{n,1})_n i R.  Vi har at

|x_{n,1}| \le ||x_n|| \le K

for alle n, så dette er en begrenset tallfølge.  Vi kan derfor velge ut en konvergent delfølge (x_{n(j),1})_j, der n(1) < n(2) < \dots i N, slik at

x_{n(j),1} \to X_1 når j \to \infty.

Se så på tallfølgen av andre-koordinater (x_{n(j)},2})_j i denne første delfølgen.  Vi har at

|x_{n(j),2}| \le ||x_{n(j)}|| \le K

for alle j, så dette er en begrenset tallfølge.  Vi kan derfor velge ut en konvergent delfølge (x_{n(j(k)),2})_k, der j(1) < j(2) < \dots i N, slik at

x_{n(j(k)),2} \to X_2 når k \to \infty.

Merk at n(j(1)) < n(j(2)) < \dots, så en delfølge av en delfølge er en delfølge.  Siden x_{n(j(k)),1} er en delfølge av x_{n(j),1}, som konvergerer mot X_1 når j \to \infty, så vil også

x_{n(j(k)),1} \to X_1 når k \to \infty.

Ser så på tallfølgen av tredje-koordinater (x_{n(j(k)),3})_k i denne andre delfølgen. Vi har at

|x_{n(j(k)),3}| \le ||x_{n(j(k))}|| \le K

for alle k, så dette er en begrenset tallfølge.  Vi kan derfor velge ut en konvergent delfølge (x_{n(j(k(l))),3})_l, der k(1) < k(2) < \dots i N, slik at

x_{n(j(k(l))),3} \to X_3 når l \to \infty.

Som før har vi nå at

$$x_{n(j(k(l))),i} \to X_i \text{ når } l \to \infty,$$

for $i=1$, 2 og 3.

Vi fortsetter slik, induktivt, ved å se på hver av de $m$ koordinatene etter tur, og å plukke ut en konvergent delfølge fra del delfølgen som er valgt til nå. Til slutt har vi valgt ut en delfølge av en delfølge av en delfølge ($m$ ganger), som vi kan kalle

$$(x_{N(z)})_z$$

der $N(z) = n(j(k(\dots(z)\dots)))$ med $N(1) < N(2) < \dots$, slik at

$$x_{N(z),i} \to X_i \text{ når } z \to \infty$$

for hver $i=1, \dots, m$. La $X = (X_1, \dots, X_m)$. Da er

$$||x_{N(z)} - X|| \le |x_{N(z),1} - X_1| + \dots + |x_{N(z),m} - X_m|$$

$$\to 0 + \dots + 0 = 0 \text{ når } z \to \infty$$

så $x_{N(z)} \to X$ når $z \to \infty$. QED.