MAT1300 – Analyse I – 27. april 2009

11.4. Uniform konvergens

For funksjoner $E \to R$ har vi nå to viktige konvergensbegreper.

Definisjon 11.43 (Punktvis konvergens): La E være en ikketom mengde, og la $f \colon E \to R$ og $f_n \colon E \to R$ for n i N være funksjoner. Vi sier at $(f_n)_n$ **konvergerer punktvis** mot f når $n \to \infty$ dersom for hver $x \in E$ og hver $\epsilon>0$ finnes en $n_0(x, \epsilon)$ i N slik at for alle $n \ge n_0(x, \epsilon)$ er $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Vi skriver også ofte at $f_n(x) \to f(x)$ når $n \to \infty$, for alle x.

Dersom \$n_0(x, \epsilon)$ kan velges uniformt for alle x, dvs. uavhengig av x, får vi et strengere konvergensbegrep.

Definisjon 11.42 (Uniform konvergens): La E være en ikketom mengde, og la $f \colon E \to R$ og $f_n \colon E \to R$ for n i N være funksjoner. Vi sier at $(f_n)_n$ **konvergerer uniformt** mot f når $n \to \infty$ dersom for hver $\epsilon>0$ finnes en $n_0(\epsilon)$ i N slik at for alle $x \in E$ og $n \ge n_0(\epsilon)$ er $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Merk: Uniform konvergens er essensielt det samme som konvergens i sup-normen: $(f_n)_n$ konvergerer uniformt mot f hvis og bare hvis $||f_n-f||_\infty \to 0$ når $n \to \infty$. Vi sier "essensielt", fordi vi i definisjonen av uniform konvergens ikke antar at f og f_n er begrenset, bare differansen f_n-f, for tilstrekkelig store n.

Uniform konvergens impliserer punktvis konvergens, men ikke omvendt, som følgende eksempel illustrerer:

Eksempel 11.48 (Heksehatter): La $E = [0,2]$. For hver n i N definer $f_n \colon [0,2] \to R$ ved

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - |nx - 1| & \text{for } |nx-1| \le 1 \\ 0 & \text{for } |nx-1| \ge 1 . \end{cases}$$

La $f(x) = 0$ for alle x. Da er f og hver f_n en kontinuerlig funksjon. Videre vil $f_n(x) \to f(x) = 0$ når $n \to \infty$, for hver x, men f_n konvergerer ikke uniformt mot f. Med andre ord, $(f_n)_n$ konvergerer punktvis men ikke uniformt mot f.

Bevis: For hver $0 < x \le 2$ finnes en N slik at $2/N < x$, slik at $f_n(x) = 0$ for alle $n \ge N$. Altså vil $f_n(x) \to 0$ når $n \to \infty$. For $x=0$ er $f_n(0) = 0$ for alle n, så også her vil $f_n(x) \to 0$ når $n \to \infty$. Dette viser at $f_n \to f$ punktvis på $[0,2]$. For $x=1/n$ er $f_n(1/x) = 1$, så $||f_n||_\infty \ge |f_n(1/n)| = 1$. Altså kan ikke $f_n \to 0$ uniformt når $n \to \infty$.

Teorem 11.44: La (E, d) være et ikketomt metrisk rom, la $f_n \colon E \to R$ være kontinuerlig for hver n i N, og anta at $(f_n)_n$ konvergerer uniformt mot f når n \to \infty. Da er f \: E \to R kontinuerlig.

Bevis: Det finnes en N = n_0(1) slik at for alle x \in E, n \ge N er |f_n(x) - f(x)|<1. La g_n = f_n - f_N for alle n \ge N. Da er |g_n(x)| \le |f_n(x)-f(x)| - |f_N(x)-f(x)| < 1+1 = 2, for alle x \in E og n \ge N. Altså er (g_n)_n en følge av begrensede, kontinuerlige funksjoner på E. La g = f - f_N. Da konvergerer g_n punktvis mot g når n \to \infty, så g er begrenset. Videre er ||g-g_n||_\infty = \sup_{x\in E} |g(x)-g_n(x)| = \sup_{x\in E} |f(x)-f_n(x)|, som går mot 0 når n \to \infty. Altså konvergerer (g_n)_n mot g i (B(E), ||.||_\infty). Ved Teorem 11.38 er \C(E) lukket i B(E), så g \in \C(E). Altså er g kontinuerlig. QED.

Med andre ord, en uniform grense av kontinuerlige funksjoner er kontinuerlig. En punktvis grense av kontinuerlige funksjoner behøver ikke være kontinuerlig.

Eksempel 11.49: Definer f_n \: [0,1] \to R ved f_n(x) = x^n, og la f(x) = 0 for 0 \le x < 1, mens f(1) = 1. Da konvergerer f_n(x) \to f(x) punktvis, og hver f_n er kontinuerlig, men f er ikke kontinuerlig.

Teorem 11.45 (Generelt konvergensprinsipp for uniform konvergens): La (E, d) være et ikketomt metrisk rom, og la (f_n)_n være en følge av kontinuerlige funksjoner f_n \: E \to R. Da konvergerer (f_n)_n uniformt mot en kontinuerlig funksjon f \: E \to R hvis og bare hvis for enhver gitt \epsilon>0 finnes en n_0(\epsilon) i N slik at for alle x \in E, p, q \ge n_0(\epsilon) er |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon.

Beviset likner det for Teorem 11.44.

Teorem 11.51: La a<b i R og f_n \in C([a,b]) for n \in N. Hvis f_n \to f uniformt, så er f \in C([a,b]) og

\int_a^b f_n(x) dx \to \int_a^b f(x) dx

når n \to \infty.

Vi kan også skrive dette som

\int_a^b \lim_n f_n(x) dx = \lim_n \int_a^b f_n(x) dx

der vi altså antar at f_n \to f uniformt.

Bevis: Siden f er en uniform grense av kontinuerlige funksjoner er den selv kontinuerlig, og derfor Riemann-integrerbar. Da kan vi regne ut

|\int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx| = | \int_a^b f_n(x)-f(x) dx|

\le \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx

\le (b-a) \sup_{a\le x\le b} |f_n(x)-f(x)|

$$= (b-a) \|f_n-f\|_\infty$$

som går mot $(b-a).0 = 0$ når $n \to \infty$. QED.

Her er det viktig at konvergensen er uniform, og at $[a,b]$ er et endelig intervall. For kontinuerlige funksjoner på begrensede intervaller impliserer altså konvergens i $\|.\|_\infty$-normen (sup-normen) også konvergens i $\|.\|_1$-normen (L^1-normen).

Eksempel 11.52: (Høye heksehatter): La $f_n \colon [0,2] \to R$ være gitt ved

$$f_n(x) = \begin{cases} n(1 - |nx - 1|) & \text{for } |nx-1| \le 1 \\ 0 & \text{for } |nx-1| \ge 1 . \end{cases}$$

La $f(x) = 0$ for alle x. Da er f og hver f_n kontinuerlig, og $f_n \to f$ punktvis på $[0,2]$ (men ikke uniformt). Videre er

$$\int_0^2 f_n(x)\, dx = 2n/2n = 1$$

for alle n, så følgen av integraler konvergerer ikke mot $\int_0^2 f(x)\, dx = 0$.

Eksempel 11.53: (Brede heksehatter): La $f_n \colon R \to R$ være gitt ved

$$f_n(x) = \begin{cases} (n-|x|)/n^2 & \text{for } |x| \le n \\ 0 & \text{for } |x| \ge n. \end{cases}$$

La $f(x) = 0$ for alle x. Da er f og hver f_n kontinuerlig, og $f_n \to f$ uniformt på R, siden $|f_n(x)| \le 1/n$ for alle x. Videre er

$$\int_{-\infty}^\infty f_n(x)\, dx = 2n/2n = 1$$

for alle n, så følgen av integraler konvergerer ikke mot $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = 0$.

Dette kan også formuleres som et resultat om derivasjon av grenser.

Teorem 11.57: La $a<b$ i R, og anta for hver n i N at $f_n \colon [a,b] \to R$ er kontinuerlig deriverbar (også i endepunktene). Anta at $f_n(x) \to f(x)$ punktvis på $[a,b]$, og at f'_n konvergerer uniformt mot en grense F på $[a,b]$. Da er f deriverbar, med $f' = F$.

Vi kan også skrive dette som

$$\frac{d}{dx} \left(\lim_n f_n(x) \right) = \lim_n \frac{d}{dx} f_n(x)$$

der vi altså antar at $f'_n \to f'$ uniformt.

Bevis: Siden hver f'_n er kontinuerlig, og $f'_n \to F$ uniformt, er F kontinuerlig. Ved

Teorem 11.51 vil

$$\int_c^t f'_n(x)\, dx \to \int_c^t F(x)\, dx$$

når $n \to \infty$, for alle c, t in $[a,b]$. Ved kalkulusens fundamentalteorem er venstresiden $f_n(t) - f_n(c)$, som går mot $f(t) - f(c)$ når $n \to \infty$. Altså er

$$f(t) - f(c) = \int_c^t F(x)\, dx$$

for alle $c, t \in [a,b]$. Siden F er kontinuerlig gir fundamentalteoremet igjen at f er deriverbar, med

$$f'(t) - 0 = F(t)$$

for alle t. QED.

En følge $(f_n(x))_n$ av funksjoner kan skrives som delsummene i en rekke $\sum_{j=1}^\infty g_j(x)$ av funksjoner, der $g_1(x) = f_1(x)$ og $g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ for $n \ge 2$. Da er

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^n g_j(x)$$

for alle n og x. Vi kan da omskrive Teorem 11.51 og Teorem 11.57 som følger:

Teorem 11.60 (Leddvis integrasjon): For hver $j \in N$, la $g_j \: [a,b] \to R$ være kontinuerlig. Hvis rekken $\sum_{j=1}^\infty g_j$ konvergerer uniformt, så er

$$\int_a^b \sum_{j=1}^\infty g_j(x)\, dx = \sum_{j=1}^\infty \int_a^b g_j(x)\, dx.$$

Teorem 11.61: (Leddvis derivasjon): For hver $j \in N$, la $g_j \: [a,b] \to R$ være kontinuerlig deriverbar. Hvis rekken $\sum_{j=1}^\infty g_j(x)$ konvergerer for hver x, og rekken $\sum_{j=1}^\infty g'_j$ konvergerer uniformt, så er $\sum_{j=1}^\infty g_j$ deriverbar og

$${d \over dx} \sum_{j=1}^\infty g_j(x) = \sum_{j=1}^\infty {d \over dx} g_j(x).$$