MAT1300
OBLIGATORISK OPPGAVESETT I
INNLEVERINGSFRIST 13. MARS 2009

John Rognes

De 15 delene I(a-f), II(a-e) og III(a-d) i dette oppgavesettet har likt vekt. For å bestå oppgaven må minst 40% av svarene være riktige. I hvert tilfelle kan du bygge på svarene i de foregående spørsmålene, selv om du ikke har besvart dem. Oppgave I(d) og III(b) er kanskje litt vanskeligere enn de andre spørsmålene.

De fleste spørsmålene ber om et bevis for at en gitt påstand er riktig. Vekten ligger på å gi klare og gyldige argumenter for disse påstandene. Det gis ikke poeng bare for å gjenta den gitte hypotesen og så å si at konklusjonen gjelder, uten å antyde et bevis. I oppgavene III(c-d) kan du gi referanser til læreboken, hvis det passer.

Studentene kan arbeide sammen om å løse disse oppgavene, men din skriftlige besvarelse må gjenspeile din egen forståelse. Dersom det er uklart om du forstår svarene du leverer inn, så kan du bli bedt om å gi en muntlig presentasjon av arbeidet.

Oppgave I

Det er velkjent at $x + y = y + x$ og $xy = yx$. I denne oppgaven undersøker vi når det er tilfellet at $x^y = y^x$. Dette skjer når $x = y$, men også, for eksempel, når $x = 2$ og $y = 4$.

La $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ være funksjonen

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}\,,$$

der ln står for den naturlige logaritmen med grunntall e.

(a) For positive reelle tall x og y, vis at

(1) $x^y < y^x$ hvis og bare hvis $f(x) < f(y)$,
(2) $x^y = y^x$ hvis og bare hvis $f(x) = f(y)$, og
(3) $x^y > y^x$ hvis og bare hvis $f(x) > f(y)$.

[Hint: Bruk at $\ln(x^y) = y \ln(x)$, og at ln er en strengt voksende funksjon.]

(b) Beregn $f'(x)$, vis at $f'(x) > 0$ for $x \in (0, e)$, $f'(e) = 0$, og $f'(x) < 0$ for $x \in (e, \infty)$. Formuler middelverdisetningen (= the mean value theorem). Forklar presist hvordan du utleder at f er strengt voksende på delmengden $(0, e] \subset (0, \infty)$, og strengt avtagende på delmengden $[e, \infty) \subset (0, \infty)$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(c) Vi vet at $e < \pi < \sqrt{10}$. Avgjør hvilket av tallene $\pi^{\sqrt{10}}$ og $(\sqrt{10})^{\pi}$ som er størst, uten faktisk å beregne tallene.

(d) Beregn $f(e)$ og $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Formuler skjæringssetningen (= the intermediate value theorem). Forklar presist hvordan du utleder at f avbilder (e,∞) på $(0,1/e)$, slik at $f((e,\infty)) = (0,1/e)$.

(e) Beregn $f(1)$, og vis at for $x \in (0,1]$ har likningen $x^y = y^x$ (i den ukjente $y \in (0,\infty)$) bare den ene løsningen $y = x$. Vis også at når $x = e$, så har likningen bare den ene løsningen $y = e$.

(f) Vis at for $x \in (1,e)$ har likningen $x^y = y^x$ (i den ukjente $y \in (0,\infty)$) nøyaktig to løsninger: en der $y = x$ og en annen med $y \in (e,\infty)$.

Kommentar. Dette viser at det finnes en veldefinert funksjon $g\colon (1,e) \to \mathbb{R}$ som tar hver $x \in (1,e)$ til den entydige $y = g(x)$ i (e,∞) med $x^y = y^x$. Ved symmetri kan denne funksjonen utvides til en funksjon $g\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$, slik at for hver $x \in (1,\infty)$ har vi $x^y = y^x$ når $y = g(x)$, og $y \neq x$ unntatt for $x = e$. Du blir ikke bedt om å bevise påstandene i denne kommentaren.

Oppgave II

I denne oppgaven ser vi på en metode for å beregne kvadratrøtter. For enkelhets skyld spesialiserer vi til tilfellet der vi beregner $\sqrt{10}$.

Definer en følge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ av positive reelle tall ved å sette $x_1 = 3$ og la

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{10}{x_n}\big)$$

for alle naturlige tall n.

(a) Uttrykk x_2 og x_3 som rasjonale tall (heltallsbrøker), og beregn deretter deres desimalutviklinger med seks siffer etter komma.

(b) La $y_n = x_n - \sqrt{10}$, slik at $x_n = \sqrt{10} + y_n$ for alle $n \geq 1$. Vis at

$$x_{n+1} = \sqrt{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_n^2}{\sqrt{10} + y_n}\,,$$

slik at

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_n^2}{\sqrt{10} + y_n}$$

for alle $n \geq 1$. [Hint: Du kan bruke at $10 - y_n^2 = (\sqrt{10} + y_n)(\sqrt{10} - y_n)$.] Forklar hvorfor det følger at $y_n \geq 0$ for all $n \geq 2$, slik at $x_n \geq \sqrt{10}$ for alle $n \geq 2$.

(c) Vis at $10/x_n \leq x_n$ for alle $n \geq 2$, og utled at $(x_n)_n$ er en avtagende følge for $n \geq 2$. Formuler analysens fundamentalaksiom (= the fundamental axiom of analysis). Forklar presist hvorfor $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ er en konvergent følge.

(d) La $r = \lim_{n\to\infty} x_n$ være grensen til denne følgen. Forklar hvorfor

$$r = \frac{1}{2}(r + \frac{10}{r})\,,$$

og utled at $r = \sqrt{10}$. Du kan bruke at $h(x) = \frac{1}{2}(x + (10/x))$ gir en kontinuerlig funksjon $h\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, men du må da forklare hvordan dette blir brukt.

(e) For en gitt n, anta at $0 \leq y_n < 10^{-d}$ for et naturlig tall d, slik at x_n tilnærmer $\sqrt{10}$ til d siffer etter komma. Vis at $0 \leq y_{n+1} < 10^{-2d}$, slik at x_{n+1} tilnærmer $\sqrt{10}$ til $2d$ siffer etter komma.

Kommentar. Dette viser at nøyaktigheten av estimatet $x_n \approx \sqrt{10}$ fordobles etter hver iterasjon, når den måles ved antallet riktige siffer etter komma. Etter ti iterasjoner er antallet riktige siffer etter komma multiplisert med mer enn tusen. Du blir ikke bedt om å bevise påstandene i denne kommentaren.

Oppgave III

La $(\mathbf{z}_k)_{k=1}^{\infty}$ være en følge i $\mathbb{R}^m$, som konvergerer mot en grense $\mathbf{z}$ når $k \to \infty$, og la

$$E = \{\mathbf{z}_k \mid k \geq 1\} \cup \{\mathbf{z}\}$$

være en delmengde av $\mathbb{R}^m$.

(a) Vis at E er en begrenset delmengde av $\mathbb{R}^m$. [Hint: Se beviset av Teorem 4.68.]

(b) Vis at E er en lukket delmengde av $\mathbb{R}^m$. [Hint: Se først på følger $(\mathbf{x}_n)_n$ i E som antar samme verdi $\mathbf{y} \in E$ uendelig mange ganger. Se så på andre følger.]

(c) La $\mathbf{f}\colon E \to \mathbb{R}^p$ være en kontinuerlig funksjon. Er det sant at $\mathbf{f}(E)$ er lukket og begrenset i $\mathbb{R}^p$? Hvis svaret er ja, gi et bevis eller en passende referanse. Hvis svaret er nei, gi et moteksempel.

(d) La $\mathbf{f}\colon E \to \mathbb{R}^p$ være en kontinuerlig funksjon. Er det sant at $\mathbf{f}$ er en uniformt kontinuerlig funksjon? Hvis svaret er ja, gi et bevis eller en passende referanse. Hvis svaret er nei, gi et moteksempel.