MAT1300
OBLIGATORISK OPPGAVESETT II
INNLEVERINGSFRIST 24. APRIL 2009

John Rognes

De 8 delene I(a-e) og II(a-c) i dette oppgavesettet har lik vekt. For å bestå oppgaven må minst 40% av svarene være riktige. I hvert tilfelle kan du bygge på opplysningene i de foregående spørsmålene, selv om du ikke har besvart dem.

De fleste spørsmålene ber om et bevis for at en gitt påstand er riktig. Vekten ligger på å gi klare og gyldige argumenter for disse påstandene. Det gis ikke poeng bare for å gjenta den gitte hypotesen og så å si at konklusjonen gjelder, uten å antyde et bevis. Gi referanser til hovedresultatene i læreboken som du bruker.

Studentene kan arbeide sammen om å løse disse oppgavene, men din skriftlige besvarelse må gjenspeile din egen forståelse. Dersom det er uklart om du forstår svarene du leverer inn, så kan du bli bedt om å gi en muntlig presentasjon av arbeidet.

Oppgave I

La $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ være origo i $\mathbb{R}^m$, og la $E = \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$. Definer en funksjon $\mathbf{f}\colon E \to \mathbb{R}^m$ ved

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$$

der $\|\mathbf{x}\|$ er den Euklidiske normen til $\mathbf{x}$.

[Kommentar: Geometrisk sett er $\mathbf{f}$ en inversjon av E om enhetssfæren i $\mathbb{R}^m$. Vektorene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ligger på samme stråle gjennom origo, men $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = 1/\|\mathbf{x}\|$.]

(a) Vis at den deriverte til $\mathbf{f}$ i $\mathbf{x} \in E$ er lineæravbildningen $D\mathbf{f}(\mathbf{x})\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ gitt ved

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}\Big(\mathbf{h} - 2\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{h}}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x}\Big)$$

for alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$, der $\mathbf{x}\cdot\mathbf{h}$ er det vanlige skalarproduktet av $\mathbf{x}$ og $\mathbf{h}$.

[Hint: Se Exercise 6.26.]

(b) Regn ut det (i,j)-te elementet $\mathbf{f}_{i,j}(\mathbf{x})$ i Jacobmatrisen til $\mathbf{f}$ i $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, for alle $1 \le i, j \le m$.

[Merk: Svaret ditt kan se forskjellig ut for $i = j$ og for $i \ne j$.]

(c) For en fast $\mathbf{x} \in E$, la $\alpha = D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ og betrakt to vektorer $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$. Vis at

$$\alpha(\mathbf{h})\cdot\alpha(\mathbf{k}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^4}\mathbf{h}\cdot\mathbf{k}\,.$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

[Kommentar: Dette viser at vinkelen mellom $\alpha(\mathbf{h})$ og $\alpha(\mathbf{k})$ er lik vinkelen mellom $\mathbf{h}$ and $\mathbf{k}$, slik at $\alpha = D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ er en vinkelbevarende lineæravbildning. Vi sier at inversjonen $\mathbf{f}$ er en konform avbildning.]

(d) Beregn operatornormen $\|D\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$ som en funksjon av $\mathbf{x} \in E$.

(e) La $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ være vektorer (ikke null) i $\mathbb{R}^m$, la $R > 0$ være et positivt reelt tall, og anta at $\|\mathbf{x}\| \geq R$ for alle punkter $\mathbf{x}$ på linjestykket som forbinder $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. Vis at

$$\left\| \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} - \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2} \right\| \leq \frac{1}{R^2} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| .$$

Oppgave II

La $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ være definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{for } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

(a) Forklar hvorfor denne funksjonen er begrenset, men ikke kontinuerlig.

(b) Vis at f er Riemann-integrerbar.
[Hint: Bruk Lemma 8.13(i), og Theorem 8.32 for restriksjonen av f til $[c,1]$, for passende $0 < c < 1$.]

(c) Er det sant at enhver begrenset funksjon $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ som er kontinuerlig på $(a,b]$ er Riemann-integrerbar? Gi en kort begrunnelse for svaret ditt.