ABC-formodningen

Mats Myhr Hansen

05/15/13

Veileder John Rognes

Contents

1 ABC-formodningen

1.1 Innledning

ABC-formodnigen ble først formulert av Joseph Oesterlé og David Masser i 1985 og har i løpet av de siste 20 årene vært et av de mest omtalte temaene blant matematikere. Amerikaneren Dorian Goldfeld sa i 1996 at ABC-formodningen var *det viktigste uløste problemet innen diofantisk analyse.*

Før jeg går i gang med å forklare formodningen la oss først definere $rad(n)$ som radikalet til et tall n. Det vil si produktet av alle primtall som deler n. Formuleringen av ABC-formodningen lyder da som følge: For enhver $\epsilon > 0$, finnes det bare et endelig antall relativt primiske positive tripler $a+b=c$ slik at $c > rad(abc)^{1+\epsilon}$. Dette er den vanlige formuleringen og kalles noen ganger for den sterke ABC-formodningen. Det finnes også en annen formulering som kalles den eksplisitte ABC-formodningen som ble presentert i 2004 av den engelske matematikkeren Alan Baker. Den er slik: La (a, b, c) være en abc-trippel. Da er $c \leq \frac{6}{5}R\frac{(logR)^{\omega}}{\omega!}$. Hvor her $R = rad(abc)$ og $\omega = \omega(abc)$ er antalle distinkte primfaktorer til abc.

La oss så gå igang med å se på et eksempel. La $a = 1$, $b = 2$ og $c = 3$. Da er $rad(abc) = 6 > c = 3$. Og det er dette man som oftest vil oppleve. Lar vi imidertid $a = 1$, $b = 8$ og $c = 9$ får vi $rad(abc) = 6 < 9$. Det er disse eksemplene man studerer når man jobber med ABC-formodningen. En abc-trippel hvor dette er oppfylt kaller jeg et treff.

1.2 Uendelig mange ABC-løsninger

Selve ABC-formodningen sier at det bare finnes et endelig antall ABC-løsninger så fort du opphøyer radikalen i et tall større enn en, men det viser seg at det finnes et uendelig anntall abc-tripler hvor $c > rad(abc)$. **Proposisjon 1** *Det finnes uendelig mange abc-treff.* *Bevis:* La oss ta $a = 1$, $b = 3^{2^k} - 1$ og $c = 3^{2^k}$. Her kan b faktoriseres ganske fint. $3^{2^k} - 1 = (3^{2^{k-1}} - 1)(3^{2^{k-1}} + 1)$. Kan igjen fortsette faktoriseringen $3^{2^k} - 1 = (3^{2^{k-1}} + 1)(3^{2^{k-2}} + 1)(3^{2^{k-2}} - 1)$. Dette kan vi gjøre helt til vi står igjen med $3^{2^k} - 1 = (3^{2^{k-1}} + 1)(3^{2^{k-2}} + 1)....(3^{2^{k-(k-1)}} + 1)(3 + 1)(3 - 1)$. Her har vi da k antall ledd som er delelige på 2, og ett ledd som er delelig på 4. Dette forsikrer oss om at 2^{k+2} deler $3^{2^k} - 1$. Hvis vi nå ser på $rad((3^{2^k} - 1) \cdot 3^{2^k})$ vet vi at vi i allefall kan ta bort en faktor av 2^{k+1} og at 3^{2^k}bidrar med kun en faktor 3. Derfor har vi $rad((3^{2^k} - 1) \cdot 3^{2^k}) \leq \frac{3^{2^k}-1}{2^{k+1}} \cdot 3 < 3^{2^k}$som gir oss at dette er et abc-treff.

1.3 Kvalitet

Når man leter etter abc-tripler, leter man ofte etter de med det man kaller høyest kvalitet. Kvaliteten til en trippel er definert som $\frac{log(c)}{log(rad(abc))}$. Den ABC-løsningen med høyest kvalitet som man så langt har funnet ble funnet av Eric Reyssat i 1987. Her er $a = 2$, $b = 3^{10} \cdot 109$ og $c = 23^5$. Dette gir oss en kvalitet på $1,6299$. Shanta Laishram og Tarlok Shorey viste at hvis Bakers eksplisitte formodning gjelder, da vil alltid $c < rad(abc)^{7/4}$ holde. Altså kan ikke kvaliteten til en trippel overstige $1,75$.

1.4 Implikasjoner

En av grunnene til at ABC-formodningen er så viktig for matematikkere er nettopp det at den har så mange implikasjoner. La oss først se på Fermats siste teorem. Teoremet sier at ligningen $x^n + y^n = z^n$ ikke har heltallsløsninger for $n \geq 3$. Tar vi utgangspunkt i $x^n + y^n = z^n$ med $gcd(x, y, z) = 1$ og $x > y$ får vi en ABC-trippel (x^n, y^n, z^n) med $rad(x^n y^n z^n) \leq xyz < z^3$. Fra den eksplisitte formodningen har vi $c < rad(abc)^{7/4}$. Dette gir oss $z^n < z^6$, som igjen sier $n \leq 5$. Altså finnes det ingen løsninger av $x^n + y^n = z^n$ for n større enn 5. At det ikke finnes løsninger for $n = 3, 4, 5$ har man visst i flere hundre år. Andre implikasjoner vil for eksempel være Catalans formodning. Catalans formodning sier at det eneste tilfelle hvor differansen mellom to perfekte potenser er 1 er $3^2 - 2^3 = 1$. Dette ble bevist i 2002 av Preda Mihăilescu og kalles derfor ofte Mihăilescus teorem. ABC-formodningen impliserer riktignok ikke at det bare finnes et slikt eksempel, men det impliserer at det kun finnes et endelig antall eksempler. Anta at $A^p + 1 = B^q$, hvor her $p, q > 1$. Vi vet at det eneste tilfelle hvor to andrepotenser har differanse 1 er $1^2 - 0^2 = 1$, så både p og q kan ikke begge være 2. Da kan vi sette $a = 1$, $b = A^p$ og $c = B^q$. Siden da enten b eller c inneholder en tredjepotens har vi enten $rad(abc) \leq b^{1/2} \cdot c^{1/3} \leq c^{5/6}$ eller $rad(abc) \leq b^{1/3} \cdot c^{1/2} \leq c^{5/6}$. Det betyr at vi har en trippel med $q \geq \frac{6}{5}$ og ABC-formodningen sier at det bare finnes et endelig antall slike.

2 Pells ligning

$x^2 - ky^2 = \pm 1$ hvor k er et ikke kvadratisk heltall kalles ofte Pells ligning, og har fått navnet sitt etter den engelske matematikkeren John Pell. Jeg har valgt å studere løsninger for Pells ligning med $k = 2$ og $k = 3$ for å lete etter *abc*-tripler. Løsninger av Pells ligning vil alltid gi opphav til en trippel $a + b = c$, med a, b, og c relativt primiske. Det kan derfor være et fint sted å begynne letingen etter gode treff. Løsningspar (x, y) for Pells ligning oppfører seg pent og er relativt enkle å finne. Alle løsningspar (x, y) vil tilsvare koeffisienter for $(a + b\sqrt{k})^n$ hvor a og b gir det jeg kaller den primitive løsningen. Hvis vi ser på $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ vil $a = 1$, $b = 1$ gi den primitive løsningen. Altså vil alle løsningspar (x, y) være koeffisientene for $(1 + \sqrt{2})^n$. For eksempel er $(1 + \sqrt{2})^3 = 7 + 5\sqrt{2}$, som betyr at den tredje løsningen for Pells ligning med $k = 2$ vil være $x = 7$ og $y = 5$. For $k = 3$ vil $2 + \sqrt{3}$ være den primitive løsningen, og her vil den tredje løsningen være $x = 26$ og $y = 15$ da $(2 + \sqrt{3})^3 = 26 + 15\sqrt{3}$. Legger forresten merke til at $x^2 - 3y^2 = -1$ aldri har noen løsning da $-1 = 2$ mod 3 og $x^2 \neq 2$ mod

3. Her kommer en listen over de 20 første løsningene av Pells ligning med $k = 2$.

2.1 Løsninger av Pells ligning for $k = 2$

1. $x = 1$, $y = 1 \implies a = 1$, $b = 1$, $c = 2$ Ikke treff med kvalitet $q = 1$
2. $x = 3$, $y = 2 \implies a = 1$, $b = 8$, $c = 9$ Treff med kvalitet $q = 1.226$
3. $x = 7$, $y = 5 \implies a = 1$, $b = 49$, $c = 50$ Ikke treff med kvalitet $q = 0.920$
4. $x = 17$, $y = 12 \implies a = 1$, $b = 288$, $c = 289$ Treff med kvalitet $q = 1.225$
5. $x = 41$, $y = 29 \implies a = 1$, $b = 1681$, $c = 1682$ Ikke treff med kvalitet $q = 0.955$
6. $x = 99$, $y = 70 \implies a = 1$, $b = 9800$, $c = 9801$ Treff med kvalitet $q = 1.187$
7. $x = 239$, $y = 169 \implies a = 1$, $b = 57121$, $c = 57122$ Treff med kvalitet $q = 1.254$
8. $x = 577$, $y = 408 \implies a = 1$, $b = 332928$, $c = 332929$ Treff med kvalitet $q = 1.158$
9. $x = 1393$, $y = 985 \implies a = 1$, $b = 1940449$, $c = 1940450$ Ikke treff med kvalitet $q = 0.976$
10. $x = 3363$, $y = 2378 \implies a = 1$, $b = 11309768$, $c = 11309769$ Treff med kvalitet $q = 1.022$
11. $x = 8119$, $y = 5741 \implies a = 1$, $b = 65918161$, $c = 65918162$ Ikke treff med kvalitet $q = 0.981$
12. $x = 19601$, $y = 13860 \implies a = 1$, $b = 384199200$, $c = 384199201$ Treff med kvalitet $q = 1.121$
13. $x = 47321$, $y = 33461 \implies a = 1$, $b = 2239277041$, $c = 2239277042$ Ikke treff med kvalitet $q = 0.984$
14. $x = 114243$, $y = 80782 \implies a = 1$, $b = 13051463048$, $c = 13051463049$ Treff med kvalitet $q = 1.066$

15. $x = 275807$, $y = 195025 \implies a = 1$, $b = 76069501249$, $c = 76069501250$ Treff med kvalitet $q = 1.231$

16. $x = 665857$, $y = 470832 \implies a = 1$, $b = 443365544448$, $c = 443365544449$ Treff med kvalitet $q = 1.099$

17. $x = 1607521$, $y = 1136689 \implies a = 1$, $b = 2584123765441$, $c = 2584123765442$ Ikke treff med kvalitet $q = 0.988$

18. $x = 3880899$, $y = 2744210 \implies a = 1$, $b = 15061377048200$, $c = 15061377048201$ Treff med kvalitet $q = 1.092$

19. $x = 9369319$, $y = 6625109 \implies a = 1$, $b = 43892069261880$, $c = 43892069261881$ Ikke treff med kvalitet $q = 0.968$

20. $x = 22619537$, $y = 15994428 \implies a = 1$, $b = 511643454094368$, $c = 511643454094369$ Treff med kvalitet $q = 1.032$

Ser man over disse tallene ser man fort at alle partalls n gir treff, samtidig som y alltid er partall her. Er det en sammenheng? **Sats 3** *Hvis y_n er partall vil kvaliteten til abc-trippelen* $(1, 2y_n^2, x_n^2)$ *alltid være* > 1. *Bevis:* Vet at $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = (x_n + y_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = (x_n + 2y_n) + (x_n + y_n)\sqrt{2}$. Når vi legger til betingelsene $x_1 = 1$ og $y_1 = 1$ ser vi at x_n alltid er odde, mens y_n bytter på å være odde og lik, og er lik hvis og bare hvis n er et partall. Ser vi da på $rad(2y_nx_n)$ vet vi at vi kan forkorte bort en faktor 2. Da står vi med $rad(2y_nx_n) \leq \frac{2y_nx_n}{2} = y_nx_n$. Ser lett fra ligningene for x_{n+1} og y_{n+1} at når $x_1 = y_1 = 1$ vil alltid $x_n > y_n$ for $n > 1$. Har da $rad(2y_nx_n) \leq y_nx_n < x_n^2$ og dermed et abc-treff.

2.2 Løsninger av Pells ligning for $k = 3$

1. $x = 2$, $y = 1 \implies a = 1$, $b = 3$, $c = 4$ Ikke treff med kvalitet $q = 0.774$

2. $x = 7$, $y = 4 \implies a = 1$, $b = 48$, $c = 49$ Treff med kvalitet $q = 1.041$

3. $x = 26$, $y = 15 \implies a = 1$, $b = 675$, $c = 676$ Treff med kvalitet $q = 1.092$

4. $x = 97$, $y = 56 \implies a = 1$, $b = 9408$, $c = 9409$ Treff med kvalitet $q = 1.101$

5. $x = 362$, $y = 209 \implies a = 1$, $b = 131043$, $c = 131044$ Ikke treff med kvalitet $q = 0.955$

6. $x = 1351$, $y = 780 \implies a = 1$, $b = 1825200$, $c = 1825201$ Treff med kvalitet $q = 1.094$

7. $x = 5042$, $y = 2911 \implies a = 1$, $b = 25421763$, $c = 25421764$ Ikke treff med kvalitet $q = 0.969$

8. $x = 18817$, $y = 10864 \implies a = 1$, $b = 354079488$, $c = 354079489$ Treff med kvalitet $q = 1.084$

9. $x = 70226$, $y = 40545 \implies a = 1$, $b = 4931691075$, $c = 4931691076$ Treff med kvalitet $q = 1.080$

10. $x = 262087$, $y = 151316 \implies a = 1$, $b = 68689595568$, $c = 68689595569$ Treff med kvalitet $q = 1.006$

11. $x = 978122$, $y = 564719 \implies a = 1$, $b = 956722646883$, $c = 956722646884$ Ikke treff med kvalitet $q = 0.980$

12. $x = 3650401$, $y = 2107560 \implies a = 1$, $b = 13325427460800$, $c = 13325427460801$ Treff med kvalitet $q = 1.068$

13. $x = 13623482$, $y = 7865521 \implies a = 1$, $b = 185599261804323$, $c = 185599261804324$ Ikke treff med kvalitet $q = 0.984$

14. $x = 50843527$, $y = 29354524 \implies a = 1$, $b = 2585064237799728$, $c = 2585064237799729$ Treff med kvalitet $q = 1.063$

15. $x = 189750626$, $y = 109552575 \implies a = 1$, $b = 36005300067391875$, $c = 36005300067391876$ Treff med kvalitet $q = 1.060$

Etter å ha sett kjapt over resultatene ser man at alle partalls n her også gir opphav til et treff. Alle partalls n gir oddetalls x, og siden ingen av x-ene våre inneholder en faktor 3 (alle x-er relativt primiske med $3y$) er x=1 mod i dette tilfelle . Om vi ser på tilfelle hvor $x = 2$ mod 3 kan vi få både treff og ikke treff. Det ser her ut som om hver gang $y = 0$ mod 3, får vi et treff, mens $y = 1$ eller $y = 2$ mod 3 ikke gir treff. Hver gang $x = 2$ mod 3 veksler y mellom $0, 1$ og 2 mod 3. Det betyr at for hver tredje gang $x = 2$ mod 3, så er $y = 0$ mod 3. Slik det da ser ut, kan vi forvente at $(2 + \sqrt{3})^n$ vil gi oss et treff 2 av 3 ganger.

Sats 3 *Hvis x_n er odde, vil kvaliteten til abc-trippelen $(1, 3y_n^2, x_n^2)$ være > 1.* *Bevis:* La $x_n$og $y_n$være de n-te koeffisientene for $(2 + \sqrt{3})^n$ slik at $x_n + y_n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n$. Da vil $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{3} = (x_n + y_n\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = (2x_n + 3y_n) + (x_n + 2y_n)\sqrt{3}$. Så vi har formelene $x_{n+1} = 2x_n + 3y_n$ og

$y_{n+1} = x_n + 2y_n$. Her ser vi at hvis x_{n+1} skal være delelig på 2 så må y_n være delelig på 2. Samtidig hvis y_{n+1} skal være delelig på 2, må $x_n$være delelig med 2. Da $x_1 = 2$ og $y_1 = 1$ vil x-leddene og y-leddene veksle mellom og være delelig på 2. Vi ser derfor på x_n-ene der n er et oddetall, her vet vi at y_n er delelig på 2. abc-trippelen $1+3y_n^2 = x_n^2$ vil da ha kvalitet $q = \frac{log(x_n^2)}{rad(3y_nx_n)}$. Dette utrykket er større enn 1 hvis $x_n^2 > rad(3y_nx_n)$. Da x_n er odde, vet vi at y_n er et partall. Dette gir oss at $rad(3y_nx_n) \leq \frac{3y_nx_n}{2}$. Og $x_n^2 > \frac{3y_nx_n}{2} \implies x_n > \frac{3}{2}y_n$. Altså vil odde x_n alltid gi oss $q > 1$ hvis $x_n > \frac{3}{2}y_n$. Vet også at $x_{n+1} > y_{n+1} \implies 2x_n + 3y_n > \frac{3}{2}(x_n + 2y_n) \implies x_n > 0$. Da $x_1 = 2 > 0$. Vet vi at alle $x_n$vil være minst halvannen gang større enn y_n og vi har derfor $q > 1$ og et abc-treff.

Sats 4 *Hvis y_n er delelig med 3, vil kvaliteten til abc-trippelen $(1, 3y_n^2, x_n^2)$ være ≥ 1. Bevis:* $rad(x_n3y_n) \leq \frac{x_n3y_n}{3} = x_ny_n < x_n^2$. Da $x_n^2 > rad(x_n3y_n)$ vil $q = \frac{log(x_n^2)}{log(rad(x_n3y_n))} > 1$ og vi har et abc-treff.

3 Bevis for ABC-formodningen?

I august 2012 publiserte japaneren Shinichi Mochizuki på sine hjemmesider det han selv hevder er et bevis på ABC-formodningen. Gjennom fire papirer på tilsammen over 500 sider har Mochizuki konstruert det som uten tvil er det mest avanserte beviset matematikkverden noen sinne har sett. Hadde det ikke vært for at Mochizuki er en høyt respektert matematikker med flere gode resultater å vise til, ville nok ikke dette beviset fått like mye oppmerksomhet som det har fått. I beviset sitt har Mochizkui introdusert en ny gren av matematikken han kaller inter-universell Teichmüller-teori. Svært få matematikkere har i det hele tatt noen form for kjennskap til denne teorien, og det vil ta en god stund før det vil være et tilstrekkelig antall folk som forstår nok av tema til å kunne bekrefte beviset. Disse papirene inneholder også det som vil være bevis av både Szpiros formodning og Vojtas formodning. To måneder etter publikasjonen oppdaget Vesselin Dimitrov og Akshay Venkatesh en feil i et av papirene. Mochizuki anerkjente senere feilen på sin hjemmeside, men forsikret om at feilen ikke var betydelig og at han skulle legge ut en korrigert versjon. Anno mai 2013 har man fortsatt ikke klart å bekrefte eller avkrefte Mochizukis bevis, og det forventes at det vil gå flere år før matematikkerene vil ta en samlet beslutning om man skal beholde eller forkaste beviset.

References

[1] http://www.win.tue.nl/~bdeweger/getaltheorie.html

[2] http://abcathome.com/consequences.php

[3] www.math.unicaen.fr/~nitaj/abc.html

[4] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pell.html

[5] http://www.maa.org/mathland/mathtrek_12_8.html

[6] Waldschmidt, Michel (2013)."On the abc Conjecture and some of its consequences" `http://www.math.jussieu.fr/~miw/articles/pdf/abcLahore2013VI.pdf`

[7] Numberphile. (2012, 12 oktober). abc Conjecture - Numberphile [Videofil]. Hentet fra http://www.youtube.com/watch?v=RkBl7WKzzRw

[8] http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/top-english.html