Matematisk institutt

Å realisere avbildninger som determinanter av buntautomorfier

Hans Jørgen Riddervold

Hovedoppgave i matematikk

Våren 2002

Forord

Historien bak denne oppgaven går et par år tilbake, og har sitt utspring i Erik Løw og Nils Øvrelids arbeider i kompleks analyse. De rådførte seg nemlig med min veileder som etter hvert så en mulig hovedoppgave i problemet.

Oppgaven starter med et innledende kapittel om gruppevirkninger, vektorbunter og obstruksjonsteori. Dette er først og fremst tatt med for å innføre litt notasjon, og gir ikke noen fullstendig oversikt. Beviser er så å si utelatt, og ganske snart kommer neste kapittel der begrepet "vektorbuntautomorfi" studeres nærmere før selve problemstillingen forklares.

Problemet formulert i kapittel 2 kan forenkles, og jeg syntes det var naturlig å ta med noen eksempler før problemet angripes og analyseres nærmere i kapitlene 5 og 6. Mot slutten av oppgaven vil jeg anvende obstruksjonsteori, og nevne et par eksempler som motiveres derfra.

Noe som overrasket meg under skriveprosessen, var å se hvor mye stoff som ble utelatt. Av både alternative (noen ganger villedende) tilnærminger og eksempler. Men like overrasket ble jeg over å se hvor mye jeg likevel hadde å skrive. Det har vært uvant og vanskelig å skrive ned matematikk på denne måten, men likevel underholdende og morsomt.

Så kommer takketale for professor John Rognes! Han har gitt meg tålmodig og entusiastisk veiledning, og i det hele tatt utvist stor interesse for hovedoppgaven. Jeg vil samtidig benytte anledningen til å sende en hilsen til mine medstudenter.

Hans Jørgen Riddervold

Innhold

Kapittel 1

Notasjon og bakgrunnsstoff

Dette kapitlet presenterer endel notasjon og litt bakgrunnstoff for oppgaven, men er ikke noe forsøk på en fullstendig behandling av stoffet.

I hele oppgaven skal ***avbildning*** bety en kontinuerlig funksjon.

Den generelle lineære gruppen over de komplekse tallene $\mathbb{C}$ forkortes til $GL_m(\mathbb{C})$, og tilsvarende vil $U(m)$ og $SU(m)$ være henholdsvis den unitære og den spesielle unitære gruppen.

Både det lukkede enhetsintervallet $[0,1]$ og identitetsmatrisen angis med I, men dette vil ikke skape uklarheter.

1.1 Gruppevirkninger

En god referanse for gruppevirkninger kan være tom Diecks bok [3].

Definisjon 1.1 (Topologisk gruppe). En ***topologisk gruppe*** er et topologisk rom utstyrt med en gruppestruktur slik at gruppeoperasjonene er kontinuerlige.

La nå X være et topologisk rom og G en topologisk gruppe.

Definisjon 1.2 (Gruppevirkning). En ***venstre gruppevirkning av*** G ***på*** X er en avbildning $G \times X \to X$ notert $(g,x) \mapsto g \cdot x = gx$, slik at $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ og $e \cdot x = x$ der e er enhetselementet i G, for alle $x \in X$ og alle $g, h \in G$.

Et rom X kalles et ***venstre*** G***-rom*** hvis G er en topologisk gruppe som virker på X fra venstre. Nå er enhver venstrevirkning ekvivalent med en høyrevirkning, for hvis $G \times X \to X$ er en venstrevirkning gitt ved $(g,x) \mapsto g \cdot x$, så fås en høyrevirkning $X \times G \to X$ gitt ved $(x,g) \mapsto x \cdot g = g^{-1} \cdot x$.

En virkning av G på X kalles ***fri*** hvis $g \cdot x = x$ impliserer $g = e$ for alle $x \in X$ og alle $g \in G$.

Definisjon 1.3 (Fikspunktmengde). For et G-rom X består ***fikspunktmengden*** X^G ***til*** X ***under virkningen av*** G av de punktene i X som holdes fiksert når G virker.

Fikspunktmengden er altså

$$X^G = \{x \in X \mid gx = x \text{ for alle } g \in G\},$$

eller ved å legge merke til homeomorfien $X \cong \mathrm{Map}(*, X)$ mellom X og rommet av avbildninger fra ettpunktsrommet $*$ inn i X,

$$X^G \cong \mathrm{Map}(*, X)^G.$$

Hvis $*$ byttes ut med det homotopiekvivalente fri G-rommet EG fås ***homotopifikspunktene*** X^{hG} til X,

$$X^{hG} \cong \mathrm{Map}(EG, X)^G.$$

Nå er det klart at $EG \to *$ gir en avbildning $\mathrm{Map}(*, X) \to \mathrm{Map}(EG, X)$, og dermed fås en avbildning fra fikspunktene til homotopifikspunktene,

$$\gamma : X^G \to X^{hG}.$$

For et G-rom X vil ***orbitrommet*** X/G til X fremkomme ved å dele ut med virkningen av G på X, slik at $x \in X$ identifiseres med $gx \in X$ for alle $g \in G$. Videre defineres ***homotopiorbitrommet*** til X, av og til skrevet X_{hG}, som orbitrommet $EG \times_G X$ hvor $(zg, x) \in EG \times X$ identifiseres med $(z, gx) \in EG \times X$ for alle $(z, x) \in EG \times X$.

Definisjon 1.4 (G-avbildning). En avbildning $f : X \to Y$ mellom G-rom X og Y kalles en G***-avbildning*** hvis $f(gx) = gf(x)$.

Så G-avbildninger $X \to Y$ respekterer virkningen av G på X og Y, og kalles ofte G***-ekvivariante*** avbildninger.

Proposisjon 1.5. *For G-rom X og Y er en G-avbildning $G \times X \to Y$ ekvivalent med en avbildning $X \to Y$.*

Grunnen til dette er at en G-avbildning $f : G \times X \to Y$ gir en avbildning $X \to Y$ gitt ved $x \mapsto f(e, x)$ for alle $x \in X$ der e er enhetselementet i G, mens en avbildning $f : X \to Y$ gir en G-avbildning $G \times X \to Y$ gitt ved $(g, x) \mapsto g \cdot f(x)$ for alle $(g, x) \in G \times X$.

1.2 Bunter

En referanse for generell teori om bunter kan være Husemollers bok [6]. Det er verdt å merke seg Hatchers [5] når det gjelder vektorbunter.

Følgende definisjon er egentlig definisjonen av en kompleks vektorbunt.

Definisjon 1.6 (Vektorbunt). En ***vektorbunt av dimensjon*** m er en avbildning $p : E \to B$ der hver fiber $p^{-1}(x)$ har struktur som et komplekst vektorrom for alle $x \in B$, og slik at det finnes en åpen overdekning $\{U_\alpha\}$ av B og homeomorfier

$$h_\alpha : p^{-1}U_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{C}^m$$

som tar hver fiber $p^{-1}(x)$ til $\{x\} \times \mathbb{C}^m$ ved en vektorromsisomorfi for alle punkter $x \in U_\alpha$.

Slike homeomorfier h_α kalles ***lokale trivialiseringer***, mens E og B kalles henholdvis ***totalrom*** og ***basisrom***.

Hvis nå U_α og U_β er åpne delmengder av B slik at det finnes lokale trivialiseringer $h_\alpha : p^{-1}U_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{C}^m$ og $h_\beta : p^{-1}U_\beta \to U_\beta \times \mathbb{C}^m$ så passer dette inn i et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd}
(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^m \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[l, "h_\alpha|"'] \arrow[r, "h_\beta|"] \arrow[d, "p|"] & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^m \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U_\alpha \cap U_\beta &
\end{tikzcd}$$

der øverste rad sender et element $(x, v) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^m$ på venstre side til et element $(x, h(x) \cdot v) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^m$ til høyre. Her kalles avbildningen $h : U_\alpha \cap U_\beta \to GL_m(\mathbb{C})$ for en ***overgangsfunksjon***, og $GL_m(\mathbb{C})$ er ***strukturgruppen***.

Litteratur om vektorbunter gjør ofte antagelser om at basisrommet er parakompakt, og i praksis er det vanlig at basisrommet er et CW-kompleks.

En ***vektorbuntendomorfi*** er en avbildning $E \to E$ slik at hver fiber $E_x = p^{-1}(x)$ avbildes til seg selv ved en lineærtransformasjon. En ***vektorbuntautomorfi*** er en homeomorfi $\Phi : E \to E$ slik at hver fiber E_x tas til seg selv ved en lineær isomorfi.

Fiberbunter er en generalisering av vektorbunter. En ***fiberbunt med typisk fiber*** F er en avbildning $p : E \to B$ slik at det finnes en åpen overdekning $\{U_\alpha\}$ av B med homeomorfier $h_\alpha : p^{-1}U_\alpha \to U_\alpha \times F$ som tar $p^{-1}(x)$ homeomorft til $\{x\} \times F$ for alle $x \in U_\alpha$.

Definisjon 1.7 (Prinsipalbunt). En ***prinsipalbunt*** er en fiberbunt med strukturgruppen som fiber.

Ofte betraktes prinsipalbunter med typisk fiber G som høyre G-rom, mens fiberen G (eller F) oppfattes som et venstre G-rom.

Etter hvert vil F være lik $\mathbb{C}^m$ mens G er lik $U(m)$, og det vil ofte være nyttig å tenke på en prinsipalbunt P som en rammebunt. Det vil si, hvis $q \in P$ projiserer på x i basisrommet B, så vil q være ekvivalent med en unitær avbildning $\bar{q} : \mathbb{C}^m \to E_x$ slik at diagrammet

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^m \arrow[r, "\bar{q}"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ \{x\} \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

kommuterer. Da vil virkningen av $U(m)$ på P være gitt ved $(\bar{q}, A) \mapsto \bar{q} \circ A$ for $q \in P$ og $A \in U(m)$.

1.3 Notasjon i obstruksjonsteori

Gitt et par (X, A) av rom, en fibrering $p : E \to B$ og avbildninger $f : X \to B$ og $\tilde{f} : A \to E$, så kalles $\tilde{f}$ en ***delvis løftning*** av f hvis $p \circ \tilde{f} = f|_A$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Underrommet A kan for eksempel være randen ∂X til X. Hvis $X = A$ blir dette definisjonen av en løftning.

En seksjon $\sigma : B \to E$ av en $U(m)$-avbildning $p : E \to B$ kalles en ***$U(m)$-seksjon*** hvis σ er en $U(m)$-avbildning.

En homotopi $F : X \times I \to Y$ kalles en ***$U(m)$-homotopi*** hvis hver av avbildningene $f_t = F|_{X \times \{t\}}$ er $U(m)$-avbildninger.

En referanse for lokale koeffisientsystemer kan være G. W. Whiteheads bok [8, side 257]. For å definere et lokalt koeffisientsystem er det praktisk å først definere ***fundamentalgruppoiden*** til et rom X som kategorien $\Pi_1(X)$ der objektene er punktene i X mens morfiene fra et objekt x_2 til et objekt x_1 er mengden $\pi_1(X; x_2, x_1)$ av homotopiklasser av veier fra x_1 til x_2 i X.

Definisjon 1.8 (Lokalt koeffisientsystem). Et ***lokalt koeffisientsystem*** i X er en funktor fra fundamentalgruppoiden $\Pi_1(X)$ til kategorien av abelske grupper.

En naturlig transformasjon T av lokale koeffisientsystemer G og H kalles en ***homomorfi av lokale koeffisientsystemer***. Så for to punkter $x_1, x_2 \in X$ og en homotopiklasse $\xi \in \pi_1(X; x_1, x_2)$, så skal diagrammet

$$\begin{tikzcd} G(x_2) \arrow[r, "G(\xi)"] \arrow[d, "T(x_2)"'] & G(x_1) \arrow[d, "T(x_1)"] \\ H(x_2) \arrow[r, "H(\xi)"'] & H(x_1) \end{tikzcd}$$

kommutere. Videre er homomorfien T en ***isomorfi av lokale koeffisient-systemer*** hvis hver av homomorfiene $T(x)$ for $x \in X$ er isomorfier.

Enhver abelsk gruppe G bestemmer et ***konstant koeffisientsystem*** $\underline{G}$ med $\underline{G}(x) = G$ og $\underline{G}(\xi) = \mathrm{id}_G$.

Definisjon 1.9 (Simpelt koeffisientsystem). Et ***simpelt koeffisient-system*** er et lokalt koeffisientsystem som er isomorft med et konstant.

Kapittel 2

Presentasjon av problemet

2.1 Buntautomorfier kan tilordnes determinanter

Gitt et valg av basis for et endeligdimensjonalt komplekst vektorrom V, så kan enhver vektorromsendomorfi $V \to V$ representeres som en matrise i denne basisen, og matrisen kan tilordnes en determinant blant de komplekse tallene. Determinanten til vektorromsendomorfien defineres som determinanten til denne matriserepresentasjonen. Her er det underforstått at samme basis for V brukes på hver side av pilen fra V til V, og velkjent at determinanten da er uavhengig av valg av basis for V. Dette brukes til å definere determinanten til en vektorbuntendomorfi.

La nå $p : E \to B$ være en m-dimensjonal kompleks vektorbunt og la $\Phi : E \to E$ være en vektorbuntendomorfi. Da restrikterer Φ til en vektorromsendomorfi over hver fiber, så gitt et valg av basis for hver fiber $E_x \subset E$ vil det fibervis være mulig å representere restriksjonen $\Phi|_{E_x} = \Phi_x : E_x \to E_x$ som en matrise M_x med hensyn på den valgte basisen for E_x. Her blir $\det(M_x) \in \mathbb{C}$.

Nå har enhver vektorbuntendomorfi $\Phi : E \to E$ en tilordnet determinantfunksjon

$$\det(\Phi) : B \to \mathbb{C}$$

gitt ved $\det(\Phi)(x) = \det(\Phi_x) = \det(M_x)$ for alle $x \in B$, der $\Phi_x = \Phi|_{E_x}$ er restriksjonen av Φ til fiberen E_x over $x \in B$ og M_x er matriserepresentasjonen av Φ med hensyn på en valgt basis for E_x.

Ved å velge to basiser for hver fiber i E kan restriksjonene Φ_x for alle $x \in B$ representeres med matriser M_x og M'_x med hensyn på hver sin basis. Da vil M'_x være en konjugert av M_x ved hjelp av en basisskiftematrise. Det følger at hvis Φ_x representeres som M'_x i en (muligens) annen basis så vil determinanten være uendret, $\det(\Phi_x) = \det(M_x) = \det(M'_x)$.

Hvis nå $\Phi : E \to E$ er en vektorbuntautomorfi, så er Φ en vektorbuntendomorfi som restrikterer til en vektorromsisomorfi over hver fiber. Dette betyr at enhver vektorbuntautomorfi $\Phi : E \to E$ har en tilordnet determinantfunksjon

$$\det(\Phi) : B \to \mathbb{C}^*$$

definert som over.

Slike determinantfunksjoner er kontinuerlige:

Velg en åpen overdekning $\{U_\alpha\}$ av B slik at E er trivialiserbar over hver $U_\alpha \subset B$. Da er det nok å vise at restriksjonene $\det(\Phi)|_{U_\alpha}$ er kontinuerlige for alle α. Nå finnes et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[r, "\Phi"] & E & \\
U_\alpha \times \mathbb{C}^m & E_{U_\alpha} \arrow[l, "\cong"'] \arrow[u, hook] \arrow[r, "\Phi_{U_\alpha}"] & E_{U_\alpha} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\cong"] & U_\alpha \times \mathbb{C}^m
\end{tikzcd}$$

der $E_{U_\alpha} = E|_{U_\alpha}$ og avbildningen Φ_{U_α} er lik restriksjonen av Φ til $E|_{U_\alpha}$.

For å avbilde et element (x, v) i $U_\alpha \times \mathbb{C}^m$ lengst til venstre via Φ_{U_α} til et element i $U_\alpha \times \mathbb{C}^m$ lengst til høyre, så må de tre avbildningene langs nederste rad brukes etter hverandre. Først vil den inverse av homeomorfien til venstre ta (x, v) til et punkt i fiberen E_x over x. Denne fiberen avbildes til seg selv under Φ_{U_α}, og det blir klart at (x, v) avbildes langs nederste rad til et element $(x, h(x) \cdot v) \in U_\alpha \times \mathbb{C}^m$ hvor $h(x) \in GL_m(\mathbb{C})$. Siden sammensetningen langs nederste rad er kontinuerlig, så må også overgangsfunksjonen $h : U_\alpha \to GL_m(\mathbb{C})$ være kontinuerlig. Så $\det(\Phi)|_{U_\alpha}$ blir definert som sammensetningen

$$U_\alpha \xrightarrow{h} GL_m(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^*$$

og er kontinuerlig.

Dette kan sammenfattes i følgende proposisjon:

Proposisjon 2.1. *En vektorbuntautomorfi har en assosiert kontinuerlig determinantfunksjon.*

Eller litt kortere, en vektorbuntautomorfi har en tilordnet determinantavbildning.

La nå V og V' være endeligdimensjonale komplekse vektorrom. La $T : V \to V$ og $T' : V' \to V'$ være vektorromsendomorfier representert av matriser M og M', henholdsvis. Da kan vektorromsendomorfien av den direkte summen av V og V',

$$T \oplus T' : V \oplus V' \to V \oplus V',$$

representeres med en blokkmatrise

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M' \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

og

$$\det(T \oplus T') = \det \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M' \end{bmatrix} = \det(M) \cdot \det(M') = \det(T) \cdot \det(T').$$

Dette kan overføres til vektorbuntendomorfier.

Proposisjon 2.2. *To vektorbuntendomorfier* Φ *og* Φ' *oppfyller* $\det(\Phi \oplus \Phi') = \det(\Phi) \cdot \det(\Phi')$.

Bevis. La $\Phi : E \to E$ og $\Phi' : E' \to E'$ være vektorbuntendomorfier av vektorbunter $p : E \to B$ og $p' : E' \to B$, henholdsvis. La matriserepresentasjonene av de fibervise restriksjonene Φ_x og Φ'_x med hensyn på en gitt basis for fibrene være henholdsvis M_x og M'_x. Nå brukes at fibrene i $E \oplus E'$ er $(E \oplus E')_x \cong E_x \oplus E'_x$ for $x \in B$ til å definere

$$\Phi \oplus \Phi' : E \oplus E' \to E \oplus E'$$

som vektorbuntendomorfien som fibervis er gitt ved vektorromsendomorfien $(\Phi \oplus \Phi')_x : E_x \oplus E'_x \to E_x \oplus E'_x$. Denne kan representeres med blokkmatrisen sammensatt av M_x og M'_x som i (2.1), og dermed blir $\det(\Phi \oplus \Phi') = \det(\Phi) \cdot \det(\Phi')$. □

Proposisjon 2.3. *Hvis* $\Phi : E \to E$ *og* $\Phi' : E \to E$ *er vektorbuntendomorfier av en vektorbunt* E *så er* $\det(\Phi \circ \Phi') = \det(\Phi) \cdot \det(\Phi')$.

Bevis. Hvis Φ_x og Φ'_x kan representeres med matriser M_x og M'_x, henholdsvis, så kan $(\Phi' \circ \Phi)_x$ representeres med $M'_x \cdot M_x$ og resultatet følger. □

Proposisjon 2.4. *Determinanten til identetetsautomorfien er* 1.

Bevis. Identitetsautomorfien $\mathrm{id} : E \to E$ tar hver fiber E_x til seg selv under identitetsavbildningen $\mathrm{id} : E_x \to E_x$, så fibervis kan identitetsautomorfien representeres ved identitetsmatrisen. Da blir determinanten 1. □

Proposisjon 2.5. *For en vektorbuntautomorfi* Φ *er* $\det(\Phi^{-1}) = \det(\Phi)^{-1}$.

Bevis. Sammensetningen $\Phi^{-1} \circ \Phi : E \to E$ er lik identitetsautomorfien, så

$$1 = \det(\mathrm{id}) = \det(\Phi^{-1} \circ \Phi) = \det(\Phi^{-1}) \cdot \det(\Phi)$$

ved proposisjon 2.3, og dermed blir $\det(\Phi^{-1}) = \det(\Phi)^{-1}$. □

Eksempel 2.6 (Skalarmultiplikasjon). Gitt en m-dimensjonal vektorbunt $E \to B$ og en avbildning $\rho : B \to \mathbb{C}^*$, så finnes en automorfi ***skalarmultiplikasjon*** gitt ved at et element $v \in E_x \subset E$ tas til $\rho(x)v \in E_x$ for alle $x \in B$. Denne kan representeres fibervis ved $m \times m$-matrisen som har $\rho(x)$ på diagonalen og null ellers. Determinanten blir dermed $\rho^m(x)$ for alle $x \in B$.

2.2 Et omvendingsproblem

Nå er det fristende å spørre; gjelder *omvendingen* av proposisjon 2.1? Eller mer utfyllende:

Problem 2.7. Gitt en m-dimensjonal kompleks vektorbunt $p : E \to B$ og en avbildning $\Psi : B \to \mathbb{C}^*$, finnes det da en buntautomorfi $\Phi : E \to E$ slik at $\Psi = \det(\Phi)$?

Så problemet blir å finne ut om Ψ kan realiseres som determinanten til en buntautomorfi, mens ønsket blir å finne ut hva som må kreves for at Ψ skal kunne skrives $\Psi = \det(\Phi)$ for en buntautomorfi Φ.

En interessant reformulering av problemet: hvilke avbildninger $\Psi : B \to \mathbb{C}^*$ opptrer på formen $\det(\Phi)$ for en buntautomorfi $\Phi : E \to E$?

Det er i hvert fall klart at Ψ representerer et element i første kohomologi av basisrommet, $H^1 B \cong [B, K(\mathbb{Z}, 1)] \cong [B, \mathbb{C}^*]$. Og ved hjelp av proposisjon 2.3 fås en gruppestruktur på mengden av kohomologiklasser av avbildninger $\Psi : B \to S^1$ på formen $\Psi = \det(\Phi)$,

$$\{\, [\det(\Phi)] \mid \Phi : E \to E \text{ er en buntautomorfi}\},$$

gitt ved

$$[\det(\Phi')] \cdot [\det(\Phi)] = [\det(\Phi' \circ \Phi)] \in [B, \mathbb{C}^*] \cong H^1 B.$$

Identitetselementet er $[1] = [\det(\mathrm{id})]$ mens det inverse elementet til $[\det(\Phi)]$ blir $[\det(\Phi)]^{-1} = [\det(\Phi)^{-1}]$. Så på denne måten, sammen med proposisjon 3.3, kan mengden av homotopiklasser av avbildninger Ψ på formen $\det(\Phi)$ oppfattes som en undergruppe av $H^1 B$.

Hvis basisrommet B består av flere sammenhengskomponenter $\{B_\alpha\}$, så er det mulig å restriktere totalrommet E til rom E_α over hver enkelt slik komponent. Så kan problemet (kanskje) løses for hver bunt $p_\alpha : E_\alpha \to B_\alpha$, og til slutt settes det hele sammen. Altså er det nok å se på én sammenhengskomponent om gangen.

Kapittel 4 viser eksempler der en slik Ψ *lar* seg realisere som determinanten til en buntautomorfi. Men kapittel 5 og 6 gir et eksempel på at en slik realisering ikke alltid er mulig. Kapittel 7 og 8 utleder en obstruksjonsteori som i prinsipp kan avgjøre hvilke Ψ som kan realiseres for en gitt bunt $E \to B$.

Kapittel 3

De første forenklinger

3.1 Reduksjon til hermitiske bunter

En ***kompleks vektorbunt*** er en vektorbunt $\mathbb{C}^m \to E \to B$ med $GL_m(\mathbb{C})$ som strukturgruppe. Etter valg av basis for fibrene vil en kompleks automorfi være fibervis multiplikasjon med elementer i $GL_m(\mathbb{C})$, slik at komplekse automorfier har determinanter i $\mathbb{C}^*$. Tilsvarende er en ***hermitisk vektorbunt*** en vektorbunt $\mathbb{C}^m \to E \to B$ med $U(m)$ som strukturgruppe. Etter valg av unitær basis for fibrene vil en unitær automorfi være fibervis multiplikasjon med elementer i $U(m)$. Det følger at determinanten av en hermitisk automorfi tar verdier i $S^1 \subset \mathbb{C}^*$. En hermitisk bunt har et hermitisk indreprodukt, og dette betyr at en kompleks underbunt genererer et unitært komplement.

Problemet i seksjon 2.2 er formulert ved hjelp av komplekse bunter med komplekse buntautomorfier og $GL_m(\mathbb{C})$ som strukturgruppe, og vil heretter kalles ***kompleks versjon*** av problemet. Her er en ***hermitisk formulering***:

Problem 3.1 (Hermitisk versjon). Gitt en hermitisk vektorbunt $p : E \to B$ av dimensjon m og en avbildning $\Psi : B \to S^1$, finnes det da en unitær buntautomorfi $\Phi : E \to E$ slik at $\Psi = \det(\Phi)$?

Lemma 3.2. *Denne hermitiske versjonen av problemet er ekvivalent med problem 2.7, den komplekse versjonen.*

Bevis. Anta at det finnes en løsning av den hermitiske versjonen, og anta at en kompleks vektorbunt $p : E \to B$ er gitt sammen med en avbildning $\Psi : B \to \mathbb{C}^*$ fra basisrommet inn i $\mathbb{C}^*$. Fra denne informasjonen er det mulig å lage en hermitisk vektorbunt over samme basisrom B, sammen med en avbildning $\Psi' : B \to S^1$.

La $\Psi' = \Psi/|\Psi|$. Ved å bruke deformasjonsretraksjonen

$$GL_m(\mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} U(m)$$

definert ved hjelp av Gram-Schmidt-prosedyren og beskrevet av for eksempel Hatcher [5, side 18], så kan den komplekse vektorbunten oppfattes som en hermitisk vektorbunt sammen med avbildningen Ψ' fra B og inn i S^1. Ifølge antagelsen finnes det da en unitær vektorbuntautomorfi Φ' med egenskapen $\det(\Phi') = \Psi'$. La nå $\rho = |\Psi|^{\frac{1}{m}}$ og definer $\Phi = \rho \cdot \Phi'$ som en buntautomorfi av $p : E \to B$. Da blir

$$\det(\Phi) = \det(\rho \cdot \Phi') = \rho^m \det(\Phi') = |\Psi| \cdot \frac{\Psi}{|\Psi|} = \Psi,$$

og det komplekse problemet har en løsning.

Anta nå at den komplekse versjonen er løsbar, og at en hermitisk vektorbunt $p : E \to B$ er gitt sammen med en avbildning $\Psi : B \to S^1$.

Spesielt er da $E \to B$ en kompleks vektorbunt fordi $U(m) \subset GL_m(\mathbb{C})$ og $S^1 \subset \mathbb{C}^*$. Det betyr at det er mulig å finne en kompleks automorfi $\Phi : E \to E$ slik at $\Psi = \det(\Phi)$, og det er nok å endre automorfien slik at den blir unitær. Dette kan gjøres fibervis og kontinuerlig uten å endre determinanten ved hjelp av deformasjonsretraksjonen $GL_m(\mathbb{C}) \to U(m)$ angitt ovenfor. □

Forrige kapittel definerte determinantavbildningen til en kompleks buntautomorfi som en avbildning $\det : B \to \mathbb{C}^*$. Fra beviset ovenfor er det klart at determinanten til en unitær buntautomorfi er en avbildning

$$\det : B \to S^1$$

definert som i det komplekse tilfellet, og som derfor oppfyller de samme egenskapene.

3.2 Reduksjon til homotopityper

Det viser seg at dette er et homotopiproblem.

Proposisjon 3.3. *Problem 3.1 avhenger bare av homotopiklassen til* Ψ.

Bevis. Anta at vektorbunten $p : E \to B$ er gitt sammen med en avbildning $\Psi_0 : B \to S^1$ slik at $\Psi_0 = \det(\Phi_0)$ for en vektorbuntautomorfi $\Phi_0 : E \to E$. La nå $\Psi_t : B \to S^1$ være en homotopi fra Ψ_0 til en avbildning $\Psi_1 : B \to S^1$. Nå er ønsket å finne en vektorbuntautomorfi $\Phi_1 : E \to E$ og en fiberhomotopi $\Phi_t : E \to E$ fra Φ_0 til Φ_1 slik at $\Psi_1 = \det(\Phi_1)$.

La nå en homotopi $h_t : B \to S^1$ være gitt ved $h_t(x) = \Psi_t(x)/\Psi_0(x)$ for alle $x \in B$. Da er $h_0(x) = 1$ for alle $x \in B$. Ved å bruke homotopiløftningsegenskapen [4, proposisjon 1.30] på det m-doble overdekningsrommet $S^1 \to S^1$ og homotopien h_t i diagrammet nedenfor, fås eksistensen av en entydig homotopi $\rho_t : B \to S^1$ som løfter homotopien $h_t : B \to S^1$. Her blir altså $h_t(x) = \rho_t^m(x)$ for alle $x \in B$ og alle $t \in I$:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "1"] \arrow[d, hook, "i_0"'] & S^1 \arrow[d, "m"] \\
B \times I \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dotted, "\rho"] & S^1
\end{tikzcd}$$

I dette diagrammet skal i_0 være inklusjonen $i_0(x) = (x, 0)$ av B inn i $B \times I$ mens $1 : B \to S^1$ er den konstante avbildningen i 1 gitt ved $x \mapsto 1 \in S^1$ for alle $x \in B$.

Nå er det mulig å definere en homotopi $\Phi_t : E \to E$ av vektorbuntautomorfier av $p : E \to B$, gitt ved skalarmultiplikasjon med homotopien ρ_t. La med andre ord $\Phi_t(v) = \rho_t(x) \cdot \Phi_0(v)$ for $v \in E_x \subset E$ der $x \in B$. Da blir

$$\det(\Phi_t) = \rho_t^m \det(\Phi_0) = h_t \cdot \Psi_0 = \frac{\Psi_t}{\Psi_0} \cdot \Psi_0 = \Psi_t$$

for alle $t \in I$. Dette viser at problemet kun avhenger av homotopiklassen til avbildningen $\Psi_0 : B \to S^1$. $\square$

Kapittel 4

Løsbare eksempler

4.1 Hvis bunten splitter av en linjebunt

Anta at totalrommet kan skrives $E = L^\perp \oplus L$ for en linjebunt $L \subset E$. La $\Psi : B \to S^1$ være gitt. Nå er det mulig å lage en buntautomorfi $L^\perp \oplus L \to L^\perp \oplus L$ ved å bruke identitetsavbildningen på underbunten $L^\perp$, og multiplikasjon med avbildningen Ψ på linjebunten L. Da blir

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{id}_{L^\perp} \oplus \Psi)(x) &= \det(\mathrm{id}_{L^\perp})(x) \cdot \det(\Psi)(x) \quad \text{ved proposisjon 2.2} \\
&= 1 \cdot \det(\Psi)(x) \quad \text{ved proposisjon 2.4} \\
&= \Psi(x) \quad \text{siden } \Psi(x) \in S^1,
\end{aligned}$$

så $\Phi = \mathrm{id}_{L^\perp} \oplus \Psi$ gjør at $\Psi = \det(\Phi)$.

Dette inntreffer for eksempel hvis basisrommet er et CW-kompleks av dimensjon ekte mindre enn $2m$. For hvis bunten splitter av en triviell linjebunt, så vil avbildningen g i pullbackdiagrammet

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\hat{g}"] \arrow[d, "p"'] & E(\gamma^m) \arrow[d] \\
B \arrow[r, "g"] & B\,U(m)
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

faktorisere gjennom $B\,U(m-1)$, slik:

$$\begin{tikzcd}
 & E(\gamma^{m-1}) \oplus \varepsilon^1 \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
E \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & E(\gamma^m) \arrow[dd] \\
 & B\,U(m-1) \arrow[dr] & \\
B \arrow[ur] \arrow[rr, "g"] & & B\,U(m)
\end{tikzcd}$$

Notasjonen $E(\gamma^{m-1})$ og ε^1 er som i Milnor og Stasheffs bok [7].

Se derfor på fibersekvensen

$$U(m-1) \to U(m) \xrightarrow{e_m} S^{2m-1}$$

der $U(m-1)$ inkluderes i $U(m)$ ved at en matrise $A \in U(m-1)$ avbildes på matrisen

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in U(m),$$

og avbildningen e_m avbilder $U(m)$ til S^{2m-1} ved at en matrise i $U(m)$ sendes til sin siste søylevektor, et element i S^{2m-1}. På denne måten fås en fibrering $S^{2m-1} \to BU(m-1) \to BU(m)$ som gir en lang eksakt sekvens,

$$\begin{gathered} \cdots \to \pi_{2m-1}S^{2m-1} \to \pi_{2m-1}BU(m-1) \xrightarrow{\text{surj.}} \pi_{2m-1}BU(m) \xrightarrow{\delta} \\ \pi_{2m-2}S^{2m-1} \to \pi_{2m-2}BU(m-1) \xrightarrow{\cong} \pi_{2m-2}BU(m) \xrightarrow{\delta} \cdots \end{gathered}$$

som ender

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \pi_1 S^{2m-1} \to \pi_1 BU(m-1) \xrightarrow{\cong} \pi_1 BU(m) \xrightarrow{\delta} 0,$$

der $\pi_{2m-1}S^{2m-1} \cong \mathbb{Z}$ mens $\pi_i S^{2m-1} = 0$ for $i \leq 2m-2$. Altså vil avbildningen $BU(m-1) \to BU(m)$ være $(2m-1)$-sammenhengende, slik at avbildningen fra homotopiklasser av avbildninger $S^i \to BU(m-1)$ til homotopiklasser av avbildninger $S^i \to BU(m)$,

$$[S^i, BU(m-1)] \to [S^i, BU(m)],$$

blir en isomorfi for $i < 2m-1$ og surjeksjon for $i = 2m-1$. Ønsker å vise at avbildningen

$$[B, BU(m-1)] \to [B, BU(m)] \tag{4.2}$$

er surjektiv ved å gjøre induksjon på skjelettdimensjonen til B og huske på at $\dim B < 2m$.

Siden $BU(m-1)$ og $BU(m)$ begge er veisammenhengende, så er det klart at avbildningen (4.2) er en isomorfi på 0-skjelettet $B^{(0)} \subset B$, slik at avbildningen $[B^{(0)}, BU(m-1)] \to [B^{(0)}, BU(m)]$ blir surjektiv.

Anta nå at $[B^{(k-1)}, BU(m-1)] \to [B^{(k-1)}, BU(m)]$ er en surjeksjon, og se på $[B^{(k)}, BU(m-1)] \to [B^{(k)}, BU(m)]$. Denne avbildningen blir da en surjeksjon når avbildningene fra $B^{(k)}$ restrikteres til $(k-1)$-skjelettet $B^{(k-1)}$, og derfor blir det interessant å se på kvotienten $B^{(k)}/B^{(k-1)} \cong \bigvee_\alpha S^k_\alpha$. Nå finnes en isomorfi

$$[S^k_\alpha, BU(m-1)] \cong [S^k_\alpha, BU(m)]$$

for $k \leq 2m-2$ som blir en surjeksjon når $k = 2m-1$, og ved å bruke isomorfien $[\bigvee_\alpha S^k_\alpha, -] \cong \prod_\alpha [S^k_\alpha, -]$ blir dermed

$$[B^{(k)}/B^{(k-1)}, B\,U(m-1)] \to [B^{(k)}/B^{(k-1)}, B\,U(m)]$$

en surjeksjon for $k \leq 2m-1$. Nå gir $B^{(k-1)} \subset B^{(k)} \to B^{(k)}/B^{(k-1)} \cong \bigvee S^k$ en Puppe-sekvens som igjen gir et kommutativt diagram med eksakte søyler:

$$\begin{tikzcd}
{[\bigvee S^k, B\,U(m-1)]} \arrow[r, "\text{surj.}"] \arrow[d] & {[\bigvee S^k, B\,U(m)]} \arrow[d] \\
{[B^{(k)}, B\,U(m-1)]} \arrow[r] \arrow[d] & {[B^{(k)}, B\,U(m)]} \arrow[d] \\
{[B^{(k-1)}, B\,U(m-1)]} \arrow[r, "\text{surj.}"] \arrow[d] & {[B^{(k-1)}, B\,U(m)]} \arrow[d] \\
{[\bigvee S^{k-1}, B\,U(m-1)]} \arrow[r, "\text{inj.}"] & {[\bigvee S^{k-1}, B\,U(m)]}
\end{tikzcd}$$

Nederste rad er en isomorfi for $k \leq 2m-1$ og surjektiv for $k = 2m$, så den er injektiv for $k \leq 2m-1$. Nest nederste rad er surjektiv ved induksjons-hypotesen. Øverste rad er surjektiv for $k \leq 2m-1$. Da gir en halvpart av 5-lemma at avbildningen

$$[B^{(k)}, B\,U(m-1)] \to [B^{(k)}, B\,U(m)]$$

er surjektiv. Altså faktoriserer avbildningen $g : B \to B\,U(m)$ i diagram (4.1) gjennom $B\,U(m-1)$ for alle basisrom B av dimensjon ekte mindre enn $2m$, slik at $E \to B$ da splitter av en linjebunt.

4.2 Hvis avbildningen har en m-te rot

Gitt en m-dimensjonal bunt og en avbildning $\Psi : B \to S^1$ på formen $\Psi = \rho^m$ for en avbildning $\rho : B \to S^1$, så finnes en buntautomorfi med den søkte egenskapen. For denne buntautomorfien Φ kan lages ved å representere vektorromsisomorfien $\Phi_x : E_x \to E_x$ med $m \times m$-matrisen

$$M_x = \begin{bmatrix} \rho(x) & & \\ & \ddots & \\ & & \rho(x) \end{bmatrix}$$

for alle $x \in B$. Da blir

$$\det(\Phi)(x) = \det(\Phi_x) = \det(M_x) = \big(\rho(x)\big)^m = \rho^m(x) = \Psi(x)$$

slik at $\Psi = \det(\Phi)$. Så hvis avbildningen $\Psi : B \to S^1$ har en m-te rot, vil problemet ha en løsning.

4.3 Hvis bunten er en direkte sum og avbildningen har en rot

De to forrige eksemplene inspirerer et nytt. Anta at vektorbunten er en direkte sum $E = E' \oplus E''$ av underbunter $E', E'' \subset E$. Anta videre at E'' er n-dimensjonal og at avbildningen Ψ har en n-te rot, slik at $\Psi = \rho^n$ for en avbildning $\rho : B \to S^1$.

Nå er det mulig å lage en buntautomorfi $\Phi : E \to E$ med $\Psi = \det(\Phi)$. Bruk da identitetsavbildningen på første summand E', og la andre summand av buntautomorfien være som i eksemplet i seksjon 4.2. Restriksjonen Φ_x av Φ til fiberen E_x over $x \in B$ skal altså være representert ved matrisen

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \rho(x) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \rho(x) \end{bmatrix}$$

der de $m-n$ første radene har 1 som diagonalelement, mens de siste n radene har $\rho(x)$ på diagonalen. Dette gir $\Psi = \det(\Phi)$:

$$\det(\Phi)(x) = \det(\Phi_x) = \det M_x = 1^{m-n} \cdot \rho^n(x) = \Psi(x).$$

Kapittel 5

Omskrivning av problemet

Dette kapitlet viser hvordan det er mulig å gjøre en omskrivning fra det opprinnelige problemet i hermitisk formulering til et problem formulert med prinsipalbunter. En fordel ved dette er at det etter hvert leder til et eksempel som viser at problemet ikke alltid er løsbart.

Notasjon. Rommet $U(m)^{\mathrm{ad}}$ skal være rommet $U(m)$, men med konjugasjonsvirkningen av $U(m)$ fra venstre, $U(m) \times U(m) \to U(m)$ gitt ved $(B, A) \mapsto B \cdot A = BAB^{-1}$. Determinanten gir en $U(m)$-avbildning $\det : U(m)^{\mathrm{ad}} \to S^1$.

5.1 Omskrivning til prinsipalbunter

Første trinn i omskrivningen er å definere noen passende kategorier. Neste trinn blir å lage funktorer mellom dem for å vise at kategoriene er ekvivalente. Deretter må det vises at funktorene respekterer problemets formulering om $\Psi = \det(\Phi)$.

Altså, la $\mathcal{VA}$ være kategorien av vektorbunter med automorfier, det vil si: objektene er par

$$(p : E \to B, \Phi : E \to E) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{VA})$$

av vektorbunter $p : E \to B$ og buntautomorfier Φ slik at $p = p \circ \Phi$, mens morfiene fra $(p' : E' \to B, \Phi' : E' \to E')$ til $(p : E \to B, \Phi : E \to E)$ er avbildninger $f : E' \to E$ med $f \circ \Phi' = \Phi \circ f$ og $p \circ f = p'$.

La $\mathcal{P}_{\mathrm{u}}$ være kategorien av prinsipalbunter med avbildninger inn i $U(m)^{\mathrm{ad}}$. Objektene skal være par

$$\left(\pi : P \to B, \phi : P \to U(m)^{\mathrm{ad}}\right) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{P}_{\mathrm{u}})$$

der $\pi : P \to B$ er en prinsipal $U(m)$-bunt, og ϕ en $U(m)$-avbildning. Morfiene fra $\left(\pi : P \to B, \phi : P \to U(m)^{\mathrm{ad}}\right)$ til $\left(\pi' : P' \to B, \phi' : P' \to U(m)^{\mathrm{ad}}\right)$ er da $U(m)$-avbildninger $f : P \to P'$ slik at $\pi' \circ f = \pi$ og $\phi = \phi' \circ f$. Siden P

oppfattes som et høyre $U(m)$-rom betyr dette siste at $\phi(q \cdot u) = \phi(u^{-1} \cdot q) = u^{-1} \cdot \phi(q) = u^{-1}\phi(q)u$ for $q \in P$ og $u \in U(m)$.

Videre skal $\mathcal{B}_s$ være kategorien av vektorbunter med avbildninger av basisrommet inn i S^1. Med andre ord er objektene par

$$(p : E \to B, \Psi : B \to S^1) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}_s)$$

der $p : E \to B$ er en vektorbunt og Ψ en avbildning fra basisrommet B og inn i S^1. Morfiene mellom to objekter $(p : E \to B, \Psi : B \to S^1)$ og $(p' : E' \to B, \Psi' : B' \to S^1)$ er avbildninger $f : E \to E'$ slik at $p = p' \circ f$.

Til slutt, definér $\mathcal{P}_s$ som kategorien av prinsipalbunter med avbildninger inn i S^1. Objektene blir

$$(\pi : P \to B, \psi : P \to S^1) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{P}_s)$$

der ψ er en $U(m)$-avbildning og virkningen av $U(m)$ på S^1 er triviell. Morfiene fra $(\pi : P \to B, \psi : P \to S^1)$ til $(\pi' : P' \to B, \psi' : P' \to S^1)$ er avbildninger $f : P \to P'$ med $\pi = \pi' \circ f$ og $\psi = \psi' \circ f$.

Det er klart at konstruksjonene ovenfor virkelig gir kategorier.

Skal nå lage funktorer A, R, D og L mellom disse kategoriene, slik:

$$\mathcal{P}_u \underset{R}{\overset{A}{\rightleftarrows}} \mathcal{VA} \qquad \text{og} \qquad \mathcal{P}_s \underset{L}{\overset{D}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}_s \tag{5.1}$$

Det kan være greit å gjøre litt uformell motivasjon av disse navnene. Funktoren A tar en prinsipalbunt og en $U(m)$-avbildning fra totalrommet inn i $U(m)^{\mathrm{ad}}$, til en *assosiert* vektorbunt sammen med en automorfi av denne assosierte vektorbunten. Funktoren R tar en vektorbunt sammen med en buntautomorfi av denne, til vektorbuntens prinsipalbunt, eller *rammebunt*, sammen med en $U(m)$-avbildning inn i $U(m)^{\mathrm{ad}}$. Gitt en prinsipalbunt og en $U(m)$-avbildning fra totalrommet og inn i en sirkel, så skal D i en viss forstand *dele* ut med virkningen av $U(m)$ på totalrommet og på $U(m)$-avbildningen. Til slutt, gitt en vektorbunt og avbildning fra basisrommet inn i en sirkel, så skal L ta vektorbunten til sin prinsipalbunt og *løfte* avbildningen fra basisrommet til prinsipalbuntens totalrom.

Målet er å vise at sammensetningene $A \circ R$, $R \circ A$, $D \circ L$ og $L \circ D$ blir isomorfe med identiteten. For å beskrive disse funktorene er det nyttig å tenke på prinsipalbunten som en rammebunt, slik at enhver $q \in P$ gir en unitær avbildning $\bar{q} : \mathbb{C}^m \hookrightarrow E$.

Starter med å konstruere funktoren $A : \mathcal{P}_u \to \mathcal{VA}$. Gitt et objekt $\big(\pi : P \to B, \phi : P \to U(m)^{\mathrm{ad}}\big)$ i $\mathcal{P}_u$, la A ta P til $E = P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m$, og la $p : E \to B$ være gitt ved $p([q, v]) = \pi(q)$, der $[q, v]$ er ekvivalensklassen til (q, v) i $P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m$ for $q \in P$ og $v \in \mathbb{C}^m$. Når q antas å ligge i fiberen $\pi^{-1}(x)$ over $x \in B$, skal buntautomorfien $\Phi : E \to E$ være gitt ved

$$(\Phi_x)([q, v]) = [q, \phi(q) \cdot v].$$

Da er Φ definert på ekvivalensklassene i $P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m$, for la $u \in U(m)$ slik at (q, uv) og (qu, v) representerer samme ekvivalensklasse $[q, u] \in P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m$. Da blir $\Phi([q, uv]) = [q, \phi(q)uv]$ og samtidig

$$\begin{aligned} \Phi([qu, v]) &= [qu, \phi(qu)v] = [q, u\phi(qu)v] \\ &= [q, uu^{-1}\phi(q)uv] \end{aligned}$$

siden $\phi(qu) = u^{-1} \cdot \phi(q) = u^{-1}\phi(q)u$, altså

$$= [q, \phi(q)uv].$$

Nå må funktoren $R : \mathcal{VA} \to \mathcal{P}_{\mathrm{u}}$ beskrives. Velg et objekt $(p : E \to B, \Phi : E \to E)$ i $\mathcal{VA}$. Da er $\Phi : E \to E$ en buntautomorfi. Til vektorbunten $E \to B$ skal funktoren R gi en rammebunt, det vil si at E skal tas til sin tilhørende prinsipalbunt P. La videre $q \in P$ være slik at $x = \pi(q)$ for $x \in B$. Da kan $\phi : P \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ defineres ved at $q \in P$ tas til sammensetningen $\phi(q) = \bar{q}^{-1} \circ \Phi_x \circ \bar{q}$ i følgende diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^m \arrow[r, "\phi(q)"] \arrow[d, "\bar{q}"'] & \mathbb{C}^m \arrow[d, "\bar{q}"] \\ E_x \arrow[r, "\Phi_x"] & E_x \end{tikzcd}$$

Nå vil nemlig ϕ være $U(m)$-ekvivariant, for velg en matrise $u \in U(m)$ og se at elementet qu passer inn i et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^m \arrow[r, "\phi(qu)"] \arrow[d, "u"] \arrow[dd, bend right=60, "\bar{q} \circ u"'] & \mathbb{C}^m \arrow[d, "u"'] \arrow[dd, bend left=60, "\bar{q} \circ u"] \\ \mathbb{C}^m \arrow[r, "\phi(q)"] \arrow[d, "\bar{q}"] & \mathbb{C}^m \arrow[d, "\bar{q}"'] \\ E_x \arrow[r, "\Phi_x"] & E_x \end{tikzcd}$$

der

$$\begin{aligned} \phi(qu) &= (\bar{q} \circ u)^{-1} \circ \Phi_x \circ (\bar{q} \circ u) \\ &= u^{-1} \circ \bar{q}^{-1} \circ \Phi_x \circ \bar{q} \circ u \\ &= u^{-1} \circ \phi(q) \circ u \\ &= u^{-1} \cdot \phi(q). \end{aligned}$$

På denne måten tas et objekt $(p : E \to B, \Phi : E \to E)$ i $\mathcal{VA}$ til et objekt $\big(\pi : P \to B, \phi : P \to U(m)^{\mathrm{ad}}\big)$ i $\mathcal{P}_{\mathrm{u}}$.

Lemma 5.1. *Sammensetningen $A \circ R : \mathcal{VA} \to \mathcal{VA}$ er naturlig isomorf med identitetsfunktoren $\mathrm{id}_{\mathcal{VA}}$ på $\mathcal{VA}$.*

Bevis. La $(p : E \to B, \Phi : E \to E)$ være et objekt i $\mathcal{VA}$. Ved å anvende funktoren R fås da et objekt $\big(\pi : P \to B, \phi : P \to U(m)^{\mathrm{ad}}\big)$ i $\mathcal{P}_{\mathrm{u}}$, med $\phi(q) = \bar{q}^{-1} \circ \Phi_x \circ \bar{q}$ for $x = \pi(q)$ og $q \in P$. Anvender deretter A og får et objekt $(p' : E' \to B, \Phi' : E' \to E')$ der $E' = P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m$ og $\Phi'([q,v]) = [q, \phi(q)v]$. Basisrommet B ligger altså fast. Nå er det nødvendig å vise at objektene $(p : E \to B, \Phi : E \to E)$ og $(p' : E' \to B, \Phi' : E' \to E')$ er isomorfe. La avbildningen $f : E' \to E$ være gitt ved $f([q,v]) = \bar{q}(v)$ for $[q,v] \in E' = P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m$. Slik $\bar{q} : \mathbb{C}^m \to E$ er definert blir f en homeomorfi, men for at f skal være en isomorfi i kategorien $\mathcal{VA}$ må diagrammene

$$
\begin{tikzcd}
P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m \arrow[r, "f", "\cong"'] \arrow[d, "\Phi'"'] & E \arrow[d, "\Phi"] \\
P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m \arrow[r, "f", "\cong"'] & E
\end{tikzcd}
\quad \text{og} \quad
\begin{tikzcd}
P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m \arrow[rr, "f", "\cong"'] \arrow[dr, "p'"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\
& B &
\end{tikzcd}
$$

kommutere. Skal nå vise at det kvadratiske diagrammet til venstre kommuterer. Velg derfor et punkt $[q,v]$ øverst til venstre, i $E' = AR(E) = P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m$. Avbilder først $[q,v]$ til $f([q,v]) = \bar{q}(v)$ i E, og anvender deretter Φ. Altså avbildes $[q,v]$ på $\Phi_x\big(\bar{q}(v)\big) = \big(\Phi_x \circ \bar{q}\big)(v) \in E$.

Skal nå anvende Φ' på $[q,v]$, og deretter følge på med avbildningen f inn i E. Da blir $[q,v]$ først avbildet på $\Phi'([q,v]) = [q, \phi(q)v] \in P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m$, og videre inn i E, til $\bar{q}\big(\phi(q)v\big) = \big(\bar{q} \circ \phi(q)\big)(v)$. Definisjonen av R viser at $\phi(q) = \bar{q}^{-1} \circ \Phi_x \circ \bar{q}$, men da er $\bar{q} \circ \phi(q) = \Phi_x \circ \bar{q}$.

Også det triangulære diagrammet ovenfor til høyre kommuterer, for velg $[q,v] \in P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m$. På den ene side er da $p'([q,v]) = \pi(q) = x \in B$, mens på den annen side er $p \circ f([q,v]) = p\big(\bar{q}(v)\big) = x \in B$.

Dette viser at diagrammene ovenfor kommuterer, slik at resultatet av å anvende AR er isomorft med å anvende identitetsfunktoren, via en isomorfi $f : AR \to \mathrm{id}_{\mathcal{VA}}$. $\square$

Lemma 5.2. *Sammensetningen* $R \circ A : \mathcal{P}_{\mathrm{u}} \to \mathcal{P}_{\mathrm{u}}$ *er naturlig isomorf med identitetsfunktoren* $\mathrm{id}_{\mathcal{P}_{\mathrm{u}}}$ *på* $\mathcal{P}_{\mathrm{u}}$.

Bevis. La $\big(\pi : P \to B, \phi : P \to U(m)^{\mathrm{ad}}\big)$ være et objekt i $\mathcal{P}_{\mathrm{u}}$. Anvender A og får et objekt $(p : E \to B, \Phi : E \to E)$ i $\mathcal{VA}$, der $E = P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m$ og $\Phi_x([q,v]) = [q, \phi(q) \cdot v]$. Anvender så R og får et objekt $\big(\pi' : P' \to B, \phi' : P' \to U(m)^{\mathrm{ad}}\big)$ i $\mathcal{P}_{\mathrm{u}}$, der P' er rammebunten til E og $\phi'(q') = \bar{q'}^{-1} \circ \Phi_x \circ \bar{q'}$ for $q' \in P$. Gitt et element $q' \in P'$ kan dette, som nevnt tidligere, oppfattes som en avbildning $\bar{q'} : \mathbb{C}^m \to E = P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m$ der hver $v \in \mathbb{C}^m$ tas til en ekvivalensklasse $[q,v] \in P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m$. Dette gjør det mulig å definere en morfi mellom objektene $\big(\pi : P \to B, \phi : P \to U(m)^{\mathrm{ad}}\big)$ og $\big(\pi' : P' \to B, \phi' : P' \to U(m)^{\mathrm{ad}}\big)$ ved å la $f : P \to P'$ sende $q \in P$ til et element $q' \in P'$ bestemt ved at $q' \in P'$ skal være ekvivalent med den unitære avbildningen $\bar{q'} : \mathbb{C}^m \to E$ gitt ved $\bar{q'}(v) = [q,v]$ og $\pi'(q') = \pi(q)$.

For $q \in P$ med $\pi(q) = x \in B$ blir $\pi' \circ f(q) = \pi'(q') = x$.

Og $\phi' \circ f(q) = \phi'(q') = \bar{q}'^{-1} \circ \Phi_x \circ \bar{q}'$ slik at $\phi' \circ f(q)(v) = \bar{q}'^{-1} \circ \Phi_x \circ \bar{q}'(v) = \bar{q}'^{-1} \circ \Phi_x([q, v]) = \bar{q}'^{-1}[q, \phi(q) \cdot v] = \phi(q)(v)$ siden $\bar{q}'([q, v]) = [q, \phi(q) \cdot v]$. Så f er virkelig en morfi i kategorien $\mathcal{P}_{\mathrm{u}}$.

Morfien $f : P \to P'$ blir surjektiv, for gitt et element i $q' \in P'$ kan dette oppfattes som en avbildning $\mathbb{C}^m \to E = P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m$ gitt ved $v \mapsto [q, v]$. Og på grunn av kvotientavbildningen $P \times \mathbb{C}^m \to P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m$ gitt ved at (q, v) sendes til $[q, v]$, ekvivalensklassen til (q, v) i $P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m$, kan ekvivalensklassen $[q, v]$ alltid representeres av $(q, uv) \in P \times \mathbb{C}^m$ for en $u \in U(m)$. Da er $q \in P$ slik at $f(q) = q' \in P'$, og f er surjektiv.

La nå q_1 og q_2 være to punkter i P slik at $f(q_1) = f(q_2)$. Det betyr at det finnes punkter $q_1', q_2' \in P'$ slik at $\bar{q}_1'(v) = \bar{q}_2'(v)$ for alle $v \in \mathbb{C}^m$. Med andre ord er $[q_1, v] = [q_2, v]$ for alle $v \in \mathbb{C}^m$. Spesielt er $[q_1, 0] = [q_2, 0]$. Konklusjonen blir $q_1 = q_2$ slik at morfien f er injektiv.

Dette viser at $R \circ A$ er naturlig isomorf med identitetsfunktoren via en isomorfi $f : \mathrm{id}_{\mathcal{P}_{\mathrm{u}}} \to RA$. □

Nå må funktoren D beskrives. La $(\pi : P \to B, \psi : P \to S^1)$ være et objekt i $\mathcal{P}_{\mathrm{s}}$. Da skal D ta prinsipalbunten $P \to B$ til en assosiert vektorbunt $P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m \to B$, og dele ut med virkningen av $U(m)$ på $U(m)$-avbildningen $\psi : P \to S^1$. Da fås en indusert avbildning

$$\Psi : B \to S^1$$

siden $P/U(m) \cong B$ og $S^1/U(m) \cong S^1$.

Til slutt skal L beskrives. Velg et objekt $(p : E \to B, \Psi : B \to S^1)$ i $\mathcal{B}_{\mathrm{s}}$. Funktoren L skal da ta $E \to B$ til sin tilhørende prinsipalbunt $\pi : P \to B$, mens Ψ tas til sammensetningen $\psi = \Psi \circ \pi : P \to S^1$.

Lemma 5.3. *Sammensetningen* $D \circ L : \mathcal{B}_{\mathrm{s}} \to \mathcal{B}_{\mathrm{s}}$ *er isomorf med identitets-funktoren* $\mathrm{id}_{\mathcal{B}_{\mathrm{s}}}$ *på* $\mathcal{B}_{\mathrm{s}}$.

Bevis. Start med et objekt $(p : E \to B, \Psi : B \to S^1)$ i $\mathcal{B}_{\mathrm{s}}$. Ved å anvende funktoren L fås et objekt $(\pi : P \to B, \psi : P \to S^1)$ i $\mathcal{P}_{\mathrm{s}}$, der P er prinsipal-bunten til E og $\psi = \Psi \circ \pi$. Anvender deretter D, slik at $p : E \to B$ tas til sin assosierte vektorbunt $P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m \to B$. Samtidig brukes $\psi = \Psi \circ \pi$ til å in-dusere en avbildning $B \to S^1$ ved å dele ut med virkningen av $U(m)$. Avbild-ningen som da fremkommer, er nettopp den første avbildningen $\Psi : B \to S^1$.

Klart at $D \circ L$ er isomorf med identitetsfunktoren på $\mathcal{B}_{\mathrm{s}}$. □

Lemma 5.4. *Sammensetningen* $L \circ D : \mathcal{P}_{\mathrm{s}} \to \mathcal{P}_{\mathrm{s}}$ *er isomorf med identitets-funktoren* $\mathrm{id}_{\mathcal{P}_{\mathrm{s}}}$ *på* $\mathcal{P}_{\mathrm{s}}$.

Bevis. Velg først et objekt $(\pi : P \to B, \psi : P \to S^1)$ i $\mathcal{P}_{\mathrm{s}}$. Bruker D, og får et objekt $(p : E \to B, \Psi : B \to S^1)$ i $\mathcal{B}_{\mathrm{s}}$, der $E = P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m$ og Ψ er orbitavbildningen $\psi/U(m)$.

Anvender deretter L på objektet $(p : E \to B, \Psi : B \to S^1)$, og får $(\pi' : P' \to B, \psi' : P' \to S^1)$ i $\mathcal{P}_s$ der $\psi' = \Psi \circ \pi'$. En isomorfi $f : P \to P'$ følger fra beviset av lemma 5.2, og det gjenstår bare å vise at følgende diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f", "\cong"'] \arrow[d, "\psi"'] & P' \arrow[d, "\psi'"] \\ S^1 \arrow[r, equal] & S^1 \end{tikzcd}$$

Velg først et element q i øverste venstre hjørne P. Den vertikale avbildningen ψ sender q til $\psi(q) \in S^1$.

På den annen side sendes q ved den horisontale homeomorfien $f : P \to P'$ til et element $f(q) = q' \in P'$. Ved å sette $x = \pi(q)$ og anvende ψ', fås

$$\begin{aligned} \psi' \circ f(q) &= \Psi \circ \pi'(q') \\ &= \Psi(x) \quad \text{siden } \pi'(q') = x \\ &= \big(\psi / U(m)\big)(x) \\ &= \psi(q) \end{aligned}$$

siden q er en representant for x når x oppfattes som en ekvivalensklasse i orbitrommet $P/U(m) \cong B$.

Altså er $L \circ D$ isomorf med identitetsfunktoren på $\mathcal{P}_s$. $\square$

Proposisjon 5.5. *Med notasjon som over gir funktorene A, R, D og L en en-til-en-korrespondanse mellom isomorfiklasser av henholdsvis vektorbunter $p : E \to B$ sammen med vektorbuntautomorfier $\Phi : E \to E$, og prinsipalbunter $\pi : P \to B$ sammen med $U(m)$-avbildninger $\phi : P \to U(m)^{\mathrm{ad}}$, på en slik måte at $\Psi = \det(\Phi)$ hvis og bare hvis $\psi = \det \circ \phi$.*

Bevis. En en-til-en-korrespondanse mellom isomorfiklasser av henholdsvis vektorbunter $p : E \to B$ sammen med vektorbuntautomorfier $\Phi : E \to E$, og prinsipalbunter $\pi : P \to B$ sammen med $U(m)$-avbildninger $\phi : P \to U(m)^{\mathrm{ad}}$, bør være klar. Det som krever utfyllende kommentarer, er utsagnet om at $\Psi = \det(\Phi)$ hvis og bare hvis $\psi = \det \circ \phi$.

Anta først at en vektorbunt $p : E \to B$ og en avbildning $\Psi : B \to S^1$ er gitt, og anta at det finnes en vektorbuntautomorfi $\Phi : E \to E$ slik at $\Psi = \det(\Phi)$. Da kan disse oppfattes som objekter $(p : E \to B, \Phi : E \to E)$ og $(p : E \to B, \Psi : B \to S^1)$ i henholdsvis kategoriene $\mathcal{VA}$ og $\mathcal{B}_s$. Nå kan funktorene R og L anvendes på disse objektene, og da fremkommer objekter $\big(\pi : P \to B, \psi : P \to U(m)^{\mathrm{ad}}\big)$ og $(\pi : P \to B, \psi : B \to S^1)$ i henholdsvis $\mathcal{P}_u$ og $\mathcal{P}_s$, der $\psi = \Psi \circ \pi$. Dette gir

$$\begin{aligned} \psi(q) = \Psi \circ \pi(q) = \Psi(x) &= \det(\Phi_x) \\ &= \det(\bar{q} \circ \phi(q) \circ \bar{q}^{-1}) = \det \phi(q) \\ &= \big(\det \circ \phi\big)(q), \end{aligned}$$

slik at $\psi = \det \circ \phi$.

Anta så at en prinsipalbunt $\pi : P \to B$ og en $U(m)$-avbildning $\phi : P \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ er gitt. Anta videre at det finnes en $U(m)$-avbildning $\psi : P \to S^1$ slik at $\psi = \det \circ \phi$. Ved å se at dette er objekter $\big(\pi : P \to B, \phi : P \to U(m)^{\mathrm{ad}}\big)$ og $(\pi : P \to B, \psi : P \to S^1)$ i henholdsvis kategoriene $\mathcal{P}_{\mathrm{u}}$ og $\mathcal{P}_{\mathrm{s}}$, kan funktorene A og D anvendes. Da fås objekter $(p : P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m \to B, \Phi : P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m \to P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m)$ og $(p : P \times_{U(m)} \mathbb{C}^m \to B, \Psi : B \to S^1)$ i $\mathcal{VA}$ og $\mathcal{B}_{\mathrm{s}}$, der Ψ er den induserte avbildningen

$$\Psi = \big(\psi / U(m)\big) : B \cong P / U(m) \to S^1 \cong S^1 / U(m).$$

Dette betyr at $\Psi \circ \pi = \psi$, så når $x = \pi(q)$ for $x \in B$ og $q \in P$, blir

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \Psi \circ \pi(q) = \psi(q) = \det \circ \phi(q) \\ &= \det(\bar{q}^{-1} \circ \Phi_x \circ \bar{q}) = \det(\Phi_x) \\ &= \det(\Phi)(x), \end{aligned}$$

altså $\Psi = \det(\Phi)$. $\square$

Omskrivningen i denne seksjonen viser at det komplekse problemet på side 14, og det hermitiske på side 15, er ekvivalent med et problem formulert med prinsipalbunter og avbildninger inn i $U(m)^{\mathrm{ad}}$:

Problem 5.6 (Prinsipalbuntversjon). Gitt en prinsipalbunt $P \to B$ og en $U(m)$-avbildning $\psi : P \to S^1$, finnes da en $U(m)$-avbildning $\psi : P \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ slik at $\psi = \det \circ \phi$?

5.2 Et eksempel formulert med en prinsipalbunt

I kapittel 4 nevnes eksempler på hva som kan skje hvis bunten splitter av en passende underbunt eller ψ har en m-te rot. I denne seksjonen behandles et eksempel der ψ kan skrives som determinanten til en buntautomorfi, men *uten* å være i noen av de nevnte tilfellene.

Siden $E\,U(m) \times U(m)^{\mathrm{ad}}$ er et $U(m)$-rom, er det mulig å dele ut med virkningen av $U(m)$. Resultatet er en $U(m)$-prinsipalbunt $U(m) \to E\,U(m) \times U(m)^{\mathrm{ad}} \to E\,U(m) \times_{U(m)} U(m)^{\mathrm{ad}}$, og passer inn i et diagram

$$\begin{tikzcd} E\,U(m) \times U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[rr, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d] & & U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[d, "\det"] \\ E\,U(m) \times_{U(m)} U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[r, "\mathrm{id} \times \det"'] & E\,U(m) \times_{U(m)} S^1 \cong B\,U(m) \times S^1 \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

av $U(m)$-avbildninger som opplagt kommuterer. La nå ψ være sammensetningen langs venstre søyle og nederste rad, mens avbildningen ϕ er lik pr_2

langs øverste rad. Slik dette er definert, blir $\psi = \det \circ \phi$. Påstanden er at $\psi \neq \rho^m$ for alle $m \geq 2$ og alle avbildninger $\rho : E\,U(m) \times U(m)^{\mathrm{ad}} \to S^1$.

Anta at $\psi = \rho^m$ for en avbildning $\rho : E\,U(m) \times U(m)^{\mathrm{ad}} \to S^1$. Da finnes et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd}
E\,U(m) \times U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[r, "\phi = \mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, "\rho^m"] & U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[d, "\det"] \\
S^1 \arrow[r, "m"'] & S^1
\end{tikzcd}$$

konstruert slik at $\rho^m = m \circ \rho$. Her induserer begge avbildningene $\phi = \mathrm{pr}_2$ og det isomorfier på π_1. Men da blir også $\rho^m = m \circ \rho$ en isomorfi på π_1, og det er en motsigelse siden avbildningen merket m blir multiplikasjon med $m \geq 2$ på den ikke-trivielle gruppen $\pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$. Dermed er det klart at $\psi \neq \rho^m$ for alle $m \geq 2$ og alle avbildninger $\rho : E\,U(m) \times U(m)^{\mathrm{ad}} \to S^1$.

5.3 Utledning av universelt løftningsproblem

Etter omskrivningen i seksjon 5.1 er det opprinnelige problemet blitt til et løftningsproblem

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, dotted, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[d, "\det"] \\
 & S^1
\end{tikzcd} \tag{5.2}$$

der alle avbildningene er $U(m)$-avbildninger. Samtidig finnes avbildninger g og $\hat{g}$, entydige opp til homotopi, slik at følgende diagram er et pullbackdiagram:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\hat{g}"] \arrow[d] & E\,U(m) \arrow[d] \\
B \arrow[r, "g"] & B\,U(m)
\end{tikzcd} \tag{5.3}$$

De to $U(m)$-avbildningene ψ og $\hat{g}$ definert på P, kan nå oppfattes som en $U(m)$-avbildning $(\hat{g}, \psi)$ av P inn i produktet $E\,U(m) \times S^1$. På denne måten gir diagrammene (5.2) og (5.3) et nytt:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, dotted] \arrow[dr, "(\hat{g},\psi)"'] & E\,U(m) \times U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[d, "\mathrm{id} \times \det"] \\
 & E\,U(m) \times S^1
\end{tikzcd} \tag{5.4}$$

Nå er løftningsproblemet i dette diagrammet ekvivalent med det første:

Lemma 5.7. *Løftningsproblemene* (5.2) *og* (5.4) *er ekvivalente.*

Bevis. Anta at det finnes en løsning ϕ av (5.2). La første faktor i løsningen av (5.4) være første faktor $\hat{g}$ i avbildningen $(\hat{g}, \psi)$. Bruk ϕ som løftningens annen faktor. Da fås en løftning $(\hat{g}, \phi)$ av $(\hat{g}, \psi)$ i (5.4).

Anta nå at (5.4) har en løsning. Siden fibreringen er nettopp produktet $\mathrm{id} \times \det$, fås en løsning av (5.2) ved å projisere på annen faktor. $\square$

Dette leder til følgende diagram av $U(m)$-avbildninger, der kommutativiteten er opplagt:

$$\begin{tikzcd}
 & & E\,U(m) \times S^1 \arrow[r, dotted] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & E\,U(m) \times U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[d, "\mathrm{id}\times\det"] \\
P \arrow[urr, "(\hat{g},\psi)"] \arrow[r, dotted] \arrow[dr, "(\hat{g},\psi)"'] & E\,U(m) \times U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[urr, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\det"] & & E\,U(m) \times S^1 \\
 & E\,U(m) \times S^1 \arrow[urr, "\mathrm{id}"] & &
\end{tikzcd}$$

Hvis nå $(\hat{g}, \psi)$ i dette siste diagrammet løfter til en $U(m)$-avbildning over $\mathrm{id} \times \det : E\,U(m) \times U(m)^{\mathrm{ad}} \to E\,U(m) \times S^1$ for alle prinsipalbunter P, så løfter $(\hat{g}, \psi)$ spesielt når $P = E\,U(m) \times S^1$. I så fall har fibreringen $\mathrm{id} \times \det$ en $U(m)$-seksjon. Og omvendt, hvis $\mathrm{id} \times \det : E\,U(m) \times U(m)^{\mathrm{ad}} \to E\,U(m) \times S^1$ har en $U(m)$-seksjon, så kan denne brukes for alle P til å løfte $(\hat{g}, \psi)$ over $\mathrm{id} \times \det$ til en $U(m)$-avbildning $P \to E\,U(m) \times U(m)^{\mathrm{ad}}$.

Så spørsmålet om $U(m)$-avbildningen $(\hat{g}, \psi)$ løfter for alle P, er ekvivalent med spørsmålet om $\mathrm{id} \times \det$ har noen $U(m)$-seksjon. Altså blir følgende løftningsproblem interessant:

$$\begin{tikzcd}
E\,U(m) \times S^1 \arrow[r, dotted] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & E\,U(m) \times U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[d, "\mathrm{id}\times\det"] \\
 & E\,U(m) \times S^1
\end{tikzcd}$$

Siden diagrammet skal kommutere, $U(m)$-avbildningen merket id er identitetsavbildningen og den vertikale $U(m)$-avbildningen er $\mathrm{id} \times \det$, så må den horisontale $U(m)$-avbildningen, det vil si løftningen, være identitetsavbildningen på første faktor. Men da er det nok å se på annen faktor i et diagram

$$\begin{tikzcd}
E\,U(m) \times S^1 \arrow[r, dotted] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[d, "\det"] \\
 & S^1
\end{tikzcd} \tag{5.5}$$

på samme form som diagram (5.2); la $P = E\,U(m) \times S^1$ være prinsipalbunten med basisrom $B = B\,U(m) \times S^1$. Dette er et universelt løftningsproblem, for hvis løftningsproblemet i diagram (5.5) har en løsning, så vil ethvert løftningsproblem på samme form som i diagram (5.2) ha en løsning.

Nå er det klart [3, side 35] at adjungsjonen

$$\mathrm{Map}(X \times Y, Z) \to \mathrm{Map}\big(X, \mathrm{Map}(Y, Z)\big)$$

der X, Y og Z er $U(m)$-rom, medfører at både løftnings-$U(m)$-avbildningen $E\,U(m) \times S^1 \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ og avbildningen $\mathrm{pr}_2 : E\,U(m) \times S^1 \to S^1$ er ekvivalente med henholdsvis

$$S^1 \to \mathrm{Map}\big(E\,U(m), U(m)^{\mathrm{ad}}\big) \quad \text{og} \quad S^1 \to \mathrm{Map}\big(E\,U(m), S^1\big).$$

På denne måten blir diagrammet (5.5) ekvivalent med et nytt

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Map}\big(E\,U(m), U(m)^{\mathrm{ad}}\big) \arrow[d, "\det_\sharp"] \\
S^1 \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \mathrm{Map}\big(E\,U(m), S^1\big)
\end{tikzcd}$$

der den horisontale avbildningen sender hvert punkt $\lambda \in S^1$ til den konstante avbildningen i $\mathrm{Map}\big(E\,U(m), S^1\big)$ gitt ved $e \mapsto \lambda \in S^1$ for alle $e \in E\,U(m)$, og hvor $\det_\sharp$ er postkomponering med determinantavbildningen. Ved å ta $U(m)$-fikspunkter overalt, og huske at $U(m)$ virker trivielt på S^1, fås endelig:

$$\begin{tikzcd}
 & \big[U(m)^{\mathrm{ad}}\big]^{h\,U(m)} \arrow[d, "\det_\sharp"] \\
S^1 \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & (S^1)^{h\,U(m)}
\end{tikzcd} \tag{5.6}$$

Hvis den stiplede avbildningen ikke eksisterer, så eksisterer det heller ikke noen løftning $\phi : P \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ for alle P i diagram (5.2).

Nå viser det seg, at løftningsproblemet i diagram (5.6) kan svekkes slik:

$$\begin{tikzcd}
 & \big[U(m)^{\mathrm{ad}}\big]^{h\,U(m)} \arrow[d, "\det_\sharp"] \\
S^1 \arrow[r, "\text{konst.}"] \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, equal] & (S^1)^{h\,U(m)} \arrow[d, "\mathrm{eval}"] \\
 & S^1
\end{tikzcd}$$

Utvidelsen i forhold til diagram (5.6) består i å følge på med evalueringsavbildningen $(S^1)^{h\,U(m)} \to S^1$. Denne utvidelsen kommuterer, for gitt et element $\lambda \in S^1$ lengst til venstre vil dette elementet sendes til et punkt i

$(S^1)^{h\,U(m)} \cong \mathrm{Map}\big(E\,U(m), S^1\big)^{h\,U(m)}$ som under evalueringsavbildningen vil sendes til $\lambda \in S^1$.

Dette betyr at hvis det ikke finnes noen løftning her i det ytre trianglet, så finnes det ingen løftning i diagram (5.6). Neste kapittel svekker dette løftningsproblemet enda litt mer.

Kapittel 6

Analyse av det universelle løftningsproblemet

Notasjon. I hele dette kapitlet er det nyttig å bruke forkortelsene $X = U(m)^{\mathrm{ad}}$ og $\Gamma = U(m)$.

6.1 Nilpotente rom og komplettering

Starter med noen standarddefinisjoner, for en stor del hentet fra [1].

Definisjon 6.1. En virkning av en gruppe G på en gruppe H kalles en ***nilpotent virkning*** hvis det finnes en endelig følge

$$H = H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_i \supset H_{i+1} \supset \cdots \supset H_k = *$$

av undergrupper i H slik at undergruppen H_i er lukket under virkningen av G, at undergruppen H_{i+1} er normal i H_i, at kvotientgruppen H_i/H_{i+1} er abelsk, og at den induserte virkningen på H_i/H_{i+1} er triviell, for alle $i = 1, 2, \ldots, k$.

Definisjon 6.2. Et sammenhengende rom Z med basispunkt z_0 kalles et ***nilpotent rom*** hvis virkningen av fundamentalgruppen $\pi_1(Z, z_0)$ på alle homotopigruppene $\pi_i(Z, z_0)$ er nilpotent for $i = 1, 2, \ldots$.

Her skal virkningen av fundamentalgruppen på alle homotopigruppene være den vanlige virkningen av $\pi_1(Z, z_0)$ på $\pi_i(Z, z_0)$ for $i = 1, 2, \ldots$ som definert i [4, kapittel 4a].

Gitt et rom Z, er det mulig å definere Bousfield-Kan-kompletteringen $R_\infty Z$ for en ring R. Hvis p er et primtall og $R = \mathbb{F}_p$, fås p-kompletteringen til Z, som ofte skrives $Z_p^\wedge$, og det finnes alltid en kompletteringsavbildning $\kappa : Z \to Z_p^\wedge$ fra Z inn i sin p-komplettering $Z_p^\wedge$.

Hvis nå Z er et H-rom så finnes det et resultat [8, III.4.18] som gir at fundamentalgruppen til Z virker trivielt på homotopigruppene til Z, slik at

Z er nilpotent. Og nå viser Bousfield og Kan [1] at for nilpotente rom Z induserer κ en isomorfi $\tilde{H}_*(Z;\mathbb{F}_p) \cong \tilde{H}_*(Z^{\wedge}_p;\mathbb{F}_p)$ på mod-p-homologi. Rommene S^1, $X = U(m)^{\mathrm{ad}}$ og $X^G = [U(m)^{\mathrm{ad}}]^G$ for undergrupper G i Γ er alle eksempler på H-rom. Identitetsmatrisen fungerer som det tosidige identitetselementet i de to siste tilfellene, mens $1 = e^0 \in \mathbb{C}$ er identitetselementet for $S^1 \subset \mathbb{C}$.

I kapittel II i Carlssons artikkel [2] innføres en funktor S som en slags ekvivariant utgave av kompletteringsfunktoren R. Carlsson viser egenskaper som at det finnes en svak homotopiekvivalens $S_\infty Z \to R_\infty Z$, og at S oppfyller likheten $(S_\infty Z)^G = S_\infty(Z^G)$.

6.2 Utledning av en motsigelse

Forrige kapittel viste at det opprinnelige problemet formulert i kapitlene 2 og 3 var ekvivalent med et løftningsproblem, og at dette ikke var løsbart hvis identitetsavbildningen $\mathrm{id} : S^1 \to S^1$ i diagrammet

$$\begin{tikzcd} & X^{h\Gamma} \arrow[d] \\ S^1 \arrow[ur, dotted, "s"] \arrow[r, equal] & S^1 \end{tikzcd}$$

ikke kunne løftes til en $U(m)$-avbildning $s : S^1 \to X^{h\Gamma}$. Her er $X^{h\Gamma} \to S^1$ lik sammensetningen

$$X^{h\Gamma} \xrightarrow{\det_\sharp} (S^1)^{h\Gamma} \xrightarrow{\mathrm{eval}} S^1$$

som er lik sammensetningen

$$X^{h\Gamma} \xrightarrow{\mathrm{eval}} X \xrightarrow{\det} S^1.$$

For alle undergrupper $G \subset \Gamma$ finnes en $U(m)$-avbildning $i : X^{h\Gamma} \to X^{hG}$. Denne informasjonen kan settes opp i et kommutativt diagram:

$$\begin{tikzcd} X^{h\Gamma} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{eval}"] & X^{hG} \arrow[d, "\mathrm{eval}"'] \\ X \arrow[r, equal] \arrow[d, "\det"] & X \arrow[d, "\det"'] \\ S^1 \arrow[r, equal] \arrow[uu, dotted, bend left, "s"] & S^1 \arrow[uu, dotted, bend right, "\sigma"'] \end{tikzcd} \tag{6.1}$$

Hvis nå $U(m)$-seksjonen s eksisterer, kan σ defineres som $\sigma = i \circ s$. Så hvis ikke σ eksisterer, så kan heller ikke s eksistere. Målet blir å vise at $U(m)$-seksjonen $\sigma : S^1 \to X^{hG}$ ikke eksisterer.

Lemma 6.3. *Det finnes en naturlig transformasjon mellom kofunktorene* $\mathrm{Map}(-, X)^G$ *og* $\mathrm{Map}(-, X_p^\wedge)^G$.

Bevis. Kall den naturlige transformasjonen for τ. Gitt et rom Z, la $f \in \mathrm{Map}(Z, X)^G$. Da skal τf være sammensetningen

$$Z \xrightarrow{f} X \xrightarrow{\kappa} X_p^\wedge.$$

Ved å bruke at kompletteringsavbildningen $\kappa : X \to X_p^\wedge$ er en Γ-avbildning vil da en avbildning $Y \to Z$ gi opphav til et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(Z, X)^G & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{Map}(Z, X_p^\wedge)^G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}(Y, X)^G & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{Map}(Y, X_p^\wedge)^G \end{array}$$

der de vertikale avbildningene er indusert av $Y \to Z$. □

Videre vil homeomorfiene

$$\begin{aligned} \mathrm{Map}(*, Z)^G &\cong Z^G, \\ \mathrm{Map}(EG, Z)^G &\cong Z^{hG} \quad \text{og} \\ \mathrm{Map}(G, Z)^G &\cong Z \end{aligned}$$

være nyttige.

Ved å anvende $\mathrm{Map}(-, X)^G$ og $\mathrm{Map}(-, X_p^\wedge)^G$ på $G \to EG \to *$, og bruke den naturlige transformasjonen i lemma 6.3, fås et diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(*, X)^G & \longrightarrow & \mathrm{Map}(*, X_p^\wedge)^G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}(EG, X)^G & \longrightarrow & \mathrm{Map}(EG, X_p^\wedge)^G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}(G, X)^G & \longrightarrow & \mathrm{Map}(G, X_p^\wedge)^G \end{array} \tag{6.2}$$

der nederste pil i venstre kolonne er sammenfallende med øverste pil i høyre kolonne i diagram (6.1). Ved hjelp av diagrammene (6.1) og (6.2) fås følgende kommutative diagram

$$\begin{tikzcd}
X^G \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & (X^{\wedge}_p)^G \arrow[d] \\
X^{hG} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & (X^{\wedge}_p)^{hG} \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "z"] \\
X \arrow[r] \arrow[d, "\det"] & X^{\wedge}_p \arrow[d, "\det^{\wedge}_p"'] \\
S^1 \arrow[r, "\kappa"] \arrow[uu, bend left, dotted, "\sigma"] & \left(S^1\right)^{\wedge}_p
\end{tikzcd} \tag{6.3}$$

der z er sammensetningen av de to vertikale avbildningene fra $(X^{\wedge}_p)^{hG}$ til $X^{\wedge}_p$ og videre til $\left(S^1\right)^{\wedge}_p$.

Notasjon. Anta at p er valgt slik at p deler m, altså $m = p \cdot q$ for en $q \in \mathbb{N}$. For beviset av følgende lemma er det nyttig å skrive $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ for diagonalmatrisen med $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in S^1$ langs diagonalen:

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

Med symbolet Σ_m menes den symmetriske gruppen på m bokstaver.

Lemma 6.4. *Hvis $m = p \cdot q$ for et primtall p og et heltall q, så finnes en endelig p-gruppe $G \subset \Gamma$ slik at det finnes en homeomorfi $(S^1)^q \to X^G$ gitt ved $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q) \mapsto \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1 \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{q-1}, \lambda_q, \ldots, \lambda_q)$ der hver λ_i for $i = 1, 2, \ldots, q$ gjentas p ganger på diagonalen i diagonalmatrisen.*

Bevis. La ρ være p-te enhetsrot $e^{2\pi i/p}$. Som en begynnelse på konstruksjonen av G, definér matriser $B_r \in \Gamma$ for $1 \leq r \leq m$ ved

$$B_r = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \rho, 1, \ldots, 1),$$

det vil si null vekk fra diagonalen, ettall langs diagonalen, men med ρ på r-te plass. Da blir $B_r^{-1} = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \rho^{-1}, 1, \ldots, 1)$, med ρ^{-1} på r-te plass.

Lar nå $A = (a_{ij}) \in X$, antar at $B_r \in \Gamma$ fikserer $A \in X$, og regner ut

$$B_r A B_r^{-1} = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \rho, 1, \ldots, 1) A \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \rho^{-1}, 1, \ldots, 1).$$

Skrevet kanskje litt omstendelig ut og med r oppfattet som fiksert, gir dette fire tilfeller:

$$(B_r A B_r^{-1})_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i = r, j = r \\ \rho a_{ij} & i = r, j \neq r \\ a_{ij} & i \neq r, j \neq r \\ \rho^{-1} a_{ij} & i \neq r, j = r \end{cases}$$

Ved å sammenligne matrisen $B_r A B_r^{-1}$ med A elementvis, fås ligningene

$$\rho a_{ij} = a_{ij} \quad \text{for} \quad \begin{cases} i = r, j \neq r \\ i \neq r, j = r \end{cases}$$

for $r = 1, 2, \ldots, m$. Nå kan r igjen oppfattes som vilkårlig valgt mellom 1 og m, og da følger det at $a_{ij} = 0$ for $i = r, j \neq r$ og $i \neq r, j = r$. Altså må A kunne skrives som en diagonalmatrise

$$A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}).$$

Siden hver B_r genererer en syklisk gruppe $C_p \subset \Gamma$ av orden p, så vil matrisene B_r generere en gruppe $C_p^m = C_p \times C_p \times \cdots \times C_p \subset \Gamma$, kartesisk produkt med m faktorer.

La nå G være det semidirekte produktet $G = C_p \ltimes C_p^m$. Mens faktoren $C_p^m \subset \Gamma$ er generert av matrisene B_r, så skal den første faktoren $C_p \subset \Sigma_m \subset \Gamma$ permutere syklisk blant p og p av faktorene i C_p^m:

$$\underbrace{C_p \times C_p \times \cdots \times C_p}_{\substack{p \text{ faktorer som} \\ \text{permuteres av } C_p}} \times \underbrace{C_p \times C_p \times \cdots \times C_p}_{\substack{p \text{ faktorer som} \\ \text{permuteres av } C_p}} \times \cdots \times \underbrace{C_p \times C_p \times \cdots \times C_p}_{\substack{p \text{ faktorer som} \\ \text{permuteres av } C_p}}$$

Spesielt virker en matrise i C_p på en matrise i C_p^m ved konjugasjon, slik at diagonalelementene permuteres.

Dette betyr at fikspunktmengden til X under virkningen av G blir mindre enn mengden av matriser på formen $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ der $\lambda_i \in S^1$ for $i = 1, 2, \ldots, m$. Fikspunktmengden X^G består nemlig av matrisene på formen

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{q-1}, \lambda_q, \ldots, \lambda_q),$$

der hver λ_i forekommer p ganger for $i = 1, 2, \ldots, q$. $\square$

Notasjon. Skal nå se på mod-p-homologi av diagram (6.3), og lar derfor $H_1 = H_1(-; \mathbb{F}_p)$.

Ser på følgende bit av diagram (6.3), skrevet litt tettere:

$$\begin{tikzcd} X^G \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & (X_p^\wedge)^G \arrow[d] \\ X^{hG} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\det"] & (X_p^\wedge)^{hG} \arrow[d, "z"] \\ S^1 \arrow[r, "\kappa"] \arrow[u, bend left, dotted, "\sigma"] & \left(S^1\right)_p^\wedge \end{tikzcd} \tag{6.4}$$

Her skal pilen merket det være å glemme fikspunkter og ta determinanten. Se på sammensetningen fra øverste venstre hjørne X^G til nederste høyre hjørne $\left(S^1\right)_p^\wedge$, via venstre søyle og nederste rad, på mod p-homologi. Siden S^1 er et H-rom, blir

$$\kappa : S^1 \to \left(S^1\right)_p^\wedge$$

en isomorfi på H_1. Så for å bestemme sammensetningen er det nok å vite hva som skjer i venstre søyle. Elementet $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$ i $X^G \cong (S^1)^q$ sendes via venstre søyle til $\lambda_1^p \lambda_2^p \cdots \lambda_q^p \in S^1$, så på H_1 vil $(a_1, a_2, \ldots, a_q) \in H_1 X^G \cong \oplus^q \mathbb{F}_p$ sendes til $pa_1 + pa_2 + \cdots + pa_q = 0 \in H_1 S^1 \cong \mathbb{F}_p$. Da må også sammensetningen fra X^G til $\left(S^1\right)_p^\wedge$ via øverste rad og høyre søyle være null på H_1. Planen er å utlede en motsigelse ved å vise at denne siste sammensetningen er surjektiv.

Hvis σ er en $U(m)$-seksjon, så er $\det \circ \sigma = \mathrm{id}_{S^1}$. Da blir

$$\kappa \circ \det \circ \sigma = z \circ \tau \circ \sigma \quad \text{slik at} \quad \kappa = z \circ \tau \circ \sigma.$$

Nå var $\kappa : S^1 \to \left(S^1\right)_p^\wedge$ en isomorfi på H_1, så da blir $z \circ \tau \circ \sigma$ en isomorfi på H_1. Spesielt er z_* indusert av H_1 surjektiv.

I høyre søyle i diagram (6.4) er $(X_p^\wedge)^G \to (X_p^\wedge)^{hG}$ en isomorfi på H_1 ved Sullivan-formodningen, som vist av G. Carlsson i [2, VI.1].

Carlsson [2, II] viser at øverste rad $X^G \to (X_p^\wedge)^G$ faktoriserer gjennom $\left(X^G\right)_p^\wedge$ via flere avbildninger, slik:

$$\begin{aligned} X^G \xrightarrow{\kappa} \left(X^G\right)_p^\wedge = R_\infty(X^G) \xleftarrow{\simeq_w} S_\infty(X^G) \\ = (S_\infty X)^G \xrightarrow{\simeq_w} (R_\infty X)^G = (X_p^\wedge)^G \end{aligned}$$

Symbolet $\simeq_w$ skal her bety en svak homotopiekvivalens.

Til sammen gir dette at både $X^G \to (X_p^\wedge)^G$ og $(X_p^\wedge)^G \to (X_p^\wedge)^{hG}$ i diagram (6.4) er isomorfier på H_1. Så når sammensetningen langs øverste rad og høyre søyle skulle være null på H_1, så må $z : (X_p^\wedge)^{hG} \to \left(S^1\right)_p^\wedge$ være null på H_1. Og som nevnt tidligere blir z surjektiv på H_1 hvis $\sigma : S^1 \to X^{hG}$ eksisterer. Da er $z : (X^\wedge_p)^{hG} \to \big(S^1\big)^\wedge_p$ *både null og surjektiv* på H_1, mens

$$H_1\big((S^1)^\wedge_p; \mathbb{F}_p\big) \cong \mathbb{F}_p \neq 0$$

er ikke-triviell.

Nå som den annonserte motsigelsen er oppstått, er det klart at σ ikke kan eksistere. Løftningsproblemet (5.5) på side 30 er med andre ord ikke løsbart, og følgende teorem er bevist:

Teorem 6.5. *Det opprinnelige løftningsproblemet*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dotted, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[d, "\det"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

er ikke løsbart for $P = E\,U(m) \times S^1$ *og* $\psi = \mathrm{pr}_2$.

Altså, for vektorbunten $E(\gamma^m) \times S^1 \to B\,U(m) \times S^1$ og avbildningen $\Psi = \mathrm{pr}_2 : B\,U(m) \times S^1 \to S^1$, så finnes det ingen vektorbuntautomorfi $\Phi : E(\gamma^m) \times S^1 \to E(\gamma^m) \times S^1$ med egenskapen $\Psi = \det(\Phi)$.

Kapittel 7

Anvendelse av obstruksjonsteori

Seksjon 5.1 ender opp med problem 5.6, som var å finne en $U(m)$-avbildning $\phi : P \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ som løser løftningsproblem 5.2:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dotted, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[d, "\det"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

Nå er opplagt P et fritt $U(m)$-rom, og ved å for eksempel anta at basisrommet kan utstyres med struktur som et CW-kompleks kan P oppfattes som et fritt $U(m)$-CW-kompleks. Dette er ikke en sterk betingelse på basisrommet. Da er det mulig å finne en $U(m)$-avbildning $\phi_0 : P^{(0)} \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ fra 0-skjelettet $P^{(0)}$ til $U(m)^{\mathrm{ad}}$ slik at $\psi|_{P^{(0)}} = \det \circ \phi_0$. Videre kan ϕ_0 alltid utvides til en $U(m)$-avbildning ϕ_1 definert på 1-skjelettet $P^{(1)} \subset P$.

Målet blir å utlede en obstruksjon mot å utvide en $U(m)$-avbildning $\phi_n : P^{(n)} \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ med $\psi|_{P^{(n)}} = \det \circ \phi_n$ til en $U(m)$-avbildning ϕ_{n+1} definert på $P^{(n+1)}$ med $\psi|_{P^{(n+1)}} = \det \circ \phi_{n+1}$.

7.1 Utledning av obstruksjonskokjede

Denne seksjonen følger G. W. Whiteheads utledninger [8, side 291] anvendt på løftningsproblemet nevnt ovenfor, men beriket til den $U(m)$-ekvivariante situasjonen.

Å lage en $U(m)$-avbildning $\phi_0 : P^{(0)} \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ er lett. La $U(m) \times e^0_\alpha$ være en fri $U(m)$-0-celle i P. Da finnes det et punkt i inversbildet $\det^{-1} \psi(\{I\} \times e^0_\alpha)$ der $I \in U(m)$ er identitetsmatrisen, og ethvert valg av et punkt i inversbildet definerer en $U(m)$-avbildning $U(m) \times e^0_\alpha \to U(m)^{\mathrm{ad}}$. For alle $U(m)$-0-celler i P passer disse $U(m)$-avbildningene sammen til en delvis løftning $\phi_0 : P^{(0)} \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ av ψ, det vil si slik at $\psi|_{P^{(0)}} = \det \circ \phi_0$.

Nå er det nødvendig å utvide ϕ_0 til en $U(m)$-avbildning $\phi_1 : P^{(1)} \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ slik at $\psi|_{P^{(1)}} = \det \circ \phi_1$. La derfor $U(m) \times e^1_\alpha$ være en fri $U(m)$-1-celle i P med karakteristisk $U(m)$-avbildning

$$h_\alpha : \big(U(m) \times D^1_\alpha, U(m) \times \partial D^1_\alpha\big) \to (P^{(1)}, P^{(0)})$$

Da fås en indusert $U(m)$-vektorbunt q_α som vist i følgende pullback-diagram:

$$\begin{tikzcd}
U(m) \times D^1_\alpha \times_{S^1} U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[rrr] \arrow[d, "q_\alpha"'] & & & U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[d, "\det"] \\
U(m) \times D^1_\alpha \arrow[r, "h_\alpha"] & U(m) \times e^1_\alpha \arrow[r, hook] & P \arrow[r, "\psi"] & S^1
\end{tikzcd}$$

Her kan den karakteristiske $U(m)$-avbildningen h_α restrikteres til randen av basisrommet, det vil si til $U(m) \times \partial D^1_\alpha$. Ved å følge på med ϕ_0 er det klart at dette gir en $U(m)$-avbildning

$$\phi_0 \circ h_\alpha|_{U(m)\times \partial D^1_\alpha} : U(m) \times \partial D^1_\alpha \to U(m)^{\mathrm{ad}}$$

som definerer en delvis $U(m)$-seksjon $s_\alpha = \mathrm{id} \times (\phi_0 \circ h_\alpha|_{U(m)\times\partial D^1_\alpha})$ av q_α.

Siden $U(m)$-avbildninger $U(m) \times D^1_\alpha \to S^1$ er ekvivalente med avbildninger $D^1_\alpha \to S^1$, så vil $U(m)$-avbildningen $\psi \circ h_\alpha : U(m) \times D^1_\alpha \to S^1$ være ekvivalent med en avbildning $D^1_\alpha \to S^1$. Nå er D^1_α kontraktibel, så derfor blir vektorbunten $D^1_\alpha \times_{S^1} U(m)^{\mathrm{ad}} \to D^1_\alpha$ isomorf med den trivielle vektorbunten $D^1_\alpha \times SU(m)^{\mathrm{ad}} \to D^1_\alpha$ via en trivialisering $\theta_1' : D^1_\alpha \times SU(m)^{\mathrm{ad}} \to D^1_\alpha \times_{S^1} U(m)^{\mathrm{ad}}$. Dette passer inn i et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd}
 & U(m) \times D^1_\alpha & \\
U(m) \times D^1_\alpha \times_{S^1} U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[ur, "q_\alpha"] & & U(m) \times D^1_\alpha \times SU(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[ul, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[ll, "\theta_1"'] \\
 & D^1_\alpha \arrow[uu, hook] & \\
D^1_\alpha \times_{S^1} U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[uu, hook] \arrow[ur, "q'_\alpha"] & & D^1_\alpha \times SU(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[ul, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[ll, "\theta'_1"'] \arrow[uu, hook]
\end{tikzcd} \tag{7.1}$$

der trivialiseringen $\theta_1 : U(m) \times D^1_\alpha \times SU(m)^{\mathrm{ad}} \to U(m) \times D^1_\alpha \times_{S^1} U(m)^{\mathrm{ad}}$ er gitt ved

$$\begin{aligned}
\theta_1(u, x, s) &= \theta_1(u, x, u \cdot u^{-1} \cdot s) \\
&= u \cdot \theta_1(I, x, u^{-1} \cdot s) \\
&= u \cdot \big(I, \theta_1'(x, u^{-1} \cdot s)\big)
\end{aligned}$$

for $(u, x, s) \in U(m) \times D^1_\alpha \times SU(m)^{\mathrm{ad}}$, siden $U(m)$ virker trivielt på D^1_α.

Ved å bruke den globale trivialiseringen θ_1 kan den delvise $U(m)$-seksjonen $s_\alpha : U(m) \times \partial D^1_\alpha \to U(m) \times D^1_\alpha \times_{S^1} U(m)^{\mathrm{ad}}$ oppfattes som en delvis $U(m)$-seksjon

$$U(m) \times \partial D^1_\alpha \to U(m) \times D^1_\alpha \times SU(m)^{\mathrm{ad}}.$$

Denne er ekvivalent med en $U(m)$-avbildning inn i fiberen, $U(m) \times \partial D^1_\alpha \to SU(m)^{\mathrm{ad}}$, som er ekvivalent med en avbildning $\partial D^1_\alpha \to SU(m)^{\mathrm{ad}}$. Siden fiberen $SU(m)^{\mathrm{ad}}$ er 0-sammenhengende og $\partial D^1_\alpha \cong S^0$, så kan avbildningen $\partial D^1_\alpha \to SU(m)^{\mathrm{ad}}$ utvides over D^1_α til en avbildning $D^1_\alpha \to SU(m)^{\mathrm{ad}}$. Denne siste er da ekvivalent med en utvidende $U(m)$-avbildning

$$U(m) \times D^1_\alpha \to SU(m)^{\mathrm{ad}},$$

så ved å bruke den globale trivialiseringen θ_1 og deretter følge på med projeksjon på $U(m)^{\mathrm{ad}}$, fås en delvis løftning $U(m) \times D^1_\alpha \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ av $\psi|_{U(m)\times D^1_\alpha}$. For alle $U(m)$-1-celler i P vil disse delvise løftningene passe sammen og gi en delvis løftning

$$\phi_1 : P^{(1)} \to U(m)^{\mathrm{ad}}$$

av ψ som utvider ϕ_0.

Anta nå induktivt at det finnes en $U(m)$-avbildning $\phi_n : P^{(n)} \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ som er en delvis løftning av ψ. Da er målet å utvide ϕ_n til en $U(m)$-avbildning ϕ_{n+1} definert på $P^{(n+1)}$ slik at $\psi|_{P^{(n+1)}} = \det \circ \phi_{n+1}$. La $U(m) \times e^{n+1}_\alpha$ være en fri $U(m)$-$(n+1)$-celle i P med karakteristisk $U(m)$-avbildning

$$h_\alpha : \left(U(m) \times D^{n+1}_\alpha, U(m) \times \partial D^{n+1}_\alpha\right) \longrightarrow \left(P^{(n+1)}, P^{(n)}\right)$$

Nå definerer $\phi_n \circ h_\alpha|_{U(m)\times\partial D^{n+1}_\alpha}$ en delvis $U(m)$-seksjon

$$k_\alpha : U(m) \times \partial D^{n+1}_\alpha \longrightarrow U(m) \times D^{n+1}_\alpha \times_{S^1} U(m)^{\mathrm{ad}}$$

av $U(m)$-vektorbunten $q_\alpha : U(m) \times D^{n+1}_\alpha \times_{S^1} U(m)^{\mathrm{ad}} \to U(m) \times D^{n+1}_\alpha$ indusert av sammensetningen langs nederste rad i følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
U(m) \times D^{n+1}_\alpha \times_{S^1} U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[rrr] \arrow[d, "q_\alpha"'] & & & U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[d, "\det"] \\
U(m) \times D^{n+1}_\alpha \arrow[r, "h_\alpha"] & U(m) \times e^{n+1}_\alpha \subset P^{(n+1)} \subset P \arrow[rr, "\psi"] & & S^1
\end{tikzcd}$$

Argumentene bak diagram (7.1) gjelder også i dette tilfellet, og derfor finnes en homeomorfi $\theta_{n+1} : U(m) \times D^{n+1}_\alpha \times SU(m)^{\mathrm{ad}} \to U(m) \times D^{n+1}_\alpha \times_{S^1} U(m)^{\mathrm{ad}}$ som er en global trivialisering av $q_\alpha : U(m) \times D^{n+1}_\alpha \times_{S^1} U(m)^{\mathrm{ad}} \to U(m) \times D^{n+1}_\alpha$.

Så ved å bruke θ_{n+1} kan den delvise $U(m)$-seksjonen k_α oppfattes som en delvis $U(m)$-seksjon

$$U(m) \times \partial D_\alpha^{n+1} \to U(m) \times D_\alpha^{n+1} \times SU(m)^{\mathrm{ad}}$$

i den trivielle vektorbunten $U(m) \times D_\alpha^{n+1} \times SU(m)^{\mathrm{ad}} \to U(m) \times D_\alpha^{n+1}$, og dermed blir k_α ekvivalent med en $U(m)$-avbildning $U(m) \times \partial D_\alpha^{n+1} \to SU(m)^{\mathrm{ad}}$, som er ekvivalent med en avbildning $\partial D_\alpha^{n+1} \to SU(m)^{\mathrm{ad}}$. På denne måten blir k_α ekvivalent med et element i det lokale koeffisientsystemet $\psi^*\tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}$ i P, trukket tilbake fra det lokale koeffisientsystemet $\tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}$ i S^1. Dette elementet er entydig siden homotopi er en ekvivalensrelasjon og ekvivalensklasser er like eller disjunkte.

Nå er det klart fra tom Diecks bok [3, side 113] at $U(m)$-$(n+1)$-cellene i et $U(m)$-CW-kompleks P står i en-til-en-korrespondanse med generatorene for de $U(m)$-ekvivariante cellulære kjedegruppene

$$C_{n+1}^{U(m)}(P) = H_{n+1}(P^{(n+1)}, P^{(n)}).$$

Nå er disse kjedegruppene $\pi_0\, U(m)$-moduler, men $\pi_0\, U(m) = \{1\}$ er triviell. Altså defineres en funksjon fra $U(m)$-$(n+1)$-cellene i P, eller $C_{n+1}^{U(m)}(P)$, og til koeffisientsystemet $\psi^*\tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}$. Med andre ord en $(n+1)$-kokjede i kokomplekset

$$\begin{array}{llll}
\cdots & & & \\
\nwarrow & & & \\
C_{U(m)}^{n+2}\big(P; \psi^*\tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}\big) & & & \\
& \nwarrow & & \\
& C_{U(m)}^{n+1}\big(P; \psi^*\tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}\big) & & \\
& & \nwarrow & \\
& & C_{U(m)}^{n}\big(P; \psi^*\tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}\big) & \\
& & & \nwarrow \\
& & & \cdots
\end{array}$$

hvor

$$\begin{aligned}
C_{U(m)}^{n+1}\big(P; \psi^*\tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}\big) &= \mathrm{Hom}\big(C_{n+1}^{U(m)}(P), \psi^*\tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}\big) \\
&= \mathrm{Hom}\big(H_{n+1}(P^{(n+1)}, P^{(n)}), \psi^*\tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}\big).
\end{aligned}$$

Nå gir homomorfien

$$\pi_* : H_{n+1}(P^{(n+1)}, P^{(n)}) \to H_{n+1}(B^{(n+1)}, B^{(n)})$$

indusert av $\pi : P \to B \cong P/U(m)$ en en-til-en-korrespondanse mellom $U(m)$-$(n+1)$-cellene i P og $(n+1)$-cellene i B. Så for å komme fra (ekvivariant) kohomologi av P til kohomologi av basisrommet B, er det nødvendig å vise at følgende diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(P^{(n+1)}, P^{(n)}) \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "\pi_*"', "\cong"] & H_n(P^{(n)}, P^{(n-1)}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\pi_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(B^{(n+1)}, B^{(n)}) \arrow[r, "d_{n+1}"] & H_n(B^{(n)}, B^{(n-1)}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Her er $d_{n+1} : H_{n+1}(P^{(n+1)}, P^{(n)}) \to H_n(P^{(n)}, P^{(n-1)})$ som i Hatchers notasjon [4, kapittel 2.2] definert som den sammensatte homomorfien

$$H_{n+1}(P^{(n+1)}, P^{(n)}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n P^{(n)} \xrightarrow{j_n} H_n(P^{(n)}, P^{(n-1)})$$

der j_n er injektiv. Et element i $H_{n+1}(P^{(n+1)}, P^{(n)})$ er en homologiklasse som kan representeres av en $(n+1)$-kjede $\alpha \in C_{n+1}P^{(n+1)}$ med rand $\partial\alpha \in C_n P^{(n)}$. Siden $\alpha = \sum_i k_i \sigma_i$ for passende heltall k_i og $(n+1)$-simplekser $\sigma_i : \Delta^{n+1} \to P^{(n+1)}$, så er det nok å se på ett $(n+1)$-simpleks om gangen.

La $\sigma : \Delta^{n+1} \to P^{(n+1)}$ være et singulært $(n+1)$-simpleks. På kjedenivå blir da

$$\begin{aligned}
\pi_\sharp \partial(\sigma) &= \pi_\sharp \left(\sum_i (-1)^i \sigma \mid [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{n+1}] \right) \\
&= \sum_i (-1)^i (\pi \circ \sigma) \mid [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{n+1}] \\
&= \partial(\pi \circ \sigma) = \partial \pi_\sharp(\sigma)
\end{aligned}$$

der $j_n : H_n P^{(n)} \to H_n(P^{(n)}, P^{(n-1)})$ er utelatt fra notasjonen fordi den er en inklusjon. Dette viser at $\pi_* d_{n+1} = d_{n+1}\pi_*$ slik at π_* er en kjedeavbildning.

Til sammen fås en naturlig isomorfi mellom kjedekompleksene

$$\cdots \to C_{n+2}^{U(m)}(P) \to C_{n+1}^{U(m)}(P) \to C_n^{U(m)}(P) \to \cdots$$

og

$$\cdots \to C_{n+2}(B) \to C_{n+1}(B) \to C_n(B) \to \cdots,$$

slik at

$$\begin{aligned}
C^{n+1}_{U(m)}\big(P; \psi^* \tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}\big) &\cong \mathrm{Hom}_{U(m)}\big(C^{U(m)}_{n+1}(P), \pi^* \Psi^* \tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}\big) \\
&\cong \mathrm{Hom}\big(C_{n+1}(B), \Psi^* \tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}\big).
\end{aligned}$$

Nå er obstruksjonskokjeden en kosykel (se seksjon 7.3), og denne obstruksjonskosykelen ligger altså i kohomologien til basisrommet i grad $n+1$, det vil si i $H^{n+1}\big(B; \Psi^* \tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}\big)$.

7.2 Koeffisientsystemet er simpelt

Det finnes altså et lokalt koeffisientsystem $\tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}$ i S^1 som i eksempel 4 på side 258 i Whiteheads bok [8], og dette trekker tilbake ved ψ til et lokalt koeffisientsystem $\psi^*\tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}$ i P. Målet i denne seksjonen er å vise at $\psi^*\tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}$ er simpelt, men da er det nok å vise at $\tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}$ er simpelt.

For å vise at koeffisientsystemet er simpelt er det nødvendig å innføre litt notasjon [8, side 185]. La nå $p : E \to B$ være en fibrering og $u : I \to B$ en vei i B fra $b_0 = u(0)$ til $b_1 = u(1)$. La $F_t = p^{-1}\big(u(t)\big)$ for $t \in I$, og la $i_t : F_t \hookrightarrow E$ være inklusjonen av F_t inn i E for $t = 0, 1$.

Nå kalles en avbildning $h : F_1 \to F_0$ for ***u*-admisibel** hvis det finnes en homotopi $H : I \times F_1 \to E$ slik at $H|_{\{0\}\times F_1} = h$, $H|_{\{1\}\times F_1} = i_1$ og $p \circ H(t, x) = u(t)$ for alle $(t, x) \in I \times F_1$.

I samme referanse [8, IV.8] vises følgende lemma:

Lemma 7.1. *Hvis $c : I \to B$ er den konstante veien i $b_0 \in B$ så er identitetsavbildningen av F_0 en c-admisibel avbildning.*

Lemma 7.2. *La $u : I \to B$ og $v : I \to B$ være veier i B slik at $b_1 = u(0) = v(1)$, og la $w : I \to B$ være produktet av u og v. Hvis nå $h : F_1 \to F_0$ er u-admisibel og $k : F_2 \to F_1$ er v-admisibel, så vil $h \circ k : F_2 \to F_0$ være w-admisibel.*

Lemma 7.3. *Hvis $u_0, u_1 : I \to B$ er veier som er homotope relativt til randen ∂I, og $h_0, h_1 : F_1 \to F_0$ er avbildninger slik at h_t er u_t-admisibel for $t = 0, 1$, så er h_0 homotop med h_1.*

Dette betyr at for en fiksert vei $u : I \to B$ så vil alle u-admisible avbildninger $F_1 \to F_0$ være homotope.

Nå blir virkningen

$$\pi_1 S^1 \times \pi_n SU(m)^{\mathrm{ad}} \to \pi_n SU(m)^{\mathrm{ad}}$$

gitt ved

$$\big([u], [f : S^n \to SU(m)^{\mathrm{ad}}]\big) \mapsto [h \circ f : S^n \to SU(m)^{\mathrm{ad}}],$$

der $u : I \to S^1$ er en vei i S^1 som representerer en homotopiklasse $[u] \in \pi_1 S^1$, og h er en u-admisibel avbildning. Dette er altså ikke avhengig av valg av h.

Velg nå h som identiteten $\mathrm{id} : SU(m)^{\mathrm{ad}} \to SU(m)^{\mathrm{ad}}$, og la homotopien $H_k : I \times SU(m)^{\mathrm{ad}} \to SU(m)^{\mathrm{ad}}$ være gitt ved

$$H_k(t, x) = i(x) \cdot \tilde{u}(t)$$

der i er inklusjonen av $SU(m)^{\mathrm{ad}}$ inn i $U(m)^{\mathrm{ad}}$ mens

$$\tilde{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

(null vekk fra diagonalen). Nå blir $H_k(t,x) = i(x)$ når $t = 0, 1$, og det er klart at virkningen er triviell.

Med andre ord er $\psi^* \tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}$ isomorft med et konstant koeffisient-system $\underline{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}$, og er dermed et simpelt koeffisientsystem. Ved å bruke isomorfien $\pi_n SU(m)^{\mathrm{ad}} \cong \pi_n U(m)$ sammen med velkjente utregninger [6, kapittel 8.12], vil koeffisientsystemet for små verdier av m og n være gitt ved

$$\big(\underline{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}\big)(z) = \begin{cases} 0 & n = 0,1,2 \quad \text{og} \quad m \geq 1 \\ 0 & n = 3, m = 1 \\ \mathbb{Z} & n = 3, m \geq 2 \\ \pi_n\, SU(m) & n \geq 4 \quad \text{og} \quad m \geq 1 \end{cases}$$

for alle $z \in S^1$.

7.3 Konstruksjonen gir en kosykel

Det bør nevnes at denne konstruksjonen gir en kosykel. For å vise dette, er det greit å følge G. W. Whiteheads argumenter, det vil si generaliseringer av lemma VI.5.3 og teorem VI.4.11 i [8].

Notasjon. Med Whiteheads notasjon skal

$$(\widehat{U(m)}^{\mathrm{ad}}, \widehat{SU(m)}^{\mathrm{ad}})$$

være avbildningssylinderen til det : $\big(U(m)^{\mathrm{ad}}, SU(m)^{\mathrm{ad}}\big) \to (S^1, 1)$.

Whiteheads VI.5.3 generalisert til dette $U(m)$-ekvivariante tilfellet sier at $U(m)$-avbildningen $\phi_n : P^{(n)} \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ kan utvides til en $U(m)$-avbildning

$$\hat{\phi}_n : (P^{(n+1)}, P^{(n)}) \to \big(\widehat{U(m)}^{\mathrm{ad}}, U(m)^{\mathrm{ad}}\big)$$

slik at $\widehat{\det} \circ \hat{\phi}_n : P^{(n+1)} \to S^1$ er $U(m)$-homotop til $\psi|_{P^{(n+1)}}$, relativt til $P^{(n)}$. Og videre, litt upresist, korresponderer en homomorfi

$$\Delta' \circ (\hat{\phi}_n)_* : \pi_{n+1}(P^{(n+1)}, P^{(n)}) \to \pi_n SU(m)^{\mathrm{ad}},$$

under en isomorfi beskrevet i VI.4.11, til kokjeden utledet tidligere.

Det kritiske punktet er å sette opp et kommutativt diagram, slik:

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+2}\big(P^{(n+2)}, P^{(n+1)}\big) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_*"'] & \pi_{n+2}\big(\widehat{U(m)}^{\mathrm{ad}}, \widehat{U(m)}^{\mathrm{ad}}\big) = 0 \arrow[d, "\partial'_*"] & \\
\pi_{n+1}\big(P^{(n+1)}, P^{(n)}\big) \arrow[r, "(\hat{\phi}_n)_*"'] & \pi_{n+1}\big(\widehat{U(m)}^{\mathrm{ad}}, U(m)^{\mathrm{ad}}\big) \arrow[r, "\Delta'"'] & \pi_n SU(m)^{\mathrm{ad}}
\end{tikzcd}$$

Da kan nemlig Whitehead bruke VI.4.11 til å se at sammensetningen langs øverste rad, høyre søyle og til slutt Δ', tilsvarer koranden til kokjeden konstruert over.

7.4 Egenskaper ved obstruksjonskosykelen

Henter følgende notasjon fra G. W. Whiteheads bok [8, side 291], her formulert $U(m)$-ekvivariant.

Notasjon. Gitt to $U(m)$-avbildninger $\phi_0^{(n)}, \phi_1^{(n)} : P^{(n)} \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ som begge er delvise løftninger av $\psi : P \to S^1$. Da er restriksjonene $\phi_0^{(n)}\big|_{P^{(n-1)}}$ og $\phi_1^{(n)}\big|_{P^{(n-1)}}$ ***vertikalt homotope*** hvis det finnes en $U(m)$-homotopi

$$\phi' : I \times P^{(n-1)} \to U(m)^{\mathrm{ad}}$$

slik at $\det \circ \phi' : I \times P^{(n-1)} \to S^1$ er en stasjonær $U(m)$-homotopi. Med andre ord slik at $\det \circ \phi'(t, q) = \det \circ \phi'(0, q)$ for alle $t \in I$ og alle $q \in P^{(n-1)}$.

På dette punktet definerer Whitehead det som her generaliserer til differenskokjeden til $\phi_0^{(n)}$ og $\phi_1^{(n)}$ med hensyn på ϕ', det vil si en kokjede

$$d^n = d^n(\phi_0^{(n)}, \phi', \phi_1^{(n)}) \in C^n_{U(m)}(P; \psi^* \tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}),$$

og ved å først og fremst bruke en formel

$$\delta d^n(\phi_0^{(n)}, \phi', \phi_1^{(n)}) = c^{n+1}(\phi_0^{(n)}) - c^{n+1}(\phi_1^{(n)})$$

der $c^{n+1}(-)$ er obstruksjonskokjeden utledet tidligere, er det mulig å vise et korollar [8, VI.5.7] i litt større generalitet:

Lemma 7.4. *Obstruksjonskokjeden $c^{n+1}(\phi)$ er en korand hvis og bare hvis $U(m)$-avbildningen $\phi|_{P^{(n-1)}}$ kan utvides til en delvis løftning $\phi_{n+1} : P^{(n+1)} \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ av ψ.*

Med andre ord kan $U(m)$-avbildningen $\phi_n : P^{(n)} \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ utvides til $\phi_{n+1} : P^{(n+1)} \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ relativt til ϕ_{n-1} hvis og bare hvis obstruksjonskosykelen utledet ovenfor er nullkohomolog i grad $n+1$, det vil si representerer null-elementet i $H^{n+1}(B; \Psi^* \tilde{\pi}_n SU(m)^{\mathrm{ad}}) \cong H^{n+1}\big(B; \pi_n SU(m)^{\mathrm{ad}}\big)$.

Kapittel 8

Eksempler som resultat av obstruksjonsteorien

8.1 Tredimensjonalt basisrom

Siden det lokale koeffisientsystemet $\pi_n SU(m)^{\mathrm{ad}}$ over P er trivielt for $n = 0, 1, 2$, så vil

$$H^{n+1}\big(B; \pi_n SU(m)^{\mathrm{ad}}\big) = 0 \quad \text{for } n = 0, 1, 2.$$

Dette betyr at det ikke kan være noen obstruksjoner før i grad 4, slik at for enhver vektorbunt E over et basisrom B av homologisk dimensjon tre eller mindre og enhver avbildning $\Psi : B \to S^1$, så finnes det en vektorbuntautomorfi $\Phi : E \to E$ slik at $\Psi = \det(\Phi)$.

Dette blir et spesialtilfelle av betingelsen $\dim B < 2m$ i seksjon 4.1

8.2 Et stabilt tilfelle

Det er kjent [6, side 104] at det finnes en isomorfi $\pi_n\, SU(m) \cong \pi_n\, U(m)$ for alle $n \geq 2$. Siden Hatcher [5, side 19] viser

$$\pi_n\, U(m) \cong \begin{cases} 0 & \text{hvis } n \text{ jevn} \\ \mathbb{Z} & \text{hvis } n \text{ odde} \end{cases}$$

for $n < 2m$, så betyr dette at $\pi_n SU(m)^{\mathrm{ad}} = 0$ når n er jevn og ekte mindre enn $2m$. Altså er koeffisientsystemet

$$\pi_n SU(m)^{\mathrm{ad}} = 0 \quad \text{for } n < 2m \text{ jevn.}$$

slik at

$$H^{n+1}\big(B; \pi_n SU(m)^{\mathrm{ad}}\big) = 0 \quad \text{for } n < 2m \text{ jevn}$$

Hvis nå den kohomologiske dimensjonen til B er $2m$ eller mindre, så blir

$$H^{n+1}\big(B;\pi_n SU(m)^{\mathrm{ad}}\big)=0 \quad \text{for } n\geq 2m.$$

Dette betyr at alle eventuelt ikke-trivielle obstruksjoner ligger i jevne grader, det vil si i $H^{n+1}\big(B;\pi_n SU(m)^{\mathrm{ad}}\big)$ for odde n mindre enn $2m$ og hvor n er større enn eller lik 3, fra seksjon 8.1.

Og når rommet er et CW-kompleks forsvinner disse gruppene hvis skjelettene, foruten 0-, 1- og eventuelt 2-celler, kun har celler i odde grader i dimensjoner under $2m$. Da finnes ingen obstruksjon mot å løfte $\psi : P\to S^1$ til $\phi : P\to U(m)^{\mathrm{ad}}$.

Avslutningsord

Her vil jeg forsøke å trekke noen konklusjoner og peke på hva som bør undersøkes videre, kanskje særlig i forbindelse med å finne moteksempler. Kanskje jeg sitter på en følelse av å ha skapt flere problemer enn jeg har løst, men det er jo i så fall litt morsomt også...

Kapitlene 5 og 6 viser at tilfellet med $E\,U(m) \times S^1 \to B\,U(m) \times S^1$ som prinsipalbunten $P \to B$ og projeksjonen på annen faktor som $U(m)$-avbildningen $\psi : P \to S^1$, er et eksempel der pr_2 ikke lar seg løfte over $\det : U(m)^{\mathrm{ad}} \to S^1$:

$$\begin{tikzcd} E\,U(m) \times S^1 \arrow[r, dotted] \arrow[d] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & U(m)^{\mathrm{ad}} \arrow[d, "\det"] \\ B\,U(m) \times S^1 & S^1 \end{tikzcd} \tag{8.1}$$

Dette betyr at vektorbunten $E(\gamma^m) \times S^1 \to B\,U(m) \times S^1$ sammen med avbildningen $\Psi = \mathrm{pr}_2 : B\,U(m) \times S^1 \to S^1$,

$$\begin{tikzcd} E(\gamma^m) \times S^1 \arrow[d, "p"] & \\ B\,U(m) \times S^1 \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & S^1, \end{tikzcd}$$

er slik at Ψ aldri lar seg realisere som determinanten av noen buntautomorfi. Men dette "ikke-eksemplet" (8.1) var uendeligdimensjonalt. Da vil jeg spørre om det finnes et ikke-eksempel av endelig dimensjon, eller om det var nødvendig med uendelig dimensjon. Personlig synes jeg at det er litt rart hvis det ikke skulle finnes noe endeligdimensjonalt ikke-eksempel, men foreløpig er det heller ikke utenkelig.

Mer raffinerte spørsmål er også interessante. Problemet lar seg alltid løse over 3-skjelettet, men finnes det et største positivt heltall $N > 3$ slik at det alltid finnes løftninger til n-skjelettet for alle $n < N$? Eller om det finnes et positivt heltall N slik at det alltid finnes ikke-eksempler for $n \geq N$.

Det er flere punkter på ønskelisten min: Hvis det for eksempel finnes et positivt heltall n slik at $\psi : P \to B$ løfter til $\phi_{n-1} : P^{(n-1)} \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ men ikke lar seg utvide til n-skjelettet $P^{(n)}$, så kunne det tenkes at grunnen er et valg av utvidelse på et tidligere steg. Slik at jeg ved å gjøre et *annet* valg på dette tidligere steget kunne ha funnet en $U(m)$-avbildning $\phi'_{n-1} : P^{(n-1)} \to U(m)^{\mathrm{ad}}$ som kunne latt seg utvide til n-skjelettet.

En interessant generalisering er å se på en kompakt Liegruppe G i stedet for $U(m)$, en normal undergruppe $N \triangleleft G$ i stedet for $SU(m) \subset U(m)$, og kvotienthomomorfien $d : G \to G/N$ i stedet for determinantavbildningen. Da vil jeg se på en fiberbunt $p : E \to B$ med strukturgruppe G og et rom F som fiber, sammen med en avbildning $\Psi : B \to G/N$. Så går problemet ut på å skrive $\Psi = d(\Phi)$ for en automorfi $\Phi : E \to E$ av fiberbunten E. Men dette er altså en annen historie.

Referanser

[1] A.K. Bousfield and D.M. Kan. *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, volum 304 i *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1972.

[2] Gunnar Carlsson. Equivariant stable homotopy and Sullivan's conjecture. *Invent. math.*, 103:497–525, 1991.

[3] Tammo tom Dieck. *Transformation groups*. de Gruyter, Berlin, 1987.

[4] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Hatchers hjemmeside og Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[5] Allen Hatcher. *Vector bundles and K-theory*. Versjon 1.3 publisert på A. Hatchers hjemmeside (www.math.cornell.edu/~hatcher/), Juli, 2001.

[6] Dale Husemoller. *Fibre Bundles*, volum 20 i *Graduate Text in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1994.

[7] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974.

[8] George W. Whitehead. *Elements of Homotopy Theory*, volum 61 i *Graduate Text in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1978.

Stikkordsregister